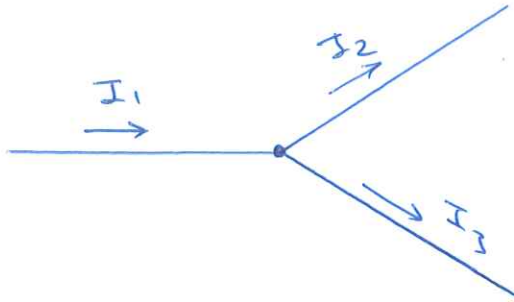


Νόμοι του Kirchhoff

1) Νόμος των ρευμάτων

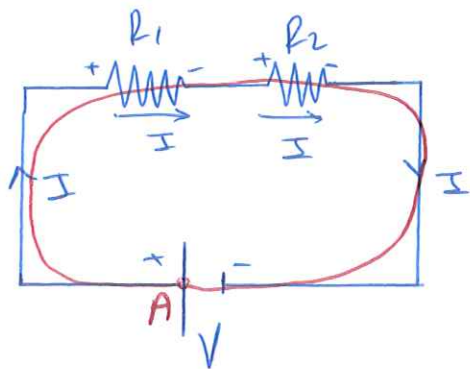


- Σε κάθε κόμβο ενός κυκλώματος, το άθροισμα των ρευμάτων πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν.
- Τα ρεύματα που εισέρχονται στο κόμβο θεωρούνται θετικά (+I), ενώ εκείνα που εξέρχονται από αυτόν θεωρούνται αρνητικά (-I).
- Αποτελεί μια μαθηματική έκφραση της διατήρησης του φορτίου. $I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow I_1 - I_2 - I_3 = 0$

➤ Γενική μαθηματική μορφή:

$$\sum_{i, \text{κόμβου}} I_i = 0.$$

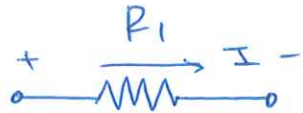
2] Νόμος των τάσεων



► Το αθροισμα των διαφορών δυναμικού στα άκρα όλων των στοιχείων κάθε κλειστού κυκλώματος (κάθε κλειστού βρόχου) είναι ίσο με μηδέν.

► Αποτελεί έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας.

Αφού για την κίτρινη διαδρομή προφανώς $\Delta V = - \int_A^A \vec{E} \cdot d\vec{\rho} = 0$.
Ίδια άκρα.

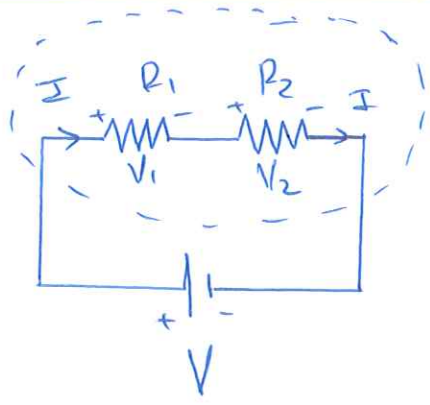
► Συμπεραίνει ότι για το στοιχείο  σε κάθε στοιχείο έχω διαφορά δυναμικού, $V_1 = \Delta V_1 = I \cdot R_1$ καθώς χάνω ενέργεια, λόγω τριβών (κρούσεων) (N. Ohm)

Οπότε έχουμε: $V - V_1 - V_2 = 0 \Rightarrow V - IR_1 - IR_2 = 0$

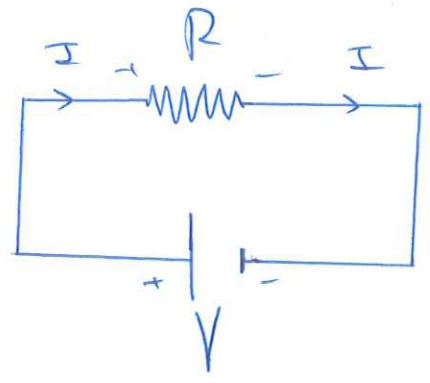
• Γενική μαθηματική σχέση:

$$\boxed{\sum_i V_i = 0}$$

Αντιστάσεις σε σειρά:



Ισοδύναμο
κύκλωμα
με μία
αντίσταση
 R



- Έστω αντιστάσεις R_1, R_2 που είναι συνδεδεμένες σε σειρά.
- και οι δύο αντιστάσεις διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I .
- Θέλουμε να φτιάξουμε ένα ισοδύναμο κύκλωμα, το οποίο να έχει μια μόνο αντίσταση R η οποία να είναι ισοδύναμη με τις δύο συνδεδεμένες σε σειρά. Αυτό γίνεται για να απολοποιούνται τα κυκλώματα στη πράξη τους.
- Εργαζόμαστε ως εξής:

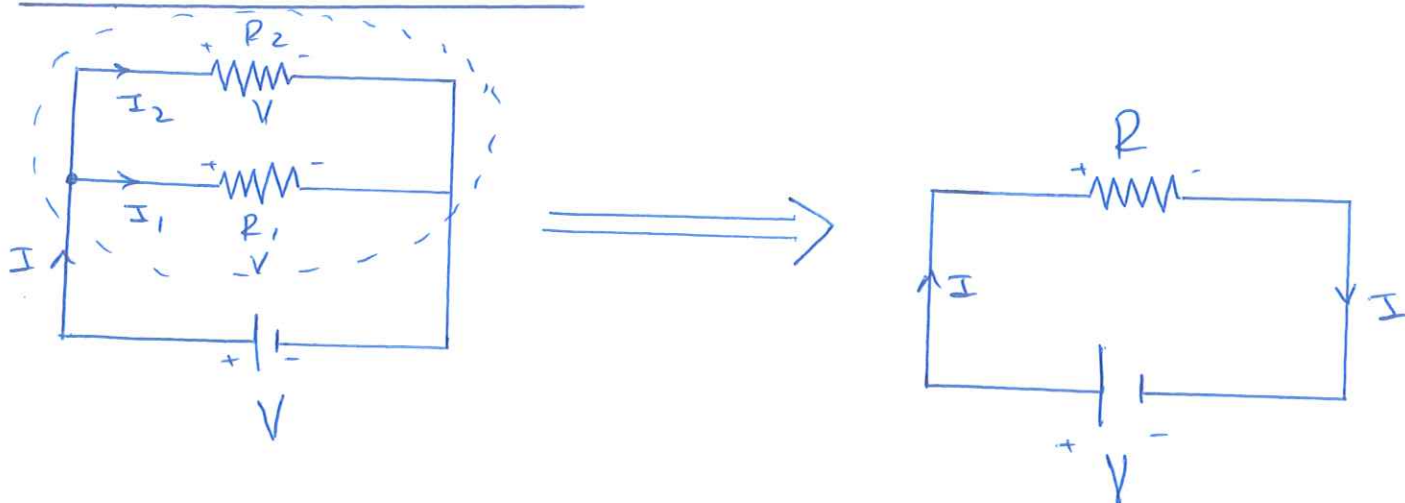
Από 2^η Ν. Kirchhoff: $V - V_1 - V_2 = 0$

Από Ν. Ohm: $I R_{0\lambda} - I R_1 - I R_2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{R_{0\lambda} = R_1 + R_2}$

Αντιστάσεις Παράλληλα:

-4-



► Για να βρούμε τον ισοδύναμο αντίσταση R_{os} εφαρμόζουμε ως εξής:

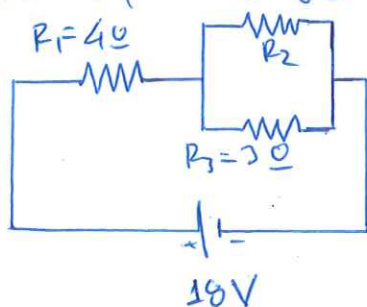
Γνωρίζουμε από 1^ο Ν. Kirchhoff: $I = I_1 + I_2$

Από την ίδια κοινή & από Ν. Ohm: $\frac{I}{V} = \frac{I_1}{V} + \frac{I_2}{V}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_{os}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Εφαρμογή: Να βρεθεί η ισοδύναμη R_{os} του ακτωλούλου

κυκλώματος: 6Ω



Ανάλυση: ► Συνδυάζουμε R_2, R_3 ως:

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow \frac{1}{R_4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Omega$$

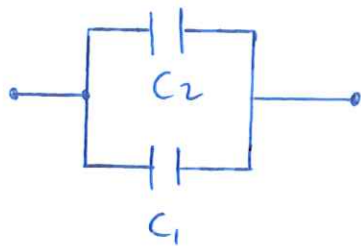
$$\Rightarrow R_4 = 2\Omega$$

► Συνδυάζουμε R_1, R_4 ως:

$$R_{os} = R_1 + R_4 = 4 + 2 = 6\Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{os} = 6\Omega}$$

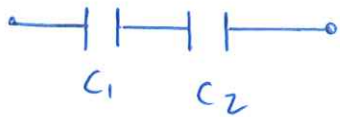
► Τόσο στο συνδυασμό αντιστάσεων όσο και στο συνδυασμό πυκνωτών η ιδέα ήταν να χρησιμοποιούμε τους νόμους Kirchhoff και Ohm, προκειμένου να απλοποιούμε τα κυκλώματα σε πιο απλά. Έτσι έχουμε:

ΠΥΚΝΩΤΕΣ

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$\Rightarrow$$

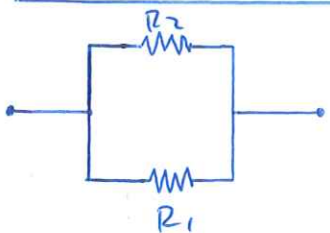

$$C_{1008} = C_1 + C_2$$



$$V = V_1 + V_2$$

$$\Rightarrow$$


$$\frac{1}{C_{1008}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΙΣ

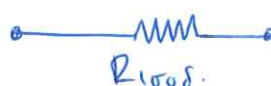
$$I = I_1 + I_2$$

$$\Rightarrow$$


$$\frac{1}{R_{1008}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



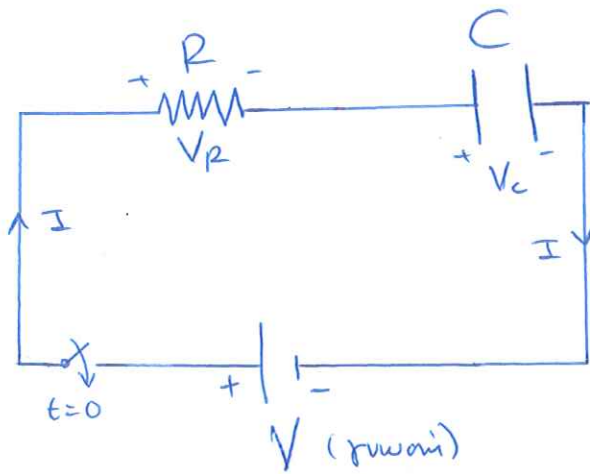
$$V = V_1 + V_2$$

$$\Rightarrow$$


$$R_{1008} = R_1 + R_2$$

Το κύκλωμα RC

- 6 -



► Θεωρούμε ότι αρχικά ο πυκνωτής είναι αφορτισμένος $q=0$ και τον $t=0$ κλείνουμε το διακόπτη.

Μας ενδιαφέρει το φορτίο $q(t)$ στις πλάκες του πυκνωτή και το ρεύμα $I = I(t)$ που διαρρέει το κύκλωμα.

$$\begin{aligned} \text{► Από 2ο νόμο Kirchhoff ισχύει: } & V - V_R - V_C = 0 \\ \text{Όμως: } & V_R = I \cdot R = \frac{dq}{dt} R \\ & V_C = \frac{q}{C} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$V = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q - \frac{V}{R} = 0$$

Γίναν μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης διαχωρίστην:

$$\Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q + \frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{q - C \cdot V} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^q \frac{dq'}{q' - C \cdot V} = - \frac{1}{RC} \int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow \left[\ln |q' - C \cdot V| \right]_0^q = - \frac{1}{RC} t$$

$$\Rightarrow \ln |q - C \cdot V| - \ln |-C \cdot V| = - \frac{1}{RC} \cdot t$$

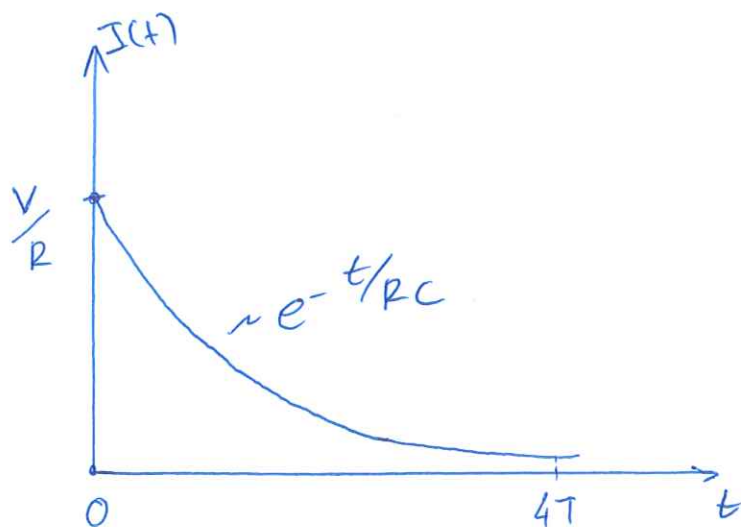
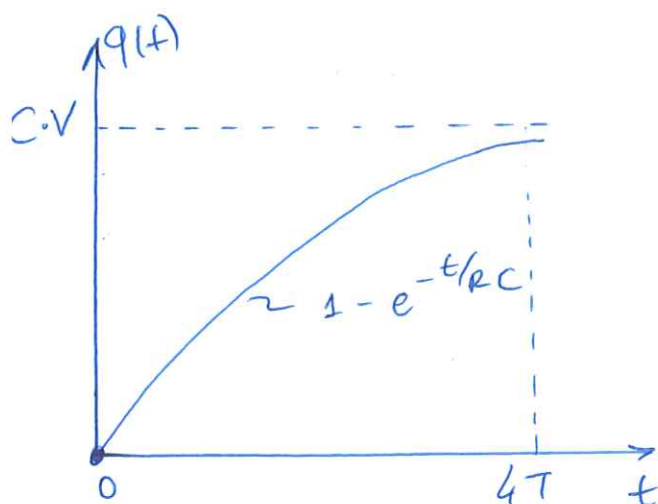
$$\Rightarrow \ln \left| \frac{q - C \cdot V}{-C \cdot V} \right| = - \frac{1}{RC} \cdot t$$

$$\Rightarrow q(t) - C \cdot V = - C \cdot V \cdot e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow \boxed{q(t) = C \cdot V (1 - e^{-t/RC})}$$

και προφανώς:

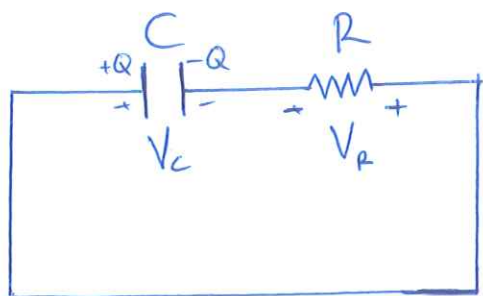
$$\boxed{I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} e^{-t/RC}}$$



Εάν ορίσουμε μια σταθερά $T = RC$ που έχει μονάδες χρόνου, τότε
πλείονος σε $4T$ που πρακτικά έχει παύσει να υπάρχει και $I = 0$ σε

Εκφόρτιση πυκνωτή

-8-



► Αρχικά φορτισμένος πυκνωτής φορτίου Q συνδέεται τον $t=0$ με μια αντίσταση R και αρχίζει η εκφόρτιση. Να βρείτε το $q(t)$ και το ρεύμα $I(t)$ που διαρρέει το κύκλωμα.

► Από 2^η νόμο Kirchhoff: $V_C + V_R = 0$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} - IR = 0, \quad I = -\frac{dq}{dt}, \text{ αφού}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = 0$$

ο πυκνωτής χάνει
 $q \cdot \left(\frac{dq}{dt} < 0 \right)$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\Rightarrow \int_Q^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{q}{Q} \right| = -\frac{1}{RC} t$$

$$\Rightarrow \boxed{q(t) = Q \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$$\text{και} \quad \boxed{I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}}$$

