

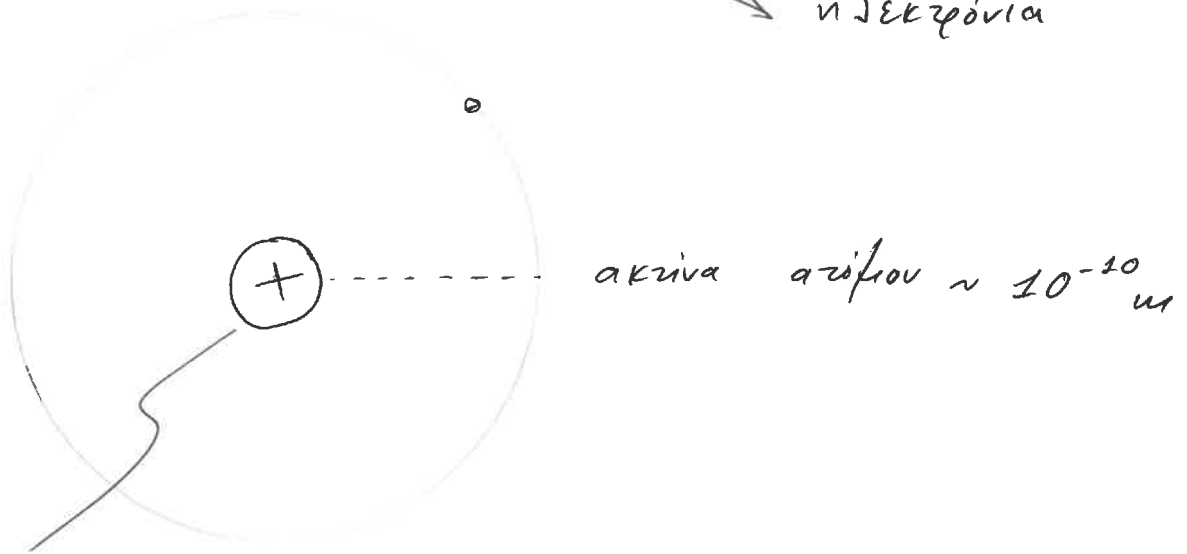
Η ύλη αποτελείται από άτομα

↗

↘

πυρήνες

ηλεκτρόνια



διάμετρος πυρήνα
 $\sim 10^{-15} \text{ m}$

Στη φύση υπάρχουν δύο είδη φορτίων. Θετικό (+) και αρνητικό (-). Τα ετερώνυμα έλκονται. Επίσης το φορτίο διακρίνεται αλλά μπορεί να μεταφερθεί. Για παράδειγμα όταν τρίβουμε ένα κλαδί πάνω σε βαμβακερή κλωστή, e^- από τα κλωστή μεταφέρονται στο κλαδί.

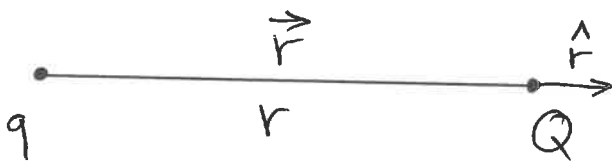
► Το φορτίο είναι κβαντισμένο και δίνεται πάντα ως ακέραια πολλαπλα του φορτίου του ηλεκτρονίου.

$$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (1909, \text{ Millikan πείρα με σφαίρα λαδιού})$$

Γενικά $q = \pm N \cdot |e|$, N ακέραιος

Ός προς κάποιο σύστημα αναφοράς τα φορτία είναι ακίνητα, γ' αυτό και μιλάμε για ηλεκτροστατική.

• Νόμος του Coulomb (1785)



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Ορίζουμε ως μονάδα του φορτίου το Coulomb. [C].

Αφού έχουμε ορίσει μια νέα έννοια - φυσική ποσότητα, αυτή του φορτίου, πρέπει υποχρεωτικά να εισάγουμε μια σταθερά

η οποία για ιστορικούς λόγους δίνεται: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$

Σχόλιο: Έτσι όπως διατυπώνεται ο νόμος του Coulomb παρατηρούμε ότι έχουμε δύο αγνώστους. Απενός το φορτίο q που ορίσαμε να έχει μονάδες [C] και αφετέρου μια σταθερά αναλογίας $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_e$.

Θα δούμε αργότερα ότι η λύση δόθηκε όταν ο ηλεκτρισμός συνδυάστηκε με το μαγνητισμό και θα προκύψει μια σχέση ως follows: $\epsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ ή $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$.

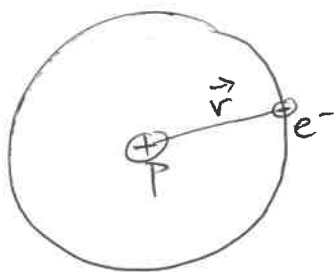
Όπου $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$ $\rightarrow$ ηλεκτρική σταθερά του κενού -3-

και $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{N \cdot s^2}{C^2 m}$ $\rightarrow$ μαγνητική διαπερατότητα του κενού.

Ιστορικά βρέθηκε πρώτα το μ_0 και έπειτα προέκυψε η σταθερά ϵ_0 .

Σχόλιο: Σύγκριση βαρυτικής με δύναμη Coulomb.

Ας θεωρήσουμε το άτομο του υδρογόνου.



Βαρυτική Δύναμη: $|\vec{F}_g| = G \frac{m_e m_p}{r^2}$

Δύναμη Coulomb: $|\vec{F}_c| = k_e \frac{q_e q_p}{r^2}$
 $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$

$$\frac{|\vec{F}_g|}{|\vec{F}_c|} = \frac{G m_e m_p}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2}$$

Γνωρίζουμε ότι: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

$$m_e = 1.67 \cdot 10^{-27} kg$$

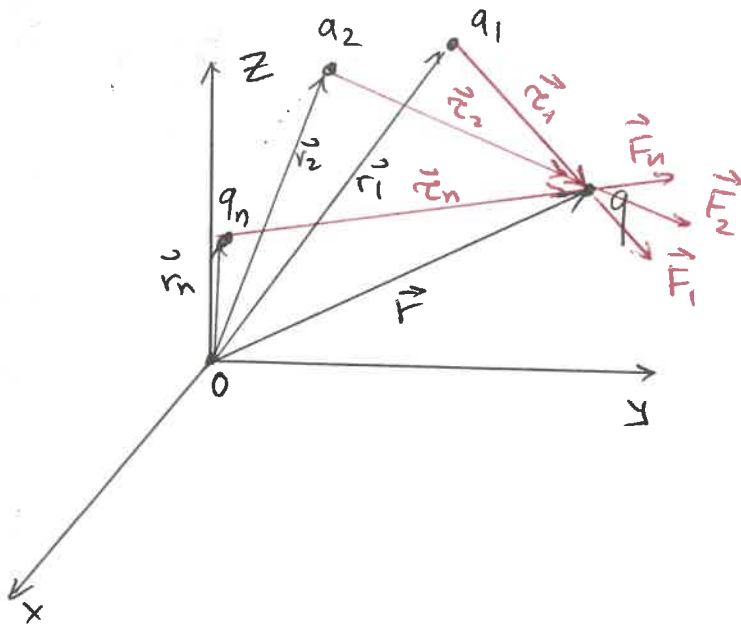
$$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} kg$$

$$\frac{|\vec{F}_g|}{|\vec{F}_c|} \approx 10^{-39}$$

Η δύναμη Coulomb είναι 39 τάξεις μεγάλους μεγαλύτερη από τη βαρυτική!

Εναλλαλία ηλεκτρικών δυνάμεων

-4-



$$\text{Όπου: } \vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_2$$

⋮

$$\vec{r}_n = \vec{r} - \vec{r}_n$$

$$\text{και: } \hat{r}_1 = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}$$

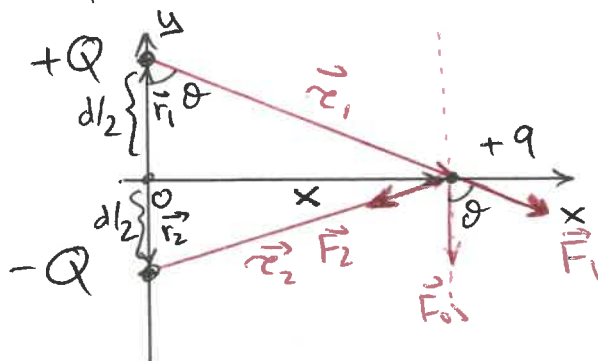
$$\hat{r}_2 = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$$

Η αρχή της εναλλαλίας δείχνει ότι η δύναμη στο φορτίο q από όλα τα $q_1, q_2, \dots, q_n$ θα είναι το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_n q}{r_n^2} \hat{r}_n$$

Παράδειγμα: Βρείτε τη δύναμη στο φορτίο q που σχηματίζονται.



Για να βρούμε τη συνολική δύναμη χρησιμοποιούμε τον ν. Coulomb ως εξής:

$$\vec{F}_{0\lambda} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-Q)q}{r_2^2} \hat{r}_2$$

Αρκεί επομένως να κάνουμε το διανυσματικό άθροισμα σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Συνώς έχουμε τα

εξής δεδομένα: $\vec{r}_1 = \frac{d}{2} \hat{y}$

$$\vec{r}_2 = -\frac{d}{2} \hat{y}$$

$$\vec{r} = x \hat{x}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_1 = (x \hat{x}) - \left(\frac{d}{2} \hat{y}\right) = x \hat{x} - \frac{d}{2} \hat{y}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_2 = x \hat{x} + \frac{d}{2} \hat{y}$$

$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = \sqrt{x^2 + d^2/4}$$

Οπότε: $\hat{r}_1 = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2/4}} \hat{x} - \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + d^2/4}} \hat{y}$

$$\hat{r}_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2/4}} \hat{x} + \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + d^2/4}} \hat{y}$$

Συνώς έχουμε: $\vec{F}_{01} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-Q) \cdot q}{r_2^2} \hat{r}_2$

$$= \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}} \hat{x} - \frac{d/2}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}} \hat{y} - \frac{x}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}} \hat{x} - \frac{d/2}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}} \hat{y} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{01} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQd}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}} \hat{y}$$

Σχόλιο: Αν $x \gg d \Rightarrow |\vec{F}_{01}| \sim \frac{1}{x^2}$. Η συνιστώσα δεν ακολουθεί το Ν. Coulomb $\sim 1/x^2$!

Β' τρόπος: Εκτεταλλεμένοι τι απόσταση του σχήματος⁻⁶⁻
θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι x-συνιστώσες αλληλοακυρώνονται

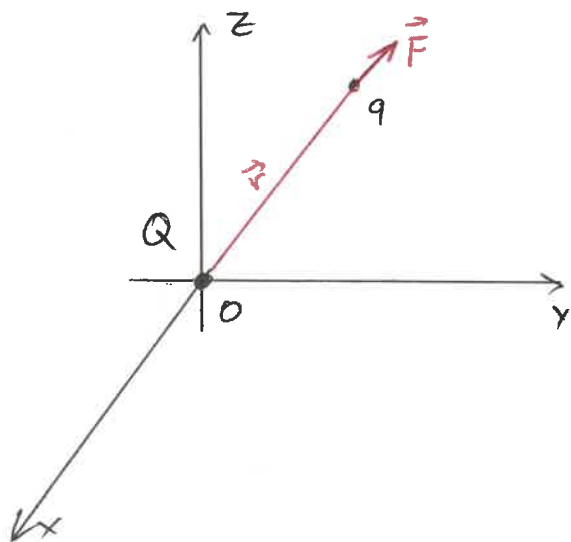
και :

$$F_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{(x^2 + d^2/4)} \cos\theta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(x^2 + d^2/4)} \cos\theta,$$

με $\cos\theta = \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + d^2/4}}$, οπότε: $\vec{F}_Q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d q Q}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}} \hat{y}$.

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$

Ας θεωρήσουμε ένα φορτίο Q στην αρχή των αξόνων κάποιου συστήματος συντεταγμένων. Τότε από το Νόμο Coulomb γνωρίζουμε ότι εάν βείουμε σε οποιαδήποτε απόσταση ένα άλλο φορτίο q θα δεχθεί δύναμη $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r^2} \hat{r}$



► Μπορούμε τώρα να φανταστούμε ότι το φορτίο Q "προσποισεί" (γύρω του φορτίου του) τον περιβάλλοντα χώρο, έτσι ώστε οποιοδήποτε άλλο φορτισμένο αντικείμενο "αισθάνεται" τη δύναμη Coulomb.

► Αν δηλαδή ένα δοκιμαστικό φορτίο q τοποθετηθεί σε ένα σημείο του χώρου και δεχθεί ηλεκτρική δύναμη θα δείξει ότι υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο αυτό.

Ορισμός:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

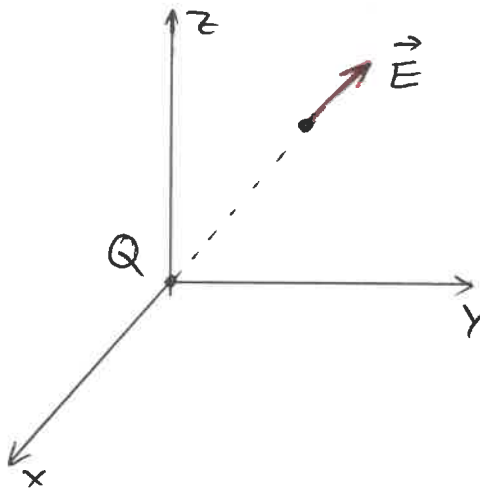
Το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από φορτία (μία ιδιότητα στο ίδιο χώρο) και ασκεί δύναμη σε φορτία.

Στο παράδειγμά μας έχουμε:

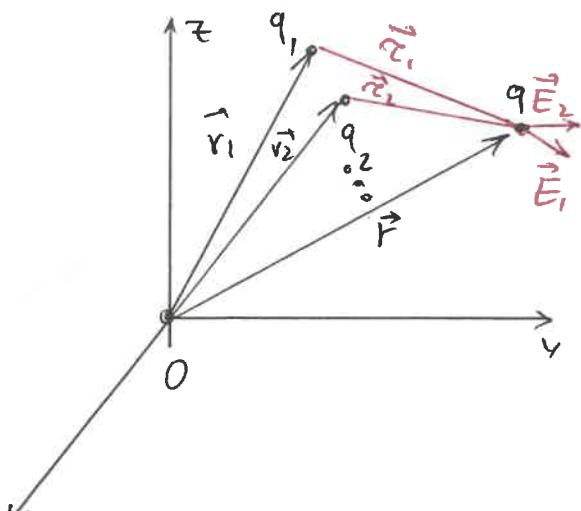
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Με μονάδες:

$$[E] = \frac{N}{C}$$



Ηλεκτρικό πεδίο διακριτών κατανοών φορτίων

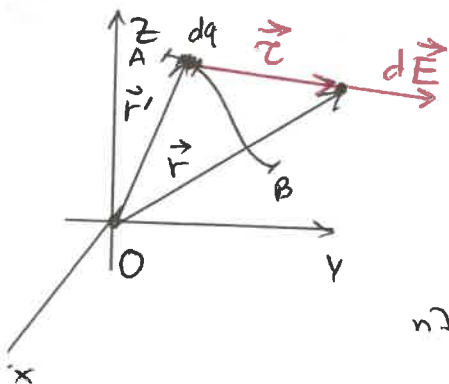


$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{F}_0}{q} = \frac{1}{q} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

1) Γραμμική κατανομή φορτίου (λ)

Σε μια γραμμή στο χώρο υπάρχει καταμετρημένο φορτίο με γραμμική πυκνότητα $\lambda = dq/dl$ με μονάδες C/m .



Το κάθε κομμάτι με φορτίο dq δημιουργεί στη θέση B ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο:

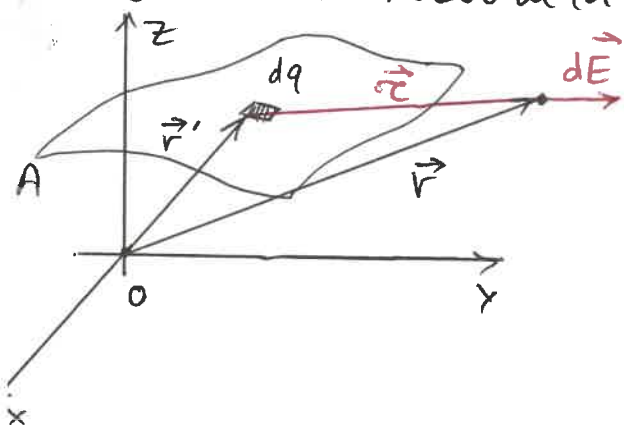
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(B) = \int_{AB} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \hat{r} ; \text{ με } \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\text{και } \hat{r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

2) Επιφανειακή κατανομή φορτίου (σ)

Σε μια επιφάνεια A στο χώρο υπάρχει καταμετρημένο φορτίο με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = dq/da$ με μονάδες C/m^2 .



Το κάθε κομμάτι της επιφάνειας έχει φορτίο $dq = \sigma \cdot da$ και δημιουργεί στη θέση B ένα στοιχειώδες πεδίο

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot da}{r^2} \hat{r}$$

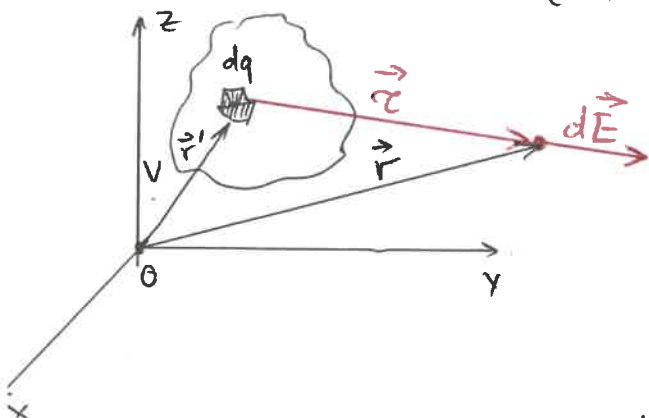
$$\Rightarrow \vec{E}(B) = \iint_A \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot da}{r^2} \hat{r} ; \text{ με } \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\text{και } \hat{r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

3] Χωρική κατανομή φορτίου (ρ)

-9-

Σε ένα όγκο V στο χώρο υπάρχει καταμετρημένο φορτίο με χωρική πυκνότητα φορτίου $\rho = \frac{dq}{dV}$ με μονάδες C/m^3 .



Το κάθε κομμάτι του όγκου έχει φορτίο $dq = \rho dV$ και δημιουργεί στο δια $\vec{r}$ ένα στοιχειώδες ηλ. πεδίο.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r}}$$

$$\text{Με } \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\text{και } \hat{r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Σχόλιο 1: Είναι πολύ δύσκολο έως αδύνατο να κάνει

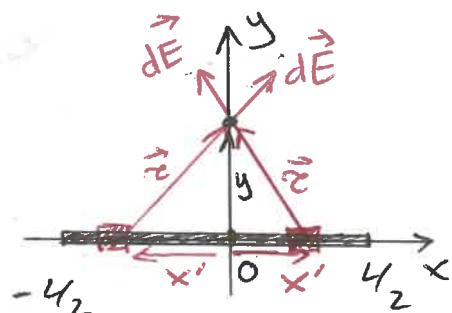
κάποιος τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου συνεχών κατανομών με τα παραπάνω ολοκληρώματα. Θα δούμε ορισμένες απλές περιπτώσεις που γίνεται, αλλά για τον υπολογισμό του $\vec{E}$ εάν υπάρχουν κατάλληλες συμμαχίες θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο Gauss που θα δούμε μετά.

Σχόλιο 2: Για να υπολογίσω κάποιος το παραπάνω ολοκληρώματα σε καρτεσιανές θα έπρεπε να δείχνει:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \cdot [(x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}]$$

Ανταδίδει 3 διακεχωριστά ολοκληρώματα, ένα $\forall$ οριζόντια $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.

Άσκηση 1: Να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σε απόσταση y από το μέσο ευθύγραμμου σύρματος μήκους L που φέρει ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο Q .



Απάντηση:

Η κατανομή είναι ομοιόμορφη επομένως αφού είναι και γραμμική έχουμε: $\lambda = \frac{Q}{L} \left(\frac{C}{m} \right)$ η γραμ. πυκν. φορτίου.

Από Ν. Coulomb: $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$

Διάνυσμα που δείχνει στα φορτία: $\vec{r}' = x' \hat{x}$

Διάνυσμα που δείχνει το σημείο

όπου θέλουμε να βρούμε το πεδίο: $\vec{r} = y \hat{y}$

$$\vec{r}' + \vec{r} = \vec{r} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}' = y \hat{y} - x' \hat{x}$$

και: $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{y \hat{y} - x' \hat{x}}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$

και $r^2 = (x'^2 + y^2)$

Ονόμα: $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} [-x' \hat{x} + y \hat{y}]$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \frac{-x'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} dx' \hat{x} + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{y}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} dx' \hat{y} \right\}$$

0, αφού είναι
απειρή συνάρτησης
σε συμμετρικό
διάστημα

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{-L/2}^{L/2} \frac{y}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} dx' \right] \hat{y} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } x = y \tan \theta \\ dx = y \sec^2 \theta d\theta \end{array} \right)$$

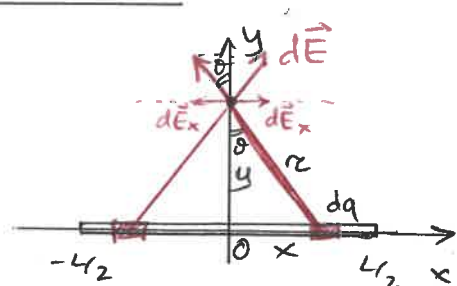
από ντεκα
οσοκιμλ.

$$\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{y \sqrt{(L/2)^2 + y^2}} \hat{y}$$

Επομένως:

$$\vec{E} = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 y \sqrt{(L/2)^2 + y^2}} \hat{y} \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{\text{Σχολιο για}} \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \hat{y}$$

Β' τρένος:



Από αυτήν οι x-συνιστώσες
αλληλοακυρώνονται

και οι y-συνιστώσες δίνουν:

$$d\vec{E}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx \cos \theta}{r^2} \hat{y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda y \sec^2 \theta \cos^3 \theta d\theta}{y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow r = \frac{y}{\cos \theta}$$

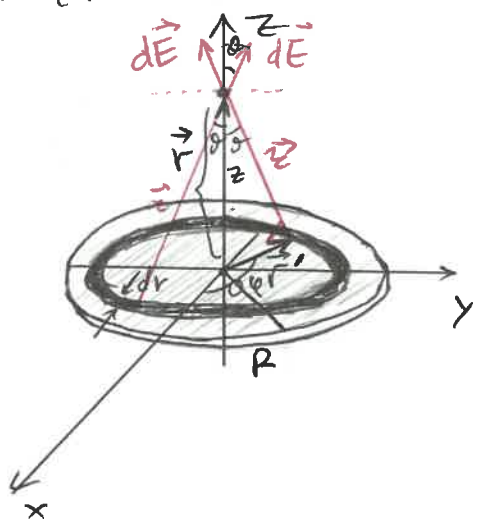
$$\frac{x}{y} = \tan \theta \Rightarrow x = y \tan \theta$$

$$\Rightarrow dx = y \sec^2 \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{E}_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \hat{y} = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(L/2)^2 + y^2}} \hat{y}$$

$\theta_2 = \tan^{-1}(L/2y)$
 $\theta_1 = \tan^{-1}(-L/2y)$

Άσκηση 2: Δίσκος ακτίνα R φέρει ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου συνολικού Q . Να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα.



Από οχήμα: $\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$

Η κατανομή είναι ομοιόμορφη οπότε ισχύει για την επιφανειακή πυκνότητα: $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} \cdot \left(\text{C/m}^2 \right)$

Από Coulomb: $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$, Στοιχειώδες ηλ. πεδίο από κομμάτι φορτίου.

Λόγω συμμετρίας του σχήματος και της κατανομής φορτίου μόνο η $\hat{z}$ συνιστώσα θα επιβιώσει. Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$d\vec{E} = \underbrace{\cos \theta dE}_{dE_z} \hat{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq \cos \theta}{r^2} \hat{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot da \cos \theta}{(\sqrt{\rho^2 + z^2})^2} \hat{z}$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot da \cdot z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{z}, \quad \text{με } da = \rho d\rho d\phi$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma z \rho d\rho d\phi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho \right] \hat{z};$$

Θέτουμε $u = \rho^2 + z^2$
 $du = 2\rho d\rho$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\int_{z^2}^{R^2 + z^2} \frac{1}{u^{3/2}} \frac{du}{2} \right] \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \hat{z}}$$

Σχόλιο:

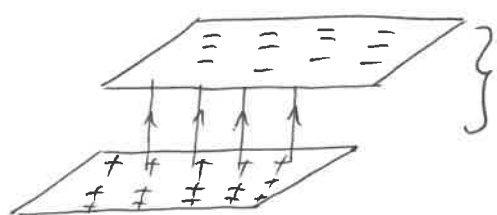
Για $R \rightarrow \infty$, δηλαδή ο δίσκος καλύπτει όλο το επίπεδο, το $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$, γίνεται πостояτό $\Rightarrow$

ανεξάρτητο από την απόσταση από το φύλλο!

►► Το ίδιο προσεγγιστικά όχι μόνο για άπειρο φύλλο, αλλά και για φύλλο πεπερασμένης διάστασης σε απόσταση $\ll$ από τα άκρα.

► Στη πράξη:

Αν έχουμε 2 φύλλα



πυκνωτής!

Το πεδίο τότε είναι: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$

και έξω: $\vec{E} = 0$.