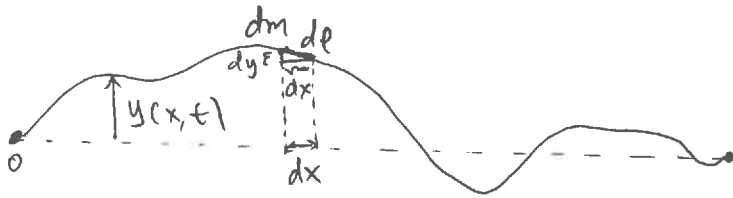


► Πυκνότητα Ενέργειας σε χορδή



Χορδή η οποία πάλλεται

Κοιτάζουμε ένα κομμάτι μάζας dm της χορδής

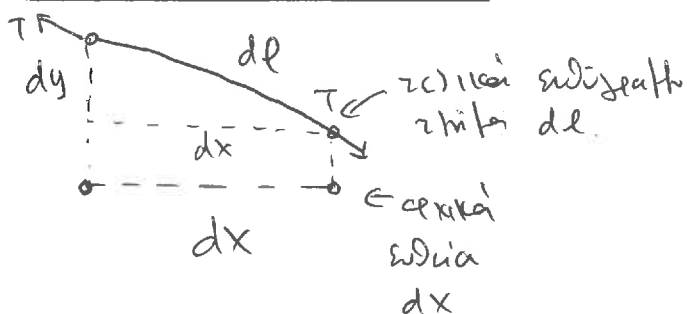
Κινητική Ενέργεια: Λόγω της ελαστικής μετακίνησης η ταχύτητα είναι: $v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$ και η κινητική ενέργεια

ροοεισως: $dk = \frac{1}{2} dm (v_y)^2 = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$

Η αντιστοιχη πυκνότητα κινητικης ενεργειας: $\frac{dk}{dx} = u_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \frac{dm}{dx}$

$\Rightarrow$
$$u_k = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$
 ; $\mu = \text{πυκνότητα μάζας (kg/μήκος)}$
 (dm/dx)
 $(\text{Ενέργεια κιν. / μήκος})$

Ελαστική Ενέργεια:



Λόγω της ελαστικής μετακίνησης κάθε τμήμα dx της χορδής επιμηκώνεται σε dl . Η δύναμη που αντιστέκεται σε αυτή τη επιμήκωση είναι η τάση T .

Επομένως θα παρῶν ἔργο: $dW = T \cdot (\underbrace{dl}_{\text{εφ'ότι}} - \underbrace{dx}_{\text{αφ'ότι}})$

- 2 -

$$\begin{aligned} \Rightarrow dW &= T \cdot (\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx) \\ &= T \cdot \left(dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right) - dx \right) \\ &= T dx \left\{ \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} \end{aligned}$$

Θυμίζετε ότι: $(1+x)^n \approx 1 + nx$ για x μικρό $\ll 1$.

$$\begin{aligned} &= T dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2} T \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Η αντιστοιχία πυκνότητα σταθμικής ενέργειας ομοίως είναι:

$$U_p = \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} T \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{U_p = \frac{1}{2} T \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

↑
(Ενέργεια στ. / μήκος)

Επομένως η σωματική ^{πυκνότητα} ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε χορδή είναι: -3-

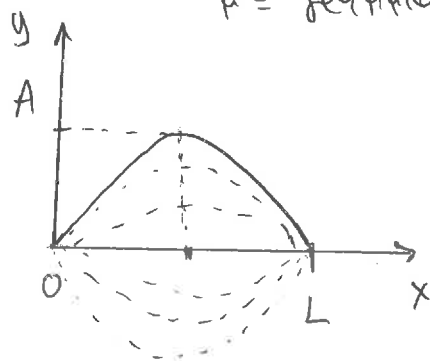
$$\underline{u_s = u_k + u_p = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}$$

Άσκηση: Χορδή μήκους L με ακατωμένα άκρα ταλαντώνται στην 1^η αρμονική αλφειά με την έκφραση:

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t) \quad \text{Με: } \omega = vk = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

όπου T = τάση χορδής

μ = γραμμική πυκνότητα μήκους



Έχουμε: $y(x, t) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin(\omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)$$

Οπότε: $u_k = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin^2(\omega t)$

$$u_p = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} T \frac{A^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos^2(\omega t)$$

$$\Rightarrow u_{s(x,t)} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2} T \frac{A^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos^2(\omega t)$$

Όπως από: $T \frac{\pi^2}{L^2} = \mu \omega^2$ έχουμε:

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \left[\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin^2(\omega t) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos^2(\omega t) \right] \quad -4-$$

Μέση χωρική πυκνότητα ενέργειας: $\langle u(x) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(x,t) dt$

Ολοκληρώνει:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt \\ = \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \\ = \frac{T}{2} - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\omega t) dt \\ = \frac{T}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^T \\ = \frac{T}{2}, \text{ οπότε } \omega \int_0^T \cos^2(\omega t) dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle u(x) \rangle = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \left[\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \langle u(x) \rangle = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2$$

↑
Η μέση χωρική πυκνότητα ενέργειας σε μια περίοδο χρόνου T.

$$\Rightarrow E_{\text{ολ}} = L \cdot \langle u(x) \rangle = \frac{L}{4} \mu \omega^2 A^2 = \sigma \omega^2$$

Μέση χρονική πυκνότητα ενέργειας:

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L u(x,t) dx$$

$$\Rightarrow \langle u(t) \rangle = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2$$

$$\hat{n} \quad E(t) = L \cdot \langle u(t) \rangle = \underbrace{\frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t)}_{K(t)} + \underbrace{\frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t)}_{V(t)}$$

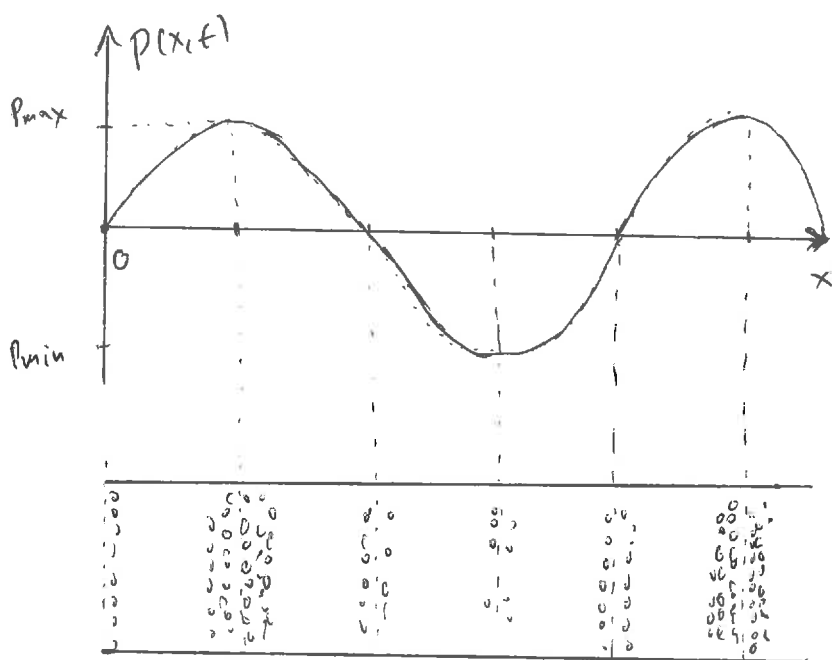
$$\Rightarrow E(t) = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 = \sigma \omega^2$$

Η ολική ενέργεια που κερδίζει είναι σταθερή με το χρόνο και αναλαμβάνεται από κινητική και δυναμική.

Διαμήκη κύματα.

-5-

- Ως συχτές είδαμε εγκάρσιους τρεχόντες (πάνω-κάτω).
Μπορούμε όμως να έχουμε και κύματα τα οποία είναι
διαμήκη (δεξιά-αριστερά).
► Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η πίεση του αέρα
μέσα σε μια φλοξέρα. Ηχητικά κύματα



Θεωρούμε ως $p=0$
των πίεση της
ατμόσφαιρας και
τετράη των $p(x,t)$ ως
υπερπίεση ή υποπίεση.

Πυκνώματα και αραιώματα στη φύση του αέρα τα οποία κινούνται
(δεξιά-αριστερά). $\Rightarrow$ Διαμήκη κύμα.

Ομοίως μπορεί να αποδειχθεί σε κάποια προσέγγιση ότι η
εξίσωση της πίεσης ικανοποιεί κυματική εξίσωση,

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \quad ; \quad v = 340 \text{ m/s (στον αέρα)}$$

Ηλεκρομαγνητικά κύματα

Ο James Clerk Maxwell (~1865) διατυπώνει τις εξισώσεις της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

και διαπιστώνει ότι μπορεί και σε περιοχές όπου δεν υπάρχουν οι πηγές $Q_{\text{enc}} = 0$, $I_{\text{enc}} = 0$, να υπάρχει διάδοση $\vec{E}$, $\vec{B}$.

Από μεταβολές του ενός δημιουργούνται το άλλο.

Στο κενό ενοπλύνει έχουμε τις εξής εξισώσεις:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (1)$$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (2)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (3)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_E}{dt} \quad (4)$$

Θέλουμε να λύσουμε το σύστημα εξισώσεων (1)-(4).

Η πιο γενική μορφή που έχω τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι:

$$\vec{E} = E_x(x, y, z, t) \hat{x} + E_y(x, y, z, t) \hat{y} + E_z(x, y, z, t) \hat{z}$$

$$\vec{B} = B_x(x, y, z, t) \hat{x} + B_y(x, y, z, t) \hat{y} + B_z(x, y, z, t) \hat{z}$$

Έχοντας στο μυαλό μας ότι οι λύσεις στο κενό θέλουμε να είναι κάποιο κύμα που διαδίδεται (όπως λένε ο Maxwell)

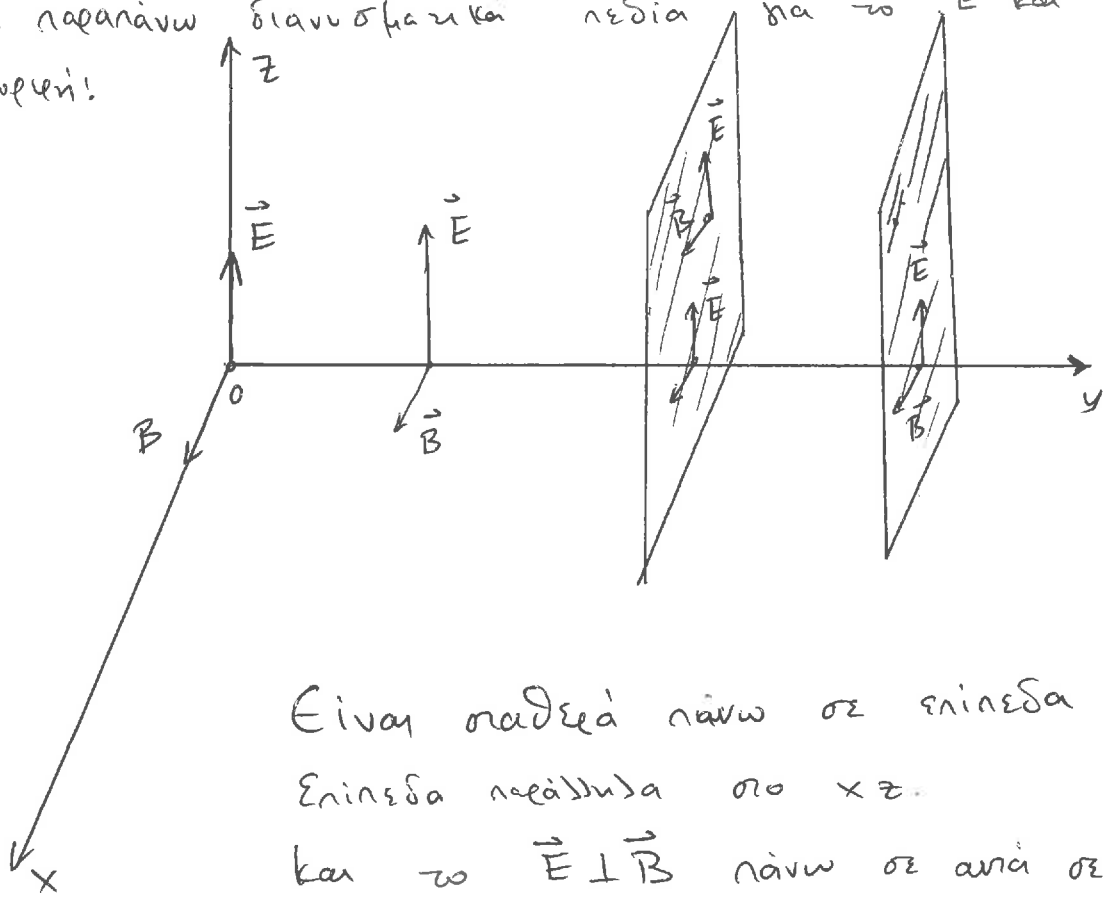
θα υποθέσουμε μια απλοποιημένη μορφή για τη λύση.

Ψάχνουμε, λοιπόν, αν υπάρχει κάποια λύση ως καής:

$$\vec{E} = E_z(y, t) \hat{z}$$

$$\vec{B} = B_x(y, t) \hat{x}$$

Τα παραπάνω διανυσματικά πεδία για το $\vec{E}$ και $\vec{B}$ έχω τη μορφή:



Είναι σταθερά πάνω σε επίπεδα yz σταθερό y .
Επίπεδα περάσματα στο xz .
και το $\vec{E} \perp \vec{B}$ πάνω σε αυτά σε κάθε σημείο
του χώρου.

Με βάση αυτή την υπόθεση για τη μορφή των $\vec{E}$, $\vec{B}$,

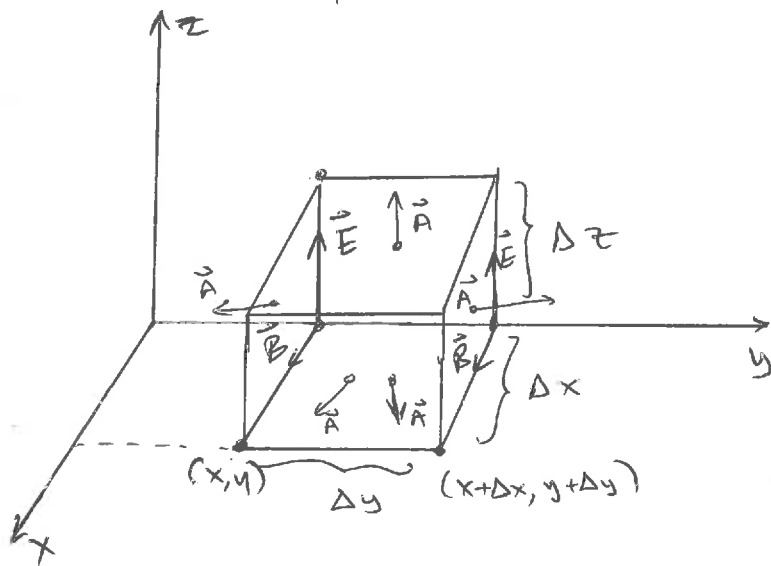
που δηλαδή: $\vec{E} = E_z(y, t) \hat{z}$

$$\vec{B} = B_x(y, t) \hat{x}$$

Πρέπει να ικανοποιήσουμε τις εξισώσεις Maxwell.

Για να ικανοποιηθούν όπως θα ήταν πρέπει να διαλέξουμε κάποια κατάλληλη περιοχή (όγκο) όπου πρέπει να ικανοποιούνται.

Αφού έχουμε καρτεσιανές συντεταγμένες διαλέγουμε τον κύβο (στοιχειώδη) ως ογκότυπο.



Έχουμε: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow E_{\text{πάνω}} \cdot A - E_{\text{κάτω}} \cdot A = 0 \quad \checkmark$

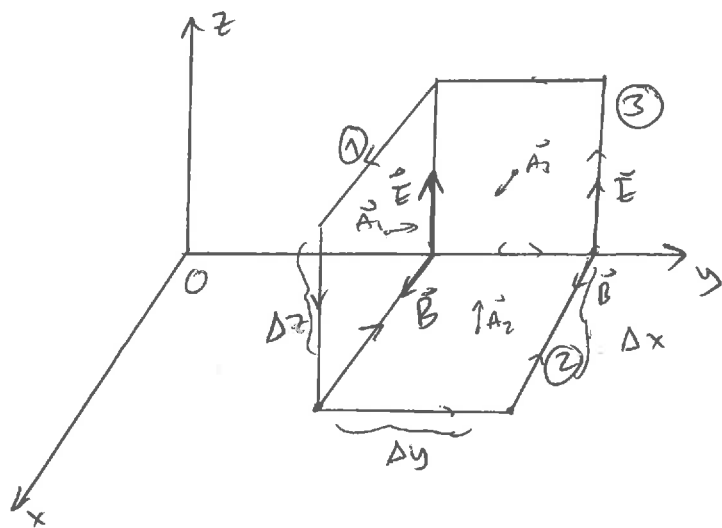
Αφού το $E = E_z(y, t)$ δεν εξαρτάται από το z .

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow B_{\text{εξέξω}} \cdot A - B_{\text{εξέσω}} \cdot A = 0 \quad \checkmark$

Αφού το $B = B_x(y, t)$ δεν εξαρτάται από το z .

Για τα: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ και $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$, πρέπει

να διαλέξουμε κατεύσεις. Αυτές είναι οι παρακάτω:



Σ το fluxo (1): $\Phi_E = 0 \quad (\vec{E} \perp \vec{A}_1)$
 $\Phi_B = 0 \quad (\vec{B} \perp \vec{A}_1)$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot \Delta z - E \cdot \Delta z = 0 \quad \checkmark$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B \Delta x + B \Delta x = 0 \quad \checkmark$$

Σ το fluxo (2): $\Phi_B = 0$

$$\Phi_E = \iint \vec{E} \cdot d\vec{a} = E_z(y, t) \cdot \Delta x \Delta y$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \text{ Αφού } \vec{E} \perp d\vec{l} = \Delta x \hat{x} \text{ και } \Delta y \hat{y} \quad \checkmark$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_x(y, t) \Delta x - B_x(y + \Delta y, t) \Delta x$$

Όπως προκύπτει από την εξίσωση: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (\text{N. Ampère-Maxwell})$

$$\Rightarrow B_x(y, t) \Delta x - B_x(y + \Delta y, t) \Delta x = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} E_z(y, t) \Delta x \Delta y$$

$$\Rightarrow \frac{B_x(y, t) - B_x(y + \Delta y, t)}{\Delta y} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE_z(y, t)}{dt}$$

Για $\Delta y \rightarrow 0$:

$$\boxed{-\frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}} \quad (I)$$

Στο ∂x_0 ③ :

$$\Phi_E = 0$$

$$\Phi_B = B_x(y, t) \cdot \Delta z \Delta y$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_z(y+\Delta y, t) \Delta z - E_z(y, t) \Delta z$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0, \text{ Απει } \vec{B} \perp d\vec{\ell}$$

Όπως πριν :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{M. Faraday})$$

$$\Rightarrow E_z(y+\Delta y, t) \Delta z - E_z(y, t) \Delta z = - \frac{\partial B_x(y, t)}{\partial t} \Delta z \Delta y$$

$$\Rightarrow \frac{E_z(y+\Delta y, t) - E_z(y, t)}{\Delta y} = - \frac{\partial B_x(y, t)}{\partial t}$$

Για $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial E_z}{\partial y} = - \frac{\partial B_x}{\partial t}} \quad (II)$$

Οι (I) και (II) δείχνει να ικανοποιούνται πάντα
 ότι να είναι τα $\vec{E} = E_z(y, t) \hat{z}$ και $\vec{B} = B_x(y, t) \hat{x}$
 λύση του εγχειρίδιου του Maxwell ας πούμε.

Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στην (I) εάν πάρουμε τα εξής:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \text{ (I)} &\Rightarrow -\frac{\partial^2 B_x}{\partial t \partial y} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \text{ (II)} &\Rightarrow -\frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} \Rightarrow$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}$$

ή $\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}$. όπου το $\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$
ταχύτητα φωτός στο
κενό

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}}$$

και ομοίως: $\boxed{\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}}$

κυματικές
εξισώσεις !

με $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ (στο κενό).