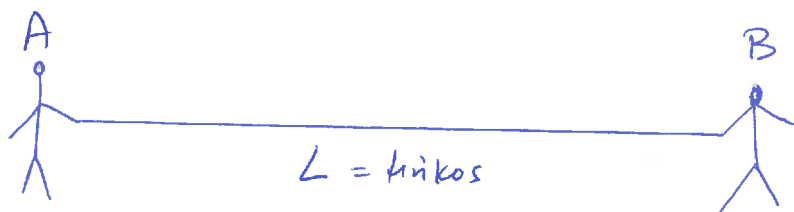


ΚΥΜΑΤΙΚΗΗ κυματική εξίσωση (Εγκάρσια κύματα)

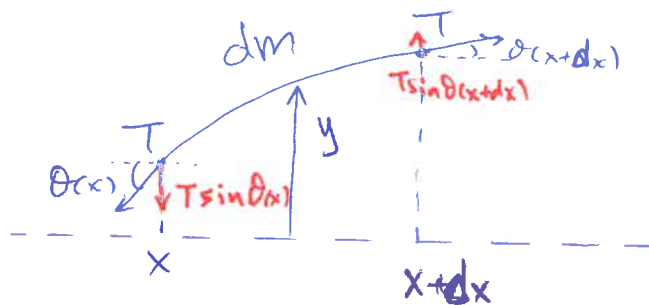
Ας θεωρήσουμε ότι δύο άνθρωποι κρατούν τα άκρα ενός σχοινιού και το τεντώνουν.

Εάν ο A κουνήσει πάνω-κάτω το χέρι του τότε ένας παλμός θα δημιουργηθεί και θα ταξιδεύει προς τον B.



Θα θεωρήσουμε ότι το σχοινί έχει μια γραμμική πυκνότητα μήκους μ (kg/m) και βρίσκεται υπό τάση T (N). Η τάση T είναι η δύναμη που δίνεται κάθε κομμάτι του σχοινιού από τα γειτονικά του.

Έτσι εστιάζουμε σε ένα κομμάτι του σχοινιού και γράφουμε την εξίσωση κίνησης που το διέπει με βάση τον νόμο του Νεύτωνα.



Για να περιγράψουμε την κίνηση του παλμού στο σχοινί χρησιμοποιούμε την μετακίνηση κάθε σημείου του σχοινιού από τη θέση ισορροπίας, κάθε χρονική στιγμή. Έτσι έχουμε την $y(x, t) \leftarrow$ Αυτό το μέγεθος περιγράφει το παλμό.

Νόμος Νεύτωνα στα το κομμάτι της μάζας dm :

$$\underbrace{\sum F_y}_{\downarrow} = dm a_y \quad \text{Θεωρούμε μετακίνηση μόνο στα } y, \text{ οπότε}$$

$$T \sin[\theta(x+dx)] - T \sin \theta(x) = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \text{όμως } dm = \mu dx$$

$$\Rightarrow T \sin \theta(x+dx) - T \sin \theta(x) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \sin \theta(x+dx) - \sin \theta(x) = dx \cdot \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \text{Για μικρές γωνίες } \sin \theta \approx \theta \text{ (Taylor)}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta(x+dx) - \theta(x)}{dx} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1); \quad \text{όμως ισχύει: } \overset{\substack{\text{κλίση} \\ \text{σχοινιού}}}{\tan \theta(x)} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Από: $\tan \theta(x) = \frac{\partial y}{\partial x}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \tan \theta(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta(x)} \cdot \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad , \quad \text{όπου μικρές γωνίες:} \\ \cos^2 \theta_m \approx 1$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$(1) \xRightarrow{(2)} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Σχόλιο: Η σταθερά $\frac{\mu}{T}$ έχει μονάδες: $\frac{\text{kg/m}}{\text{N}} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}$

Εάν ορίσουμε μια ταχύτητα $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ για σταθερά, έχουμε:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

, με $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος αν εξαρτάται από το μέσο.

Είδαμε από πείρατα ότι μια διαταραχή στο σχοινί η οποία είχε οποιαδήποτε τυχαία μορφή $y(x) = f(x)$, από τον έκανε είναι να διαδίδεται ανακατορθωτά. Έτσι μπορούμε να ελέγξουμε ότι κάθε συνάρτηση u μορφής $y(x,t) = f(x \pm vt)$ θα είναι λύση των κυματικών εξισώσεων.

Απόδειξη: Έστω $y(x,t) = f(x+vt)$

Θεωρούμε u μεταβλητή $w = x+vt$, οπότε $f(x+vt) = f(w)$

$$\text{Έχουμε: } \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \stackrel{\text{Leibniz}}{=} \frac{df}{dw} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{df}{dw} \cdot v$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{df}{dw} \cdot v \right] = \frac{d}{dw} \left[\frac{df}{dw} v \right] \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 f}{dw^2}$$

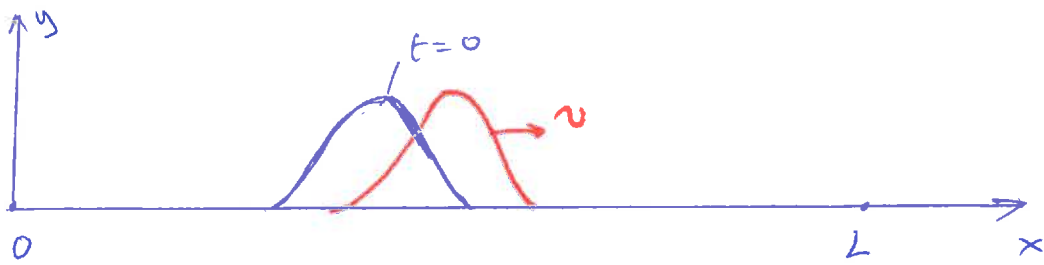
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dw} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{dw} \cdot 1 = \frac{df}{dw}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dw^2}$$

Αντικαθιστούμε αυτ: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ και έχουμε:

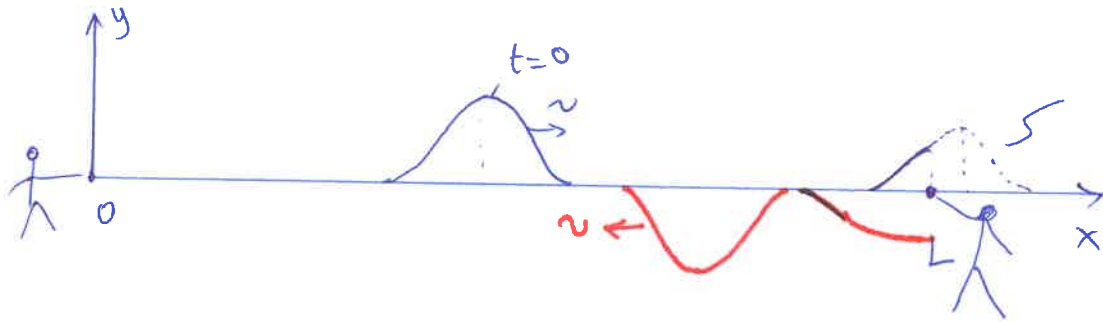
$$v^2 \frac{d^2 f}{dw^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dw^2} \quad \text{που ισχύει.}$$

Άρα κάθε συνάρτηση $f(x \pm vt)$ ικανοποιεί των κυματικών εξισώσεων.



Συνεπώς υποχρεωτικά ο αρχικός παλός πρέπει να κινηθεί με ταχύτητα $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Το αν πάει αριστερά ή δεξιά εξαρτάται από το αν δημιουργήθηκε αριστερά των $t=0$.

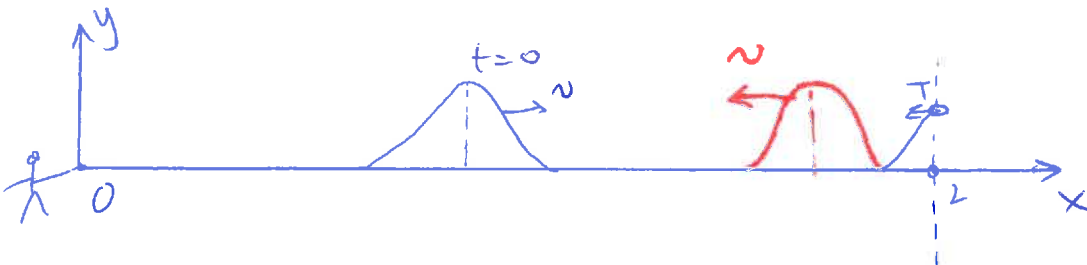
Σωριακή σωδική σταθερού άκρου $y(L, t) = 0$.



Όταν φτάνει ο παλός στο τείδι α'κρο, για να παραμείνει σταθερό πρέπει ο ανδρωτός

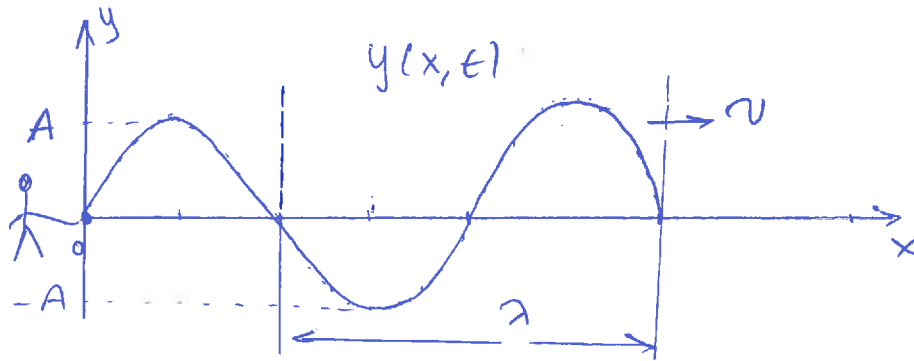
α>>α αντιστοιχ, να ασκεί μια δύναμη αντιστοίχ με αυτή που δίνεται από το παλός.
 => Έτσι δημιουργεί τον κόκκινο παλός που ηγείται με αντιστοιχ ταχύτητα και είναι προς τα κάτω.

Σωριακή σωδική ελεύθερου άκρου $\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$.



Εάν στο άκρο δεν ήταν $\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$, δηλαδή το α'κρο, το οποίο είναι σημείο με $\mu \approx 0$, θα είχε μια δύναμη λόγω τάνυ προς τα κάτω T. Έτσι θα είχε άμεση επιτάχυνση => ΑΤΟΝΟ.

Αρμονικά Κύματα



$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Πλάτουμε και κινούμε το άκρο της χορδής με μια συχνότητα ω . Ο λ μήκος κύματος λ ονομάζεται την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών (ή κοιλάδων ενός κύματος).

Είναι ουσιαστικά σε αυτό τη διαδικασία το μήκος του ταξιδεύει το κύμα στο διάστημα μιας περιόδου (λόγο μακριά λάδι μέχρι να κάνουν το χέρι πάνω-κάτω-πίσω-επανά), ταλάντωση του χεριού.

Σε αυτή τη περίπτωση $y(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right)$

Εξήγηση του ορισματος:

Αν διαλέξουμε $t=0 \Rightarrow y(x,0) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$

Το όρισμα πρέπει να είναι αδιάστατο, οπότε αφού x σε μέτρα, πρέπει και να διατρέχουμε με λ σε μέτρα. και προφανώς όταν το $x=\lambda$ έχει εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση το κύμα εξέρχεται.

Τώρα αλλιώς εφαρμόζεται μια μετατόπιση δεξιά της ομαρμας με ταχύτητα v .

Οπότε προκύπτει: $y(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right)$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{πλάτος ταλάντωσης}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{μήκος κύματος}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{ταχύτητα διάδοσης}}$

$$y(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)\right)$$

$$= A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi v}{\lambda} t\right)$$

ορίζεται ως $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ τον κυματάριθμο (μονάδες $\frac{1}{m}$)

και αφού σε μια περίοδο T διανύει το κύμα απόσταση λ
έχουμε: $\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v}$ και εξ'ορισμού $T = \frac{2\pi}{\omega}$

οπότε: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda} v$ ή $\omega = kv$

Άρα έχουμε:

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

Αυτή η σχέση καλείται σχέση διασποράς. Η σχέση $\omega = \omega(k)$.

SOS

Σχόλιο:

Η σχέση $\omega = kv$ είναι πολύ σημαντική.

Για το μέσο διάδοσης που είναι χορδές μας δίνει ότι αφού η ταχύτητα διάδοσης είναι $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, σαφώς και αφού η ω εξαρτάται μόνο από το πόση συχνότητα κινείται την στιγμή, τότε το μήκος κύματος εξαρτάται μόνο από το ω . ($k = \frac{\omega}{v}$)

Το ω είναι σαφές, γιατί εξαρτάται από την στιγμή. Ενώ το $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ εξαρτάται από το μέσο, και αντιστοίχα το k (ή το λ).

Εναλλασσία αρμονικών κινήσεων:

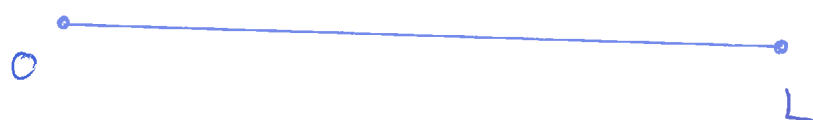
Εάν έχω $y_1 = A \sin(kx - \omega t)$ $\leftarrow$ κινείται δεξιά

$y_2 = A \sin(kx + \omega t)$ $\leftarrow$ κινείται αριστερά

$$y_{\text{ολ}} = y_1 + y_2 = 2A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad \text{από } \sin(\alpha \pm \beta) \text{ ταυτότητες}$$

Το παραπάνω είναι το μεγέθυ στήσιμο κύμα. Κάθε σημείο είτε είναι ακίνητο είτε κινείται αρμονικά πω y , αλλά δεν υπάρχει διάδοση.

Χορδή με πακτωμένα άκρα



$$y(0, t) = 0$$

$$y(L, t) = 0$$

Θέλουμε να λύσουμε την κλασική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

στην περίπτωση χορδής με πακτωμένα άκρα.

Βάζουμε τη μορφή του στήσιμου κύματος και υποθέτουμε μια λύση της μορφής:

$$y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Σταθμισμένο μόνο
πω θέσης

Σταθμισμένο μόνο
πω χρόνου

Αντικαθιστούμε συν κυβική εξίσωση και έχουμε:

-9-

$$X(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = v^2 T(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{v^2} \cdot \frac{1}{T(t)} \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2}}_{-k^2} = \underbrace{\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}}_{-k^2}$$

Έχουμε αποδείξει
για ομαέρμα
κόρο του χείνου
και δεξιά μια
ομαέρμα κόρο
το χώρο x.

Για να ιπώνται
για κάθε x και t
πρίν να είναι
και δύο πρίν
ισα με παρέρμα

Οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k^2 \quad (1)$$

και

$$\frac{1}{v^2 T(t)} \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k^2 \quad (2)$$

$$\text{H (1)} \Rightarrow \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k^2 X(x)$$

$$\text{H (2)} \Rightarrow \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k^2 v^2 T(t)$$

Συνήθως διαφορικές
εξισώσεις 2^{ης} τάξης
με σταθεράς συντελεστή

Για την (1): Θεωρούμε λύση $X(x) \sim e^{\lambda x}$ και αντικαθιστούμε:

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} = -k^2 e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + k^2) e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \pm i k}$$

Οπότε: $X(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$

-10-

Από Euler: $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$

$$\Rightarrow X(x) = A [\cos kx + i \sin kx] + B [\cos kx - i \sin kx]$$

$$\Rightarrow X(x) = (A+B) \cos kx + (iA - iB) \sin kx$$

$$\Rightarrow X(x) = A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$$

Όμως πρέπει να ισχύει: $y(0,t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$
και $y(L,t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$

Οπότε: $X(0) = 0 \Rightarrow A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{A_1 = 0}$$

και $X(L) = 0 \Rightarrow A_2 \sin kL = 0$

$$\Rightarrow kL = n\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{n\pi}{L}}, \text{ με } n = 1, 2, 3, \dots$$

Αρα η λύση για το χωρίο κοφής είναι:

$$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Ομοίως το χρονικό κομμάτι είναι:

-11-

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} v t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} v t\right)$$

και η γενική λύση αναζητείται είναι:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) T_n(t)$$

Σχόλιο: Οι εκφράσεις για το χωρικό κομμάτι:

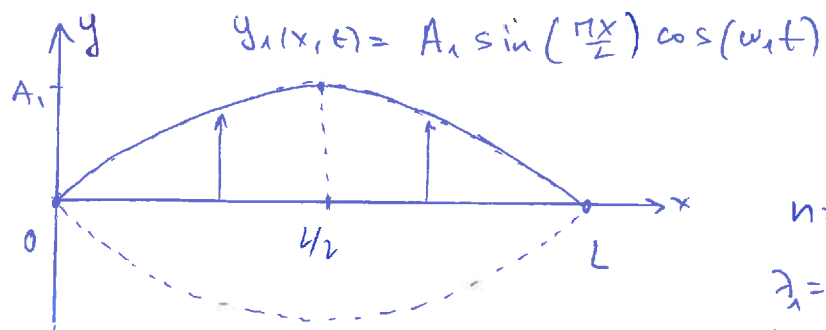
$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ καλούνται και κανονικοί
τρόποι ταλάντωσης της
χορδής. Είναι στάσιμα
κύματα που δηλώνουν
στη χορδή με συγκεκριμένα
τύπη κύματος.

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi}{n\pi} L = \frac{2L}{n}$$

ή $\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$ ~ Επιτρεπόμενα τύπη κύματος
των στάσιμων κυμάτων.

• Για ένα στάσιμο κύμα η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών
επιδείξεων είναι $\frac{\lambda}{2}$. Οπότε αυτή την απόσταση θα βρούμε
η ακέραια φέρει στο μήκος L της χορδής. Δηλαδή

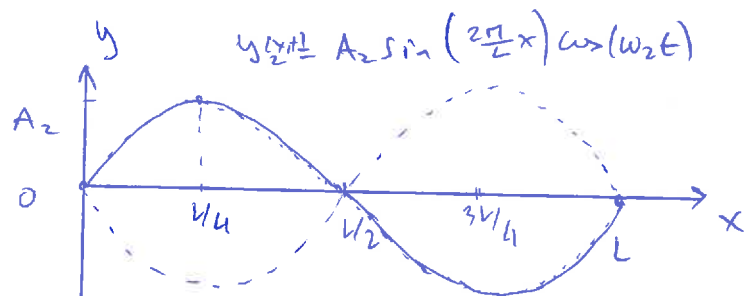
$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}.$$



$$n=1, \quad X_1(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\lambda_1 = 2L$$

$$\omega_1 = k_1 v = \frac{\pi}{L} v$$



$$n=2, \quad X_2(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$\lambda_2 = L$$

$$\omega_2 = k_2 v = \frac{2\pi}{L} v$$