

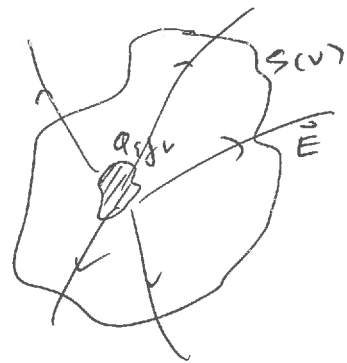
Εξισώσεις Maxwell

► Μέχρι αυτής έχουμε δει τις παρακάτω 4 εξισώσεις που περιγράφουν τα φαινόμενα της ηλεκτροστατικής και της μαγνητοστατικής:

► Νόμος Gauss

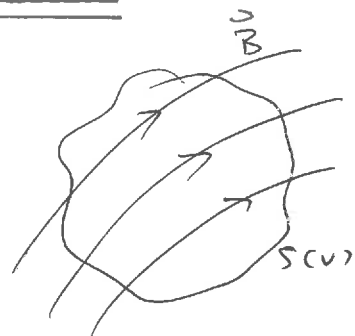
$$\oint_{S(v)} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Ανοξείδωτο (πεδίο $\vec{E}$) Αίριο (ηγείας)



► Νόμος Gauss για μαγνητισμό (όχι μονόπολο)

$$\oint_{S(v)} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$



Οι μαγνητικές ραβδίες είναι κλειστές

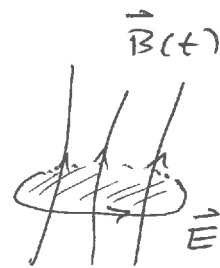
Όχι πηγή - ραβδία.

Δεν υπάρχει ούτε ένας μαγνητικός μονόπολος.

► Νόμος Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Ανοτίεση Αίριο

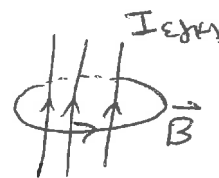


- Με $\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{a}$ η ροή του μαγνητικού πεδίου διατρείου επιφάνειας που έχει ως σύνορο τη κατεύθυνση που κυλάει.
- Το $\vec{E}$ ελκύεται σε ένα κλειστό βρόχο από τη μεταβαλλόμενη ροή του $\vec{B}$ σε αυτό το βρόχο.

► Νόμος Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{εμπ.}}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Ανοτίεση Αίριο
 (πεδίο) (ρηχή)



Ερώτηση: Αφού είδαμε ότι η μεταβαλλόμενη ροή μαγνητικού πεδίου, δημιουργεί ηλεκτρικό, τίνος ισχύει και το αντίστροφο; Μήπως, δηλαδή, και η μεταβαλλόμενη ροή ηλεκτρικού πεδίου δημιουργεί μαγνητικό;

Απάντηση: ΝΑΙ! → Maxwell

-3-

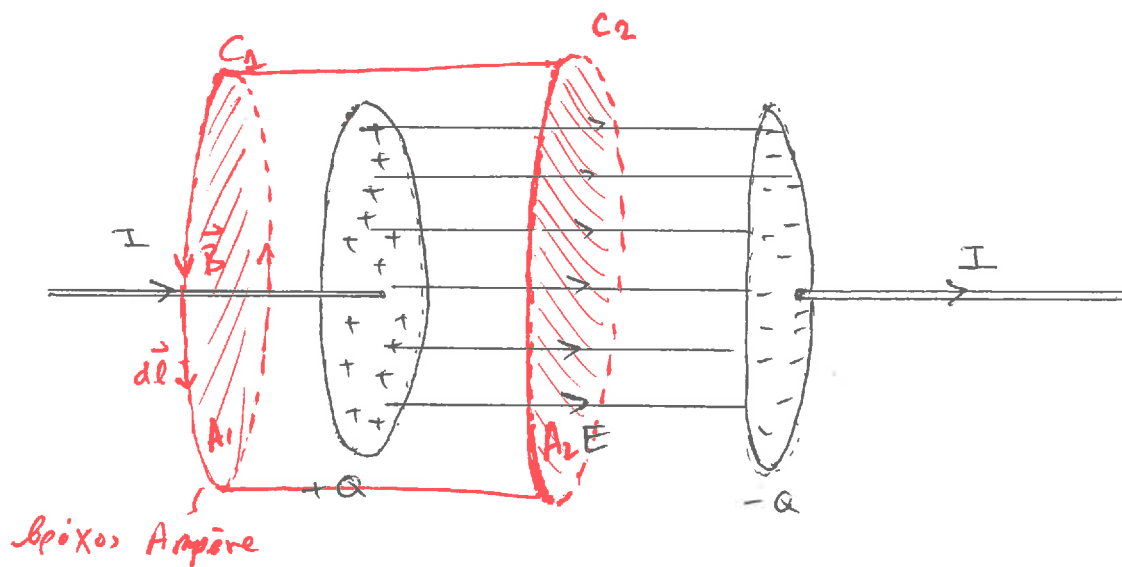
Ο Maxwell τροποποιεί τον νόμο Ampère προσδίδοντας
έναν όρο που ονομάζει ρεύμα μετατόνισης $I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

Έτσι ο νόμος Ampère-Maxwell γράφεται:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 I_d = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Δέχεται ως αίτιο (πηγή) της έντασης μαγνητικού πεδίου όχι μόνο τα πραγματικά ρεύματα, αλλά και τις μεταβολές του ρεύματος ηλεκτρικού πεδίου μέσα στο χώρο που κυλάει.

► Πως έγραψε ο Maxwell στο ρεύμα μετατόνισης;



- Θεωρείστε δύο εγωγενή αγωγούς που συνδέονται στους δύο οπλισμούς ενός πυκνωτή παράλληλων πλακών.
- Όταν μεταβάλλεται το φορτίο του πυκνωτή εμφανίζεται ρεύμα I στους αγωγούς $(I = \frac{dq}{dt})$

• Από το νόμο Ampère στη καύση C_1 έχουμε:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 I$$

• Όπου το $I_{\text{enc}} = I$ είναι το ρεύμα που διαπερνάει μια οποιαδήποτε επιφάνεια με σύνολο το ρεύμα Ampère.

• Αν διαλέξουμε ως επιφάνεια την A_1 του σχήματος είναι προφανώς I .

Αν διαλέξουμε ως επιφάνεια του ρεύμα Ampère την A_2 τότε δεν την διαπερνάει ρεύμα ($I=0$).

► Σκέψη: Γράφουμε το $I = \frac{dq}{dt}$ (όπου q το φορτίο που λείπει του πυκνωτή)

$\Rightarrow I = \frac{dq}{dt}$; Όπως για τον πυκνωτή γνωρίζουμε ότι:

$$q = C \cdot V = C \cdot E \cdot d$$

Όπου η χωρητικότητα είναι: $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$

$$\Rightarrow q = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} E d = \epsilon_0 A \cdot E$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{\epsilon_0} \right) \\ &= \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{A \epsilon_0} \cdot A \right) \\ &= \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot A \right) \\ &= \epsilon_0 \frac{d}{dt} (E \cdot A) \end{aligned}$$

Οπότε: $I = \epsilon_0 \frac{d}{dt} (E \cdot A) = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_E$

Όπου γενικεύοντας: $\Phi_E = \iint \vec{E} \cdot d\vec{a}$ για τυχόν επιφάνεια

► Ο James Clerk Maxwell ονόμασε τον όρο $\epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_E$

ως "ψευδορεύμα" ή ρεύμα μετατόπισης. $I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc.}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Με: $\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$

Σημείωση: Από την έκφραση για το ρεύμα μεταγωγής:

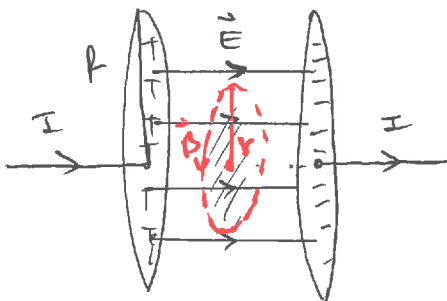
$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ πρέπει να υιοθετήσουμε την αντιστοίχηση

ακτινίου ρεύματος ως $\vec{I}_d = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$, αφού

$$I_d = \iint_S \vec{I}_d \cdot d\vec{a} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

$\vec{I}_d = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$

Εφαρμογή: Να βρούμε το μαγνητικό πεδίο ενός ακτινίου ο οποίος αντιστοιχεί από τις πάνω σχήμα δίχτυ του σχήματος.



Νόμος Maxwell: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc.}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

• Για $r < R$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_E = E \cdot \pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{q(t)}{\epsilon_0 \pi R^2} \cdot \pi r^2$$

$$= \frac{q(t)}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{q(t)}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} \frac{dq(t)}{dt} ; \text{οπότες ως } I = \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{r}{R^2} \hat{\varphi}, \quad r < R$$

• Για $r > R$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\Phi_E(t) = E(t) \cdot \pi R^2$$

$$= \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \pi R^2$$

$$= \frac{q(t)}{\pi R^2 \epsilon_0} \cdot \pi R^2$$

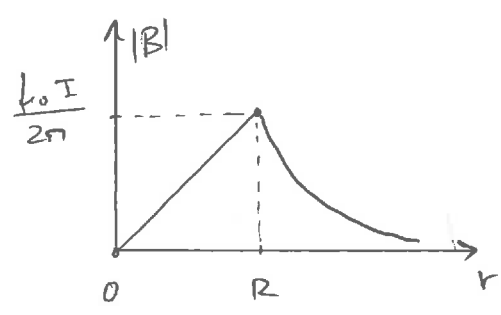
$$= \frac{q(t)}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{q(t)}{\epsilon_0} \right)$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \hat{\varphi}, \quad r > R$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \hat{\varphi}, & r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \hat{\varphi}, & r \geq R \end{cases}$$



Εξισώσεις Maxwell

$$\oiint_{S(v)} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{enc.}}}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_{S(v)} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\oint_{\mathcal{C}(S)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint_{\mathcal{C}(S)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc.}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{πεδία}}}{\text{Ανοτελειότητα}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Αντίς}}}{A_{\text{πυ}} \right)$$