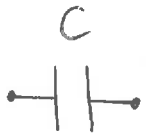


ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

► ΒΑΣΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

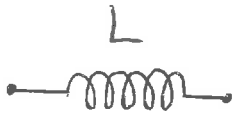


Αντίσταση $R (\Omega)$: $V = I R$



Πομπή με χωρητικότητα $C (F)$: $V = \frac{Q}{C}$

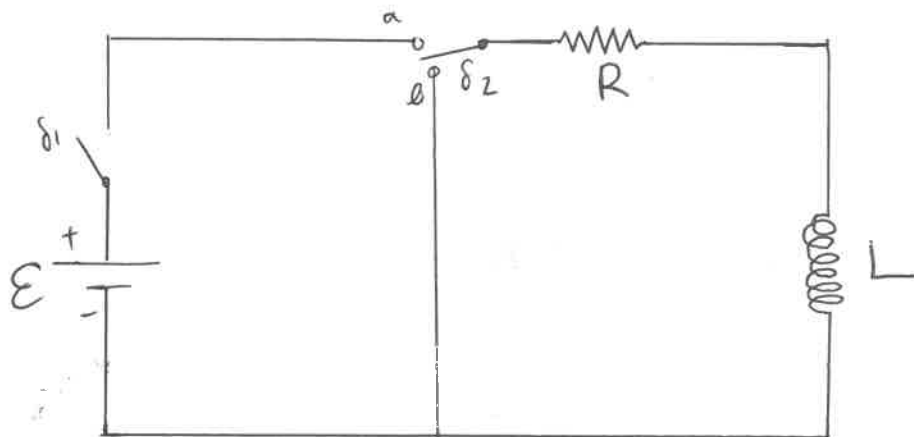
ή και $I = C \frac{dV}{dt}$



Πηνίο με αυτεπαγωγή $L (H)$: $V = L \frac{dI}{dt}$

11

ΤΟ ΚΥΚΛΩΜΑ RL



$I(t) = ?$

► Το κύκλωμα R-L περιλαμβάνει ένα πηνίο, μια αντίσταση και μια πηγή (HED) ε .

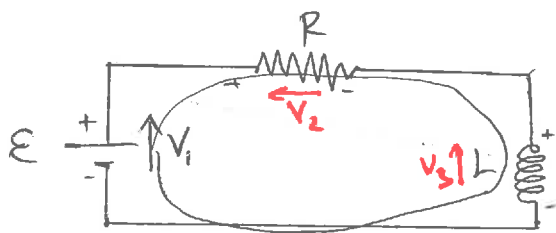
► Αρχικά ο διακόπτης δ_1 είναι ανοιχτός και ο δ_2 στη θέση α.

► Την $t=0$ κλείνουμε τον διακόπτη δ_1 και ρεύμα $I(t)$ θα αρχίσει να διαρρέει το κύκλωμα, η πηγή του οποίου θα αυξάνεται με το χρόνο.

Σχόλιο: Εάν δεν υπήρχε το πηνίο τότε σχεδόν αμέσως το ρεύμα θα ήταν αμετάβλητο: $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ σταθερό.

Τώρα που υπάρχει το πηνίο καθώς πάει να αυξηθεί το ρεύμα, δηλώνεται μια τάση εγ' επαγωγής στα άκρα του η οποία αντιστέκεται σε αυτή η μεταβολή του ρεύματος.

► Εφαρμόζοντας τον 2^ο κανόνα Kirchhoff για τις τάσεις έχουμε:



$$V_1 - V_2 - V_3 = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dI(t)}{dt} + \frac{RI}{L} - \frac{\mathcal{E}}{L} = 0 \quad (\text{Διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης, χωρίζεται μεταβλητών})$$

$$\Rightarrow \frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{L} (\varepsilon - RI)$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{R}{L} \left(\frac{\varepsilon}{R} - I \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{\left(I - \frac{\varepsilon}{R}\right)} = -\frac{R}{L} dt \quad \left(\text{Ορίζουμε να } t=0, I(0)=0 \text{ ως } t, I(t) \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{I(t)} \frac{1}{I - \frac{\varepsilon}{R}} dI = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

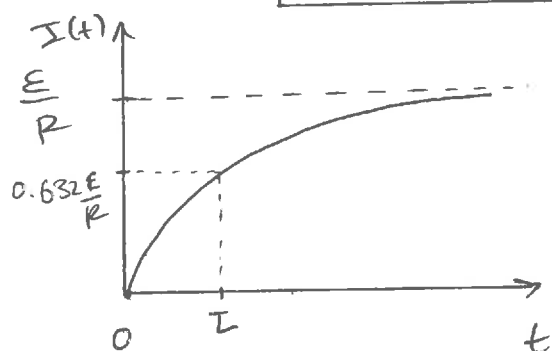
$$\Rightarrow \left[\ln \left| I - \frac{\varepsilon}{R} \right| \right]_0^{I(t)} = -\frac{R}{L} t$$

$$\Rightarrow \ln \left(I(t) - \frac{\varepsilon}{R} \right) - \ln \left(-\frac{\varepsilon}{R} \right) = -\frac{R}{L} t$$

$$\Rightarrow \ln \left[\frac{I(t) - \frac{\varepsilon}{R}}{-\frac{\varepsilon}{R}} \right] = -\frac{R}{L} t$$

$$\Rightarrow \frac{I(t) - \frac{\varepsilon}{R}}{-\frac{\varepsilon}{R}} = e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t})}, \quad t \geq 0.$$



Εάν ορίσουμε να κτιστάκα χρόνο

$$\tau = \frac{L}{R} \text{ ως κοινός τώτε}$$

σε χρόνο $t = \tau = \frac{L}{R}$ το ρεύμα έχο

$$\text{φτάει στη τιμή: } I(\tau) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-1}) = 0.632 \frac{\varepsilon}{R}$$

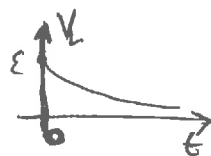
Σχόλια:

► Για $t=0 \Rightarrow I(0)=0$ ✓ λογικό, αρχικά δεν έχω ρεύμα

► Για $t \rightarrow \infty \Rightarrow I(\infty) = \frac{\varepsilon}{R}$ ✓ λογικό, έχω το γνωστό σταθερό ρεύμα

► Για $L \rightarrow 0 \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) = \frac{\varepsilon}{R}$ ✓, λογικό αφού δεν έχω πηνίο.

► Η τάση στα άκρα του πηνίου: $V_L = -\varepsilon_L = L \frac{dI}{dt} = \varepsilon \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

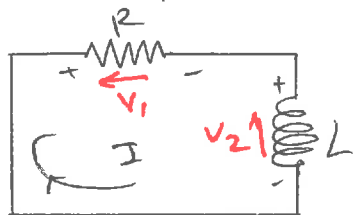


1β) Εκφόρτιση του κυκλώματος RL

Θεωρούμε ότι πηνίοι αμέτρητος χρόνος και το ρεύμα έχει γίνει $I = \frac{\varepsilon}{R}$ σταθερό.

Τότε ανοίγει ο διακόπτης S_1 , τι θα συμβεί με το $I(t)$?

► Από 2^η Νόμ Kirchhoff προφανώς θα έχουμε:



$$-V_1 - V_2 = 0$$

$$\Rightarrow -IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

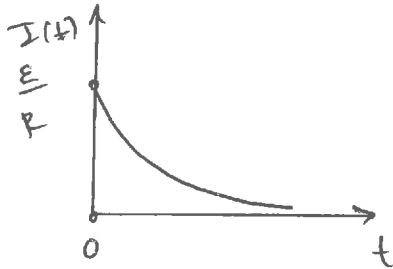
(Ολοκληρώνω από το αρχικό ρεύμα $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ που $t=0$, σε κάποιο ρεύμα $I(t)$ σε χρόνο t)

$$\Rightarrow \int_{\varepsilon/R}^{I(t)} \frac{dI}{I} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt$$

$$\Rightarrow \left[\ln |I| \right]_{\varepsilon/R}^{I(t)} = -\frac{R}{L} t$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{I(t)}{\varepsilon/R} \right) = -\frac{R}{L} t$$

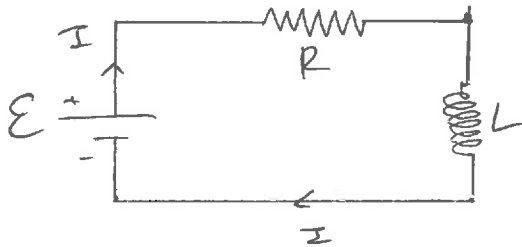
$$\Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L} t} = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$



Φαίνεται ερωτικό το δείγμα κατά την εκκίνηση.

► Ερώμα: Από που προήλθε η ενέργεια;

As παρασκευάζω το αρχικό κύκλωμα RL :



Από τον v. Kirchhoff το άθροισμα των τάσεων είναι μηδέν:

$$\varepsilon - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Για τον
λόγ
=>
στο κύκλωμα
ήχου
 $P = V \cdot I$

$$\sum I = \underbrace{I^2 R}_{\substack{\text{Ισχύς} \\ \text{τρεφής}}} + \underbrace{L I \frac{dI}{dt}}_{\substack{\text{Ενέργεια} \\ \text{που χάνεται} \\ \text{ως θερμότητα} \\ \text{στην αντίσταση} \\ \text{ανά χρόνο}}}$$

Ενέργεια που
αποθηκεύεται
στο πηνίο
ανά χρόνο

Έτσι: $P_L = I \cdot V_L = I L \frac{dI}{dt} = L I \frac{dI}{dt}$ ▼

Όπως το έργο είναι: $W = \int P \cdot dt = \int L I \frac{dI}{dt} \cdot dt = \int_0^I L I dI = \frac{1}{2} L I^2$

Επομένως η ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο είναι:

$$U = \frac{1}{2} L I^2.$$

Όμως για πηνίο που διαρρέεται από ρεύμα $I(t)$ ισχύει:

$$B = \mu_0 n I \quad \text{και} \quad L = \mu_0 n^2 V ; \quad V = \text{o όγκος του σωληνοειδούς}$$

Επομένως αν αντικαταστήσουμε έχουμε:

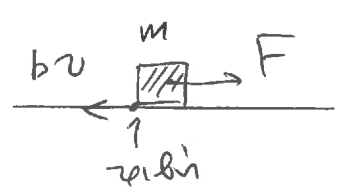
$$U = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot V$$

και μπορούμε να ορίσουμε τη γενική έκφραση για τη πυκνότητα ηλεκτρικής ενέργειας, όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο B ως:

$$u_B = \frac{U}{V} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2}$$

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ
ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ
ΜΑΓΗΤΙΚΩ
ΠΕΔΙΟΥ B

► Σχόλιο: Μηχανικό ανάλογο του RL κυκλώματος



Σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση $F = \text{παλ.}$ και δίστασε ριβή .

Νόμος Νεύτωνα: $\Sigma F = ma \Rightarrow -bv + F = m \frac{dv}{dt}$

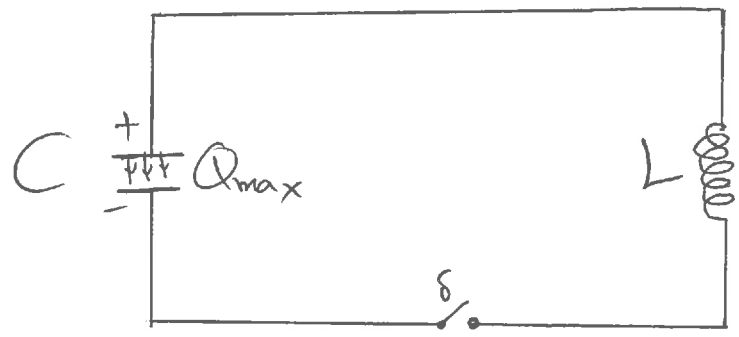
$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} + bv = F$$

Ηλεκτρικό ανάλογο $\Rightarrow L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}$

Αρα $L \leftrightarrow m$ δηλ. αδράνεια $\Leftrightarrow$ νόμος Lenz !

2)

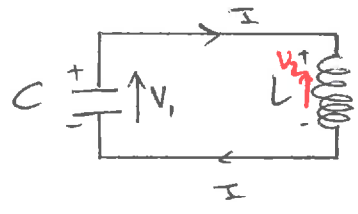
Το κύκλωμα LC



► Έστω ένας αρχικά φορτισμένος πυκνωτής με φορτίο Q_{max} .
Όταν κλείνουμε το διακόπτη δ το φορτίο του πυκνωτή θα εκφορτιστεί στο κύκλωμα.

► Υποθέτουμε ότι τα καλώδια είναι ιδανικοί αγωγοί, όπως και το πηνίο, χωρίς αντίσταση.

► την $t=0$ κλείνουμε τον δ και έχουμε:



Από 2^η Ν. Kirchhoff: $V_1 - V_2 = 0 \Rightarrow \frac{q(t)}{C} - L \frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad (1)$

Για το πηνίο που δίνει το κύκλωμα ισχύει: $I(t) = - \frac{dq(t)}{dt}$

όπου $q(t)$ το φορτίο του πυκνωτή το οποίο μειώνεται, γιατί και "-"

$\Rightarrow \frac{q(t)}{C} + L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} = 0$. Τώρα έχουμε μια άρνηση συνάρτησης I εν $q(t)$.

$\Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$ (Διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερές συντελεστές ομογενής)

-8-

Μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ η οποία
καλείται φυσική συχνότητα του συνήθους (έχει μονάδα $\frac{1}{\text{sec}}$).

Οπότε η εξίσωση γράφεται: $\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$ (Αρμονικός ταλαντωτής)

Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση με εκθετική αντικατάσταση

και έχουμε τις αρχικές συνθήκες: $q(0) = Q_{\max}$ και $\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = I(0) = 0$
(μόνο φορτίο) (όχι ρεύμα αρχικά)

Θεωρούμε λύση της μορφής: $q \sim e^{\lambda t}$ και αντικαθιστούμε:

$$(1) \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega, \text{ Άρα } q \sim e^{i\omega t} \text{ ή } e^{-i\omega t}$$

Η γενική λύση έχει μορφή: $q(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$
 A, B αυθαίρετες σταθερές.

και μπορούμε να το γράψουμε σε πραγματική μορφή ή και ως

Euler ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$)

$$\Rightarrow q(t) = A(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$

$$= (A+B)\cos(\omega t) + (iA-iB)\sin(\omega t)$$

$$= \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t)$$

Με $\tilde{A}$ και $\tilde{B}$ δύο νέες αυθαίρετες σταθερές που θα ληφθεί
από τις αρχικές συνθήκες.

Αν $q(0) = Q_{\max}$ και $\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = I_0 = 0$ έχουμε:

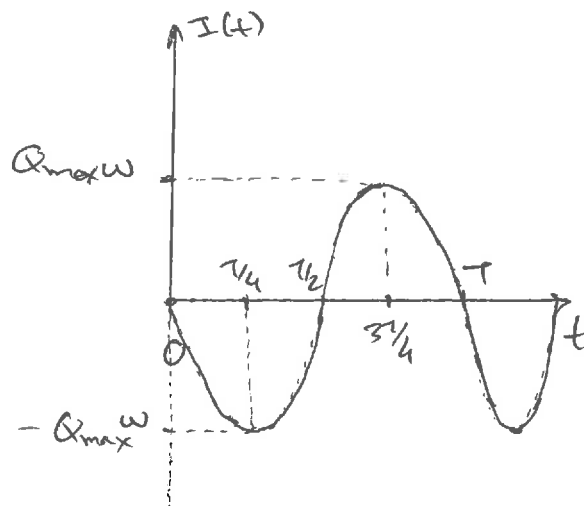
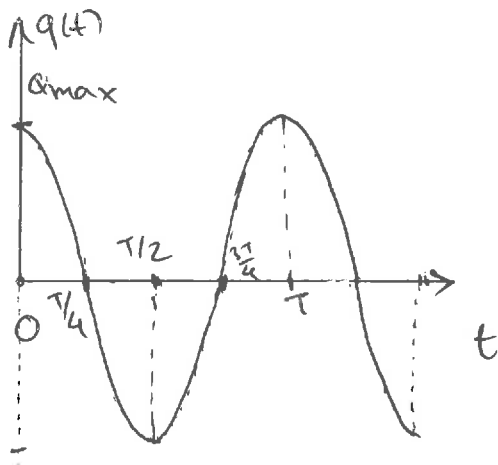
-9-

$$\begin{cases} q(t) = \tilde{A} \cos(\omega t) + \tilde{B} \sin(\omega t) \\ I(t) = \frac{dq}{dt} = -\tilde{A}\omega \sin(\omega t) + \omega \tilde{B} \cos(\omega t) \end{cases}$$

• $I(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\tilde{B} = 0}}$

• $q(0) = Q_{\max} \Rightarrow \underline{\underline{\tilde{A} = Q_{\max}}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} q(t) = Q_{\max} \cos(\omega t) \\ I(t) = -Q_{\max} \omega \sin(\omega t) \end{cases}$$

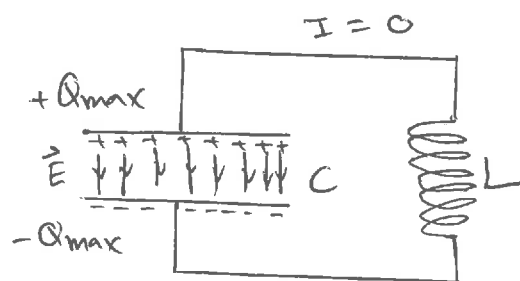


► Το φορτίο και το ρεύμα έχουν διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$.

Εξήγηση: Για την πυκνότητα ενέργειας στο κύκλωμα έχουμε:

$$\begin{aligned} U = U_E + U_B &= \frac{q^2(t)}{2C} + \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{Q_{\max}^2}{2C} \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} L Q_{\max}^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \\ \text{αν } \omega^2 &= \frac{1}{LC} &= \frac{Q_{\max}^2}{2C} [\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{Q_{\max}^2}{2C} = \varepsilon_{\text{med}} \end{aligned}$$

► Tnv $t = 0$

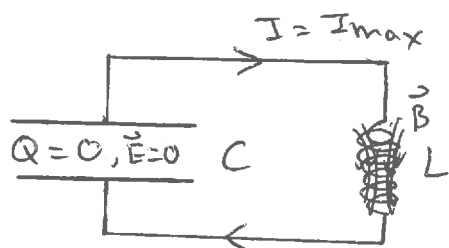


$$q(0) = Q_{\max} \rightarrow U_E = \frac{Q_{\max}^2}{2C}$$

$$I(0) = 0 \rightarrow U_B = 0$$

Όταν η ενέργεια είναι αποθηκευμένη στο πυκνωτή και καθόλου ενέργεια στο αντίο.

► Tnv $t = \frac{T}{4}$

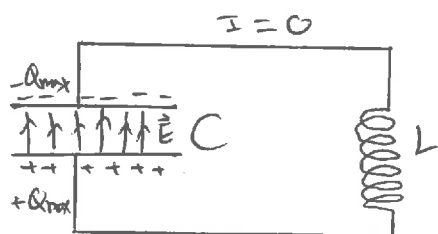


$$q(T/4) = 0 \rightarrow U_E = 0$$

$$|I(T/4)| = Q_{\max} \omega \rightarrow U_B = \frac{1}{2} L I_{\max}^2 = \frac{1}{2} L Q_{\max}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_{\max}^2}{C}$$

Όταν η ενέργεια είναι αποθηκευμένη στο αντίο και ο πυκνωτής έχει μηδενική ενέργεια.

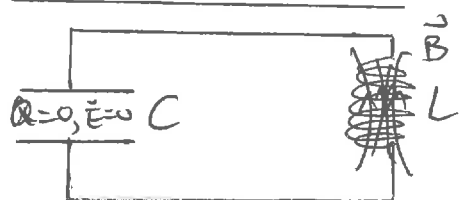
► Tnv $t = \frac{T}{2}$



$$q(T/2) = -Q_{\max} \rightarrow U_E = \frac{1}{2C} Q_{\max}^2$$

$$I(T/2) = 0 \rightarrow U_B = 0$$

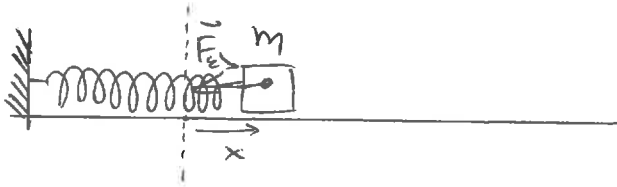
► Tnv $t = \frac{3T}{4}$



$$q(3T/4) = 0 \rightarrow U_E = 0$$

$$I(3T/4) = Q_{\max} \omega \rightarrow U_B = \frac{1}{2} L I_{\max}^2 = \frac{1}{2C} Q_{\max}^2$$

Ο ανάλυση αρμονικής ταλάντωσης:



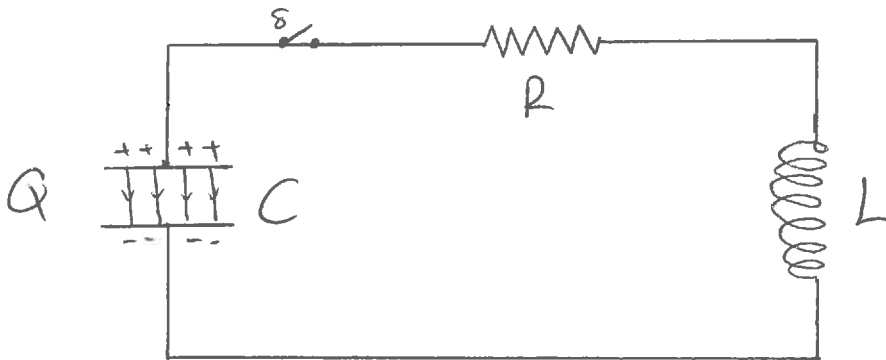
$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Στο κύκλωμα:

$$\Rightarrow L \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{C}q$$

31 Το κύκλωμα RLC

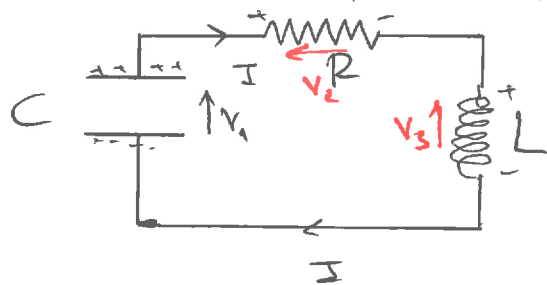


► Τα πραγματικά κυκλώματα πάντα έχουν κάποια αντίσταση R.

Επομένως, ένα μέρος της ενέργειας που έχει αρχικά το πηνίο μετατρέπεται σε θερμότητα. Η συνολική ενέργεια θα μειώνεται συνεχώς

► Θεωρούμε αρχικά φορτισμένο πυκνωτή $q(0) = Q_{\max}$, και κατόπιν πρώτα στο κύκλωμα $\frac{dq}{dt} \Big|_{t=0} = I(0) = 0$. Τον στιγμή $t=0$ κλείνουμε το διακόστη S και πρώτα διαρρέει το κύκλωμα.

➤ Από τον 2^ο νόμο Kirchhoff θα τις τάσεις έχουμε:



Για την $t=0$ θα αρχίσουν να είνε και ρεύμα:

$$V_1 - V_2 - V_3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Όπως όντως και συμβαίνει: $I = -\frac{dq}{dt}$ } $\Rightarrow$

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2 q}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad \text{Με } q(0) = Q_{\max}$$

$$\frac{dq}{dt}(0) = I(0) = 0$$

Ποιόμαστε: $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ ενοτίσω έχουμε:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \omega^2 q = 0 \quad \left(\text{Διαφωτίζει εγινωσαν 2^ο τάσης, πεττικαί}$$

οφωδενίς τε οαδενίς
σωντελενίς)

Οποιον αναζητούμε λύση τις μορφής: $q \sim e^{\lambda t}$ και φάχνουμε αν υπάρχει ρίζα $\lambda \in \mathbb{R}$ που να την ικανοποιεί.

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{R}{L} \lambda e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \omega^2 \right) e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\omega^2}}{2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \frac{R}{L} \sqrt{1 - 4\omega^2 \frac{L^2}{R^2}}}{2}$$

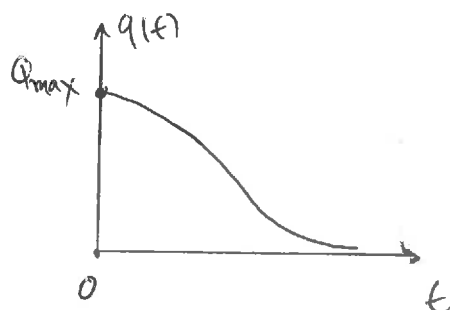
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \left[1 \mp \sqrt{1 - 4 \frac{L}{CR^2}} \right]$$

► Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) $1 - 4 \frac{L}{CR^2} > 0 \Rightarrow R > \sqrt{\frac{4L}{C}}$ (overdamped)

τότε: $q(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$

$$\Rightarrow q(t) = A e^{-\frac{R}{2L} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4L}{CR^2}} \right] t} + B e^{-\frac{R}{2L} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4L}{CR^2}} \right] t}$$



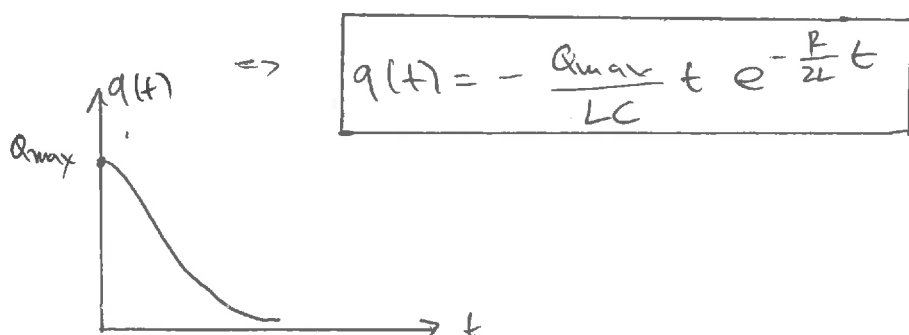
με $q(0) = q_{\max}$ και $\frac{dq}{dt}(0) = I(0) = 0$

$$\Rightarrow q(t) = \frac{q_{\max}}{\lambda_2 - \lambda_1} [\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}]$$

με $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4L}{CR^2}} \right]$

β) $1 - \frac{4L}{CR^2} = 0 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{4L}{C}}$ (critical damping)

τότε: $q(t) = A e^{\lambda_1 t} + B t e^{\lambda_2 t}$; $q(0) = q_{\max}$, $I(0) = 0$



-14-

$$b) \quad \underline{\underline{1 - \frac{4L}{CR^2} < 0 \Rightarrow R < \sqrt{\frac{4L}{C}} \text{ (unterkritisch angeschlossen)}}}$$

Lösung: $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \left[1 \pm i \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1} \right]$

$$\Rightarrow q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left[A e^{-i\omega_d t} + B e^{i\omega_d t} \right], \quad \omega_d = \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1}$$

$$\Rightarrow q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left[A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t) \right]$$

bei $t=0$ $q(0) = Q_{\max}$, $\frac{dq(t)}{dt} = I(0) = 0$

$$\Rightarrow q(t) = Q_{\max} e^{-\frac{R}{2L}t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{R}{2L\omega_d} \sin(\omega_d t) \right]$$

$\Rightarrow$ $q(t) = \tilde{Q} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_d t + \phi)$, $\tilde{Q} = Q_{\max} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{2L\omega_d}\right)^2}$

