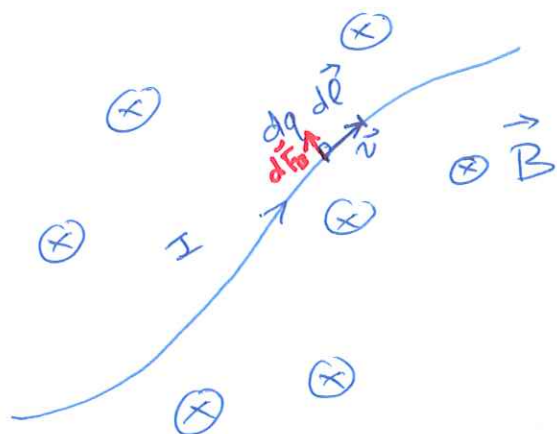


Μαγνητική δύναμη σε ευκατοφύρο αγωγό.



Κάθε κομμάτι του αγωγού δέχεται μια δύναμη Lorentz της μορφής: $d\vec{F}_B = dq (\vec{v} \times \vec{B})$, όπου $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$

$$\Rightarrow d\vec{F}_B = dq \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \right)$$

$$= \frac{dq}{dt} (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad , \quad \text{όπου εξ' ορισμού} \quad I \equiv \frac{dq}{dt}$$

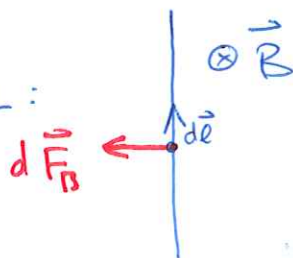
$$\Rightarrow d\vec{F}_B = I (d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_B = \int I (d\vec{l} \times \vec{B})} \quad (1)$$

Σχόλιο: Προφανώς το παραπάνω ο νόημα είναι δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά, καθώς είναι διανυσματικό και η κατεύθυνση μπορεί να έχει πωχάιο αήθη (εφ' όσον με κάποια παρατηρητικό είναι φερόμενο)

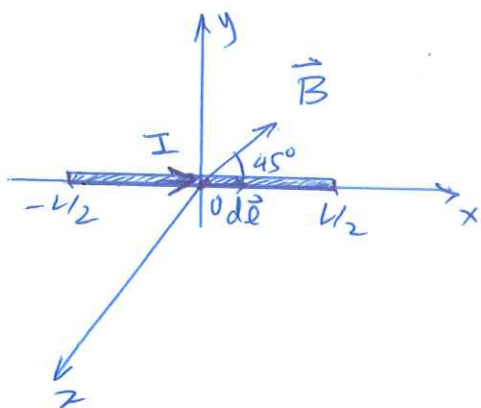
Εάν έχουμε ευθύγραμμο αγωγό μήκους L :

$$|d\vec{l} \times \vec{B}| = dl \cdot B$$



Τότε: $(1) \Rightarrow \boxed{|\vec{F}_B| = BIL}$
 $\therefore \vec{F}_B = I \vec{L} \times \vec{B}$

Άσκηση: Ευθύγραμμος αγωγός μήκους $L = 1\text{m}$ διαρρέεται από ρεύμα $I = 40\text{A}$ παρουσία ομογενούς μαγνητικού πεδίου $|\vec{B}| = 1.2\text{T}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί η συνολική δύναμη στον αγωγό.



Απάντηση:

Δίνεται: $\vec{B} = 1.2 \cos(\pi/4) \hat{x} + 1.2 \sin(\pi/4) \hat{y}$

$$d\vec{l} = dx \hat{x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\vec{F}_B &= I (d\vec{l} \otimes \vec{B}) = I [(dx \hat{x}) \otimes (1.2 \cos(\pi/4) \hat{x} + 1.2 \sin(\pi/4) \hat{y})] \\ &= I \cdot 1.2 \sin(\pi/4) dx \hat{x} \otimes \hat{y} \\ &= 40 \cdot 1.2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} dx \hat{z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\vec{F}_B = 24\sqrt{2} dx \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_B = \int_{-1/2}^{1/2} 24\sqrt{2} dx \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_B = 24\sqrt{2} L \hat{z}$$

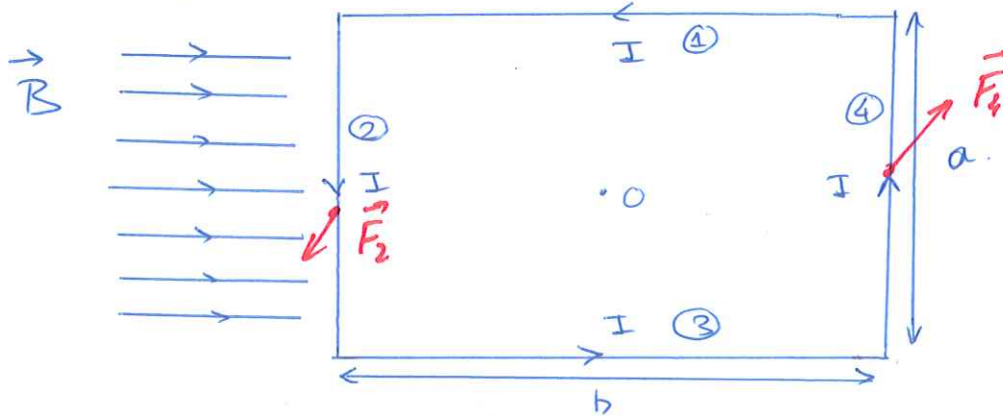
$$\Rightarrow \vec{F}_B = 24 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_B = 33.9 \hat{z}}$$

Ροπή ρεωματοφόρου ορθογώνιου βρόχου

-3-

Ο ορθογώνιος βρόχος του σχήματος διαρρέεται από ρεύμα I .

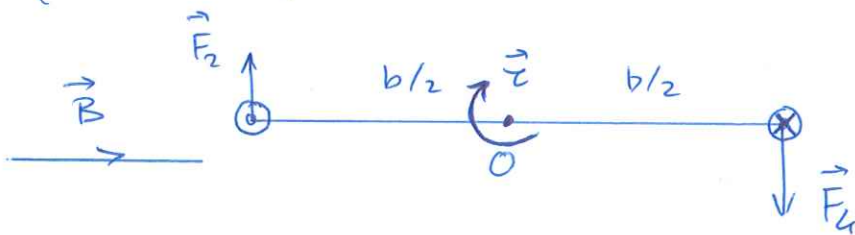


► Στις πλευρές ① και ③ $\vec{F}_1 = \vec{F}_3 = 0$ αφού το ρεύμα ροιόρρητο με το $\vec{B}$.

► Στις πλευρές ② και ④ : $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = B I a$

Η κατεύθυνση της $\vec{F}_4$ είναι προς τα μέσα ενώ η κατεύθυνση της $\vec{F}_2$ είναι προς τα έξω.

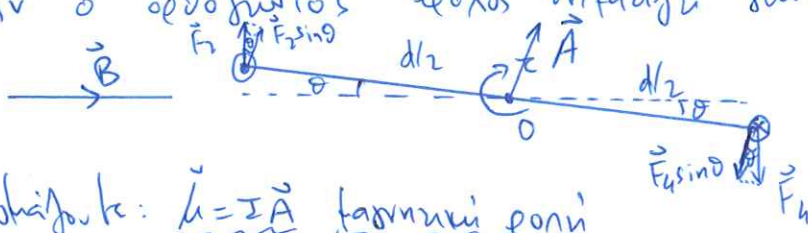
► Εφαρμόζονται σε διαφορετικές πλευρές, επομένως δημιουργούν ροπή ως προς το O .



• Η συνολική ροπή που ασκείται στον ορθογώνιο βρόχο είναι:

$$\tau_{\max} = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \cdot \frac{b}{2} = B I a \frac{b}{2} + B I a \frac{b}{2} = B \cdot I \cdot A, \text{ όπου } A = ab \text{ εμβαδό ηαυρού.}$$

• Αν ο ορθογώνιος βρόχος κλίνει γωνία θ με το $\vec{B}$ θα είναι:



$$\tau_{\max} = F_2 \sin \theta \frac{b}{2} + F_4 \sin \theta \frac{b}{2} = B I A \sin \theta$$

Ολοκληρώνουμε: $\vec{\mu} = I \vec{A}$ ταυτισμένη ροπή

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = I \vec{A} \times \vec{B}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}}$$

Ο νόμος του Biot-Savart

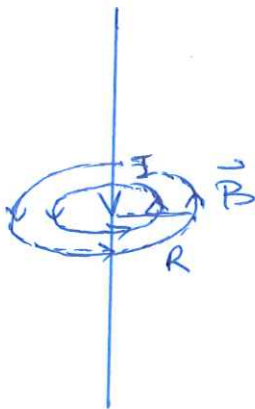
-4-

Ός συχνής είχατε κάποιο $\vec{B}$ δομένο και μετεωρίζατε τις δυνάμεις που δέχονται φορτία που κινούνται μέσα σε αυτό $\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$ κ.τ.π.

Δεν μιλούσαμε όμως για το πως προκύπτει το $\vec{B}$ από κινούμενα φορτία.

► Ας θυμηθούμε το πείραμα με το σύρμα το οποίο διαρρέεται από ρεύμα I . Από την πλευρά μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ (πείραμα Oersted).

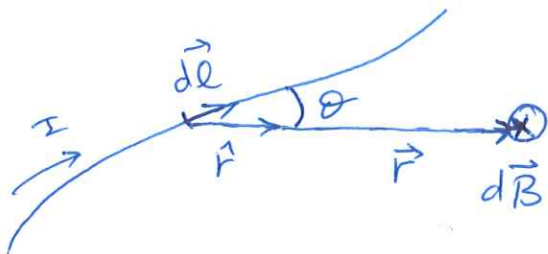
Από το ίδιο πείραμα παραμερούμε ότι $B \propto \frac{I}{R}$, όπου R η απόσταση από το σύρμα.



$$|\vec{B}| \propto \frac{I}{R} \text{ (πείραμα)}$$

Για να βγάλει η αναλογία από το συνολικό $B \propto \frac{1}{R}$ θα πρέπει κάθε κομμάτι με ρεύμα I να είναι: $dB \propto \frac{1}{R^2}$, ώστε όταν ολοκληρωθεί να δώσει $B \propto \frac{1}{R}$. Επίσης η φορά είναι $\vec{B} \propto d\vec{\ell} \times \hat{r}$.
Επίσης από πείραμα.

Σύνοψη: Μαζεύουμε τα παραπάνω και διατυπώνουμε το νόμο του Biot-Savart:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}}$$

N. Biot-Savart.

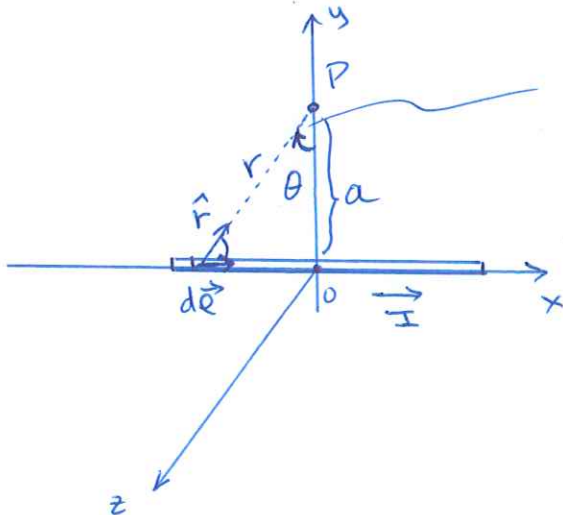
► Χαρακτηριστικά μαγνητικού πεδίου που παράγεται από στοιχειώδες ρευματοφόρο αγωγό:

- Το μέτρο του είναι ανάλογο του ρεύματος και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης
- Η κατεύθυνσή του είναι κάθετη στο στοιχειώδες μήκος $d\vec{\ell}$, καθώς και στο μοναδιαίο διάνυσμα θέσης $\hat{r}$.
- Το μέτρο του είναι ανάλογο του $\sin\theta$ της γωνίας μεταξύ $d\vec{\ell}$ και $\hat{r}$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} ; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

Εφαρμογές του νόμου Biot-Savart.

Εφαρμογή 1: Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού.



Ορίζουμε τη γωνία θ να είναι μηδέν όταν $x=0$ και να αυξάνει κατά το βέλος, δηλ. όταν ανοίγει προς τα αριστερά.

Θέλουμε να βρούμε το $\vec{B}$ στο σημείο P. Ξεκινάμε από το

στοιχειώδες $d\vec{B}$ από κομμάτιού σε σχήμα. $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$

Έχουμε: $d\vec{\ell} \times \hat{r} = |\vec{\ell}| |\hat{r}| \sin\phi \hat{z} = dx \sin(\pi/2 - \theta) \hat{z} = dx \cos\theta \hat{z}$

$$r^2 = x^2 + a^2$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{x^2 + a^2} dx \hat{z} \quad (1)$$

Προσοχή: Εδώ πρέπει να εκφράσουμε τα πάντα μέσω μιας κοινής μεταβλητής. Ας πω το x αλλάζει με θ ή η θ αλλάζει με το x . Διακρίνουμε να τα εκφράσουμε όλα με θ . Έτσι από τρίγωνο: $\tan\theta = -\frac{x}{a}$

$$\Rightarrow x = -a \tan\theta$$

$$dx = \frac{-a}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$\text{και: } r^2 = x^2 + a^2 = a^2 (\tan^2\theta + 1) = a^2 \sec^2\theta = \frac{a^2}{\cos^2\theta}$$

$$(1) \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{\frac{a^2}{\cos^2\theta}} \cdot \frac{(-a) d\theta}{\cos^2\theta} \hat{z}$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos\theta d\theta \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta \hat{z}, \quad \text{τε } \theta_1 \text{ η γωνία του αριστερού άκρου και } \theta_2 \text{ η γωνία του δεξιού άκρου.}$$

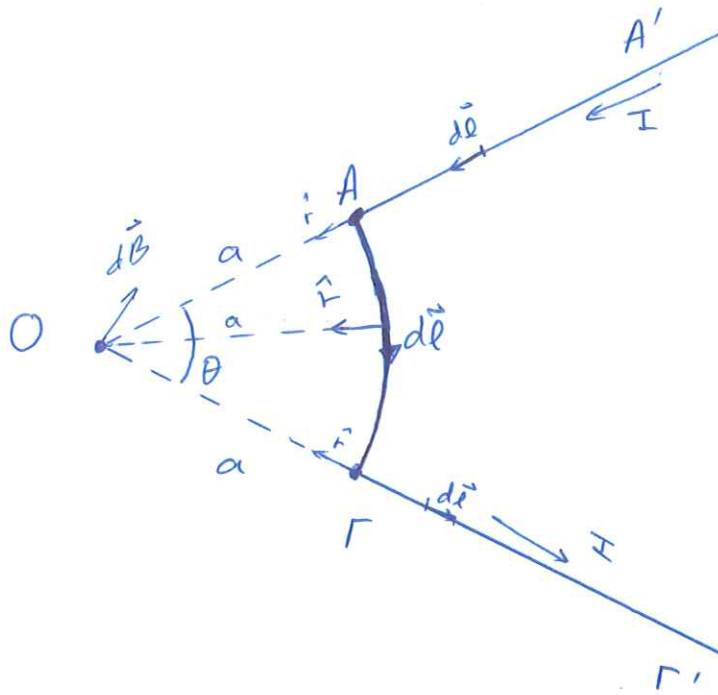
$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)] \hat{z}}$$

► Για άπειρο εύχρηστο αγωγό: $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{z}}$$

Εφαρμογή 2:

Μαγνητικό πεδίο καμυλωτού σύρματος



» Έστω ο αγωγός $A'-A-\Gamma-\Gamma'$ ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I , βρείτε το $\vec{B}$ στο O .

» Τα τμήματα $A'-A$ και $\Gamma-\Gamma'$ δίνουν μηδενικά συνεισφορές αφού $d\vec{\ell} \parallel \hat{r} \Rightarrow d\vec{\ell} \times \hat{r} = 0$.

» Για το τμήμα $A-\Gamma$ έχουμε: $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$

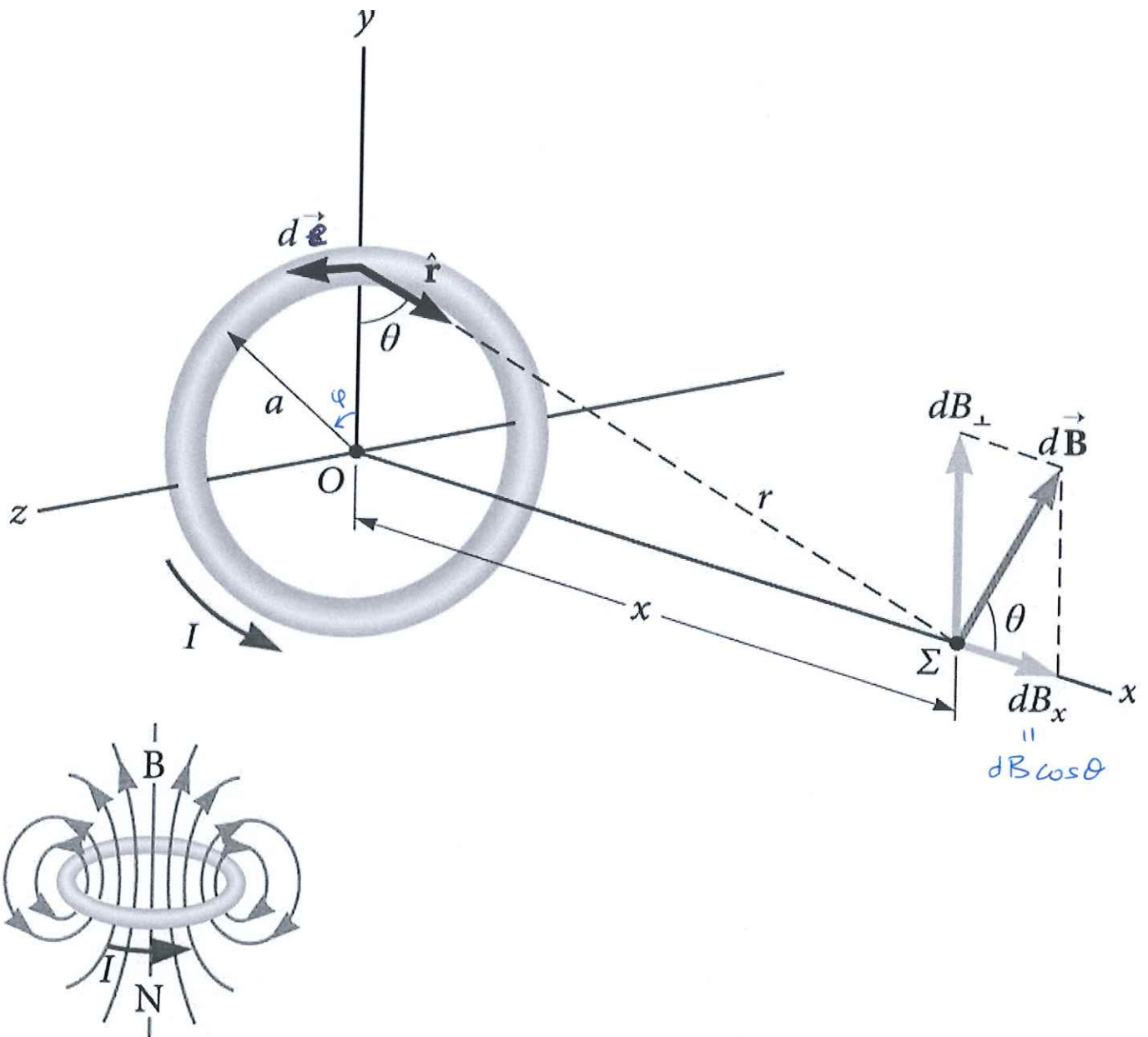
$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\vec{\ell}| |\hat{r}| \sin(\pi/2)}{a^2} \hat{z} \quad ; \quad d\ell = a d\theta$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} a \cdot d\theta \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{\theta} d\theta \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \theta \hat{z}}$$

Εφαρμογή 3: Μαγνητικό πεδίο κυκλικού ρεύματος συν δ'ζονα' του. -8-



• Λόγω συμμετρίας το $dB_{\perp}$ θα εξουδετερωθεί από όσες τις αντιστοιχείς έχουν από το ρεύμα.

• Στο σημείο Σ έχουμε: $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$
 $(d\vec{\ell} \times \hat{r}) = d\ell \sin(\frac{\pi}{2}) = d\ell$

Όμως:
$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell \cos\theta}{r^2} \hat{x}$$

Όμως: $d\ell = a d\varphi$
 $r^2 = x^2 + a^2$

$$\Rightarrow dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi(a^2 + x^2)} \cos\theta a d\varphi \hat{x}$$

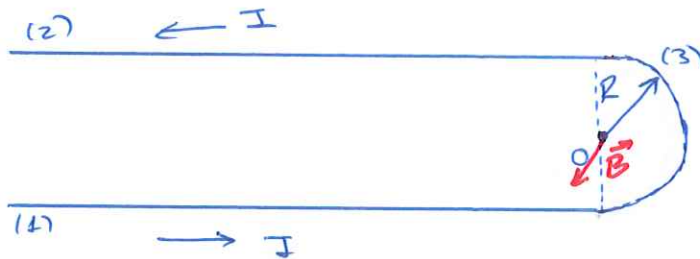
$$\Rightarrow \text{Όμως } \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \int d\vec{B}_x = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi(x^2+a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \hat{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{B}_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}} \hat{x}}$$

και για $x=0$, παίρνουμε $\boxed{|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2a}}$, στο κέντρο του κύκλου.

Εφαρμογή 4: Μαγνητικό πεδίο κεκατμένου σήματος.



Θέλουμε να βρούμε το $\vec{B}$ στο κέντρο O ενός κεκατμένου σήματος.

⇒ Θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα από τις προηγούμενες εφαρμογές.

• Από εφαρμογή 1 μπορούμε εύκολα να βρούμε το πεδίο στο O ως πεδίο ενός ημιανέμου εαυτογενούς αγωγού (1) + το πεδίο ενός άλλο ημιανέμου αγωγού του (2). Οπότε από (1) και (2)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{B}_{(1)} + \vec{B}_{(2)} &= 2 \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)] \hat{z}, \text{ με } \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = 0 \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{z} \end{aligned}$$

• Από εφαρμογή 2 το $\vec{B}_{(3)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \theta \hat{z}$, με $\theta = \pi$

$$= \frac{\mu_0 I}{4R}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_{(1)} + \vec{B}_{(2)} + \vec{B}_{(3)} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \hat{z}$$