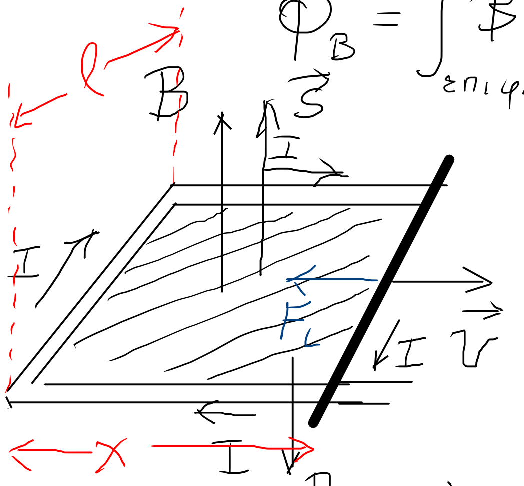
Εφαρμογές νόμου Faraday (συνέχεια)

$$\oint_{\text{κλειστή καμπύλη}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

← ροή Μ.Π. σε ανοικτή επιφάνεια με όριο την καμπύλη

(4η εξίσωση Maxwell)

$$\Phi_B = \int_{\text{επιφάνεια}} \vec{B}\cdot d\vec{S}$$



$$\Phi_B = B\,l\cdot x \quad \text{και} \quad \frac{d\Phi_B}{dt} = B\cdot l\cdot\frac{dx}{dt} = B\,l\,v$$

Πάνω στην κινούμενη ράβδο εφαρμόζεται δύναμη (Lorenz) εξαιτίας του Μ.Π. $\vec{B}$

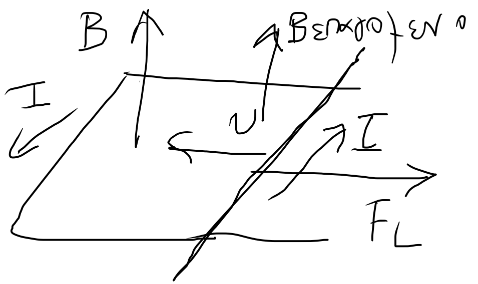
$F_L = \int d\vec{F} = \int I(d\vec{l}\times\vec{B}) = IlB$ επομένως για να μπορεί η ράβδος να διατηρεί ταχύτητα $\vec{v}$ θα πρέπει να εφαρμόζω μια δύναμη αντίθετη από την δύναμη F_L, δηλ. να τραβάω

Αφού τραβάω με δύναμη $I\ell B$ παράγω έργο και η ενέργεια που δίνω καταναλώνεται υπό μορφή θερμότητας $I^2 \cdot R$.

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \cancel{I}\ell B \cdot v = \mathcal{E} \cdot \cancel{I} \Rightarrow \mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \ell B \cdot v$$

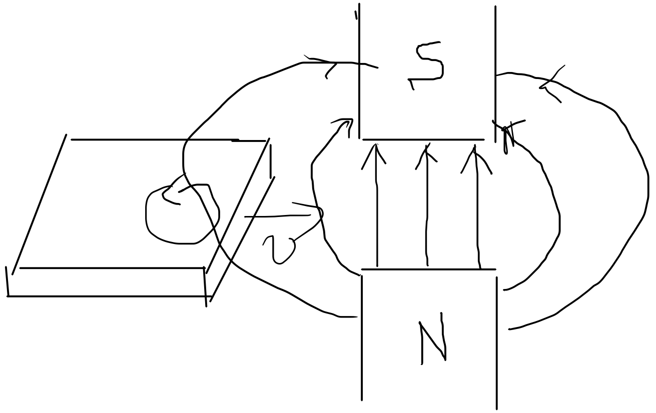
Δηλ. βρήκα την τιμή του $\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ χωρίς να κάνω το ολοκλήρωμα.

Αν η ταχύτητα είχε αντίθετη διεύθυνση το Βεπαγόμενο θα



έπρεπε να έχει ίδια φορά με το B και άρα το ηλ. πεδίο να δημιουργεί ρεύμα αντίθετης φοράς. Η δύναμη Lorenz θα ήταν αντίθετη και θα έπρεπε να σπρώχνω για να διατηρεί ταχύτητα v η ράβδος.

Δινορεύματα (Eddy current)



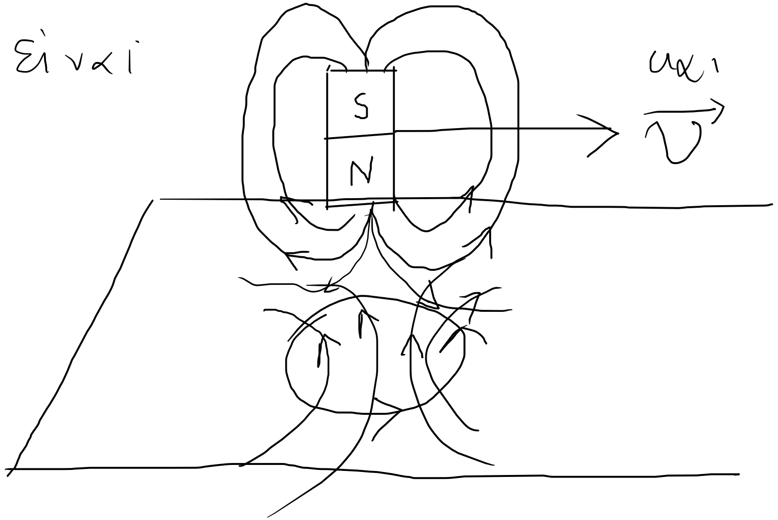
Αν έχω ένα κομμάτι μέταλλο να μπαίνει μέσα στο Μ.Π. ή να βγαίνει από αυτό, η ροή του Μ.Π. στο μέταλλο αυξάνεται ή μειώνεται αντίστοιχα. Τότε στο μέταλλο αναπτύσσεται ηλεκτρικό πεδίο τέτοιο ώστε να δημιουργεί ρεύμα που να δημιουργεί Μ. πεδίο που να αντιτίθεται στην μεταβολή.

Αυτό το ρεύμα που δημιουργείται δημιουργεί θερμότητα, γιατί καταναλώνεται ισχύς: $P = \mathcal{E} \cdot I$ $\left(\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}\right)$ Αυτό μειώνει την ταχύτητα με την οποία μπαίνει μέσα το μέταλλο, γιατί η δύναμη Lorenz αντιτίθεται στην ταχύτητα.

Αυτό λέγεται μαγνητική πέδηση (φρενάρισμα)

Μαγνητική αιώρηση (Magnetic Levitation) (αρχή λειτουργίας των Τραίνων maglev)

Θυμηθείτε ότι δύο ίδιοι πόλοι απωθούνται. Το μ.π. ενός διπόλου είναι



και έστω ότι κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ πάνω από ένα μεταλλικό επίπεδο. Η μεταβαλλόμενη $\Phi_{ΜΠ}$ δημιουργεί κυκλοφορία ρεύματος επάνω στον επίπεδο αγωγό, που προσπαθεί να δημιουργήσει ίσο και αντίθετο Μ.Π. έτσι ώστε να μηδενίσει την αλλαγή. Τα δύο ίσα και αντίθετα Μ.Π. δημιουργούν άπωση μεταξύ τους. Αν ο μαγνήτης σταματήσει να κινείται, τα ρεύματα στον αγωγό θα σβήσουν, γιατί υπάρχει αντίσταση R στον αγωγό.

Ένας άλλος τρόπος να δημιουργηθεί άπωση είναι με την χρήση πηνίου το οποίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα.

Αυτεπαγωγή

Η ικανότητα ενός κυκλώματος να αντιστέκεται στην αλλαγή της μαγνητικής ροής που δημιουργεί το ίδιο λέγεται αυτεπαγωγή.
Δηλ. ένα ηλεκτρικό κύκλωμα διαρρέεται από μεταβαλλόμενο ρεύμα. Το μεταβαλλόμενο ρεύμα δημιουργεί μεταβαλλόμενο Μ.Π. Τό ίδιο το κύκλωμα «αποκόπτει» μια μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή και άρα σε αυτό αναπτύσσεται μια ηλεκτρεγερτική δύναμη ($\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$), μια τάση που αντιστέκεται στη μεταβολή.

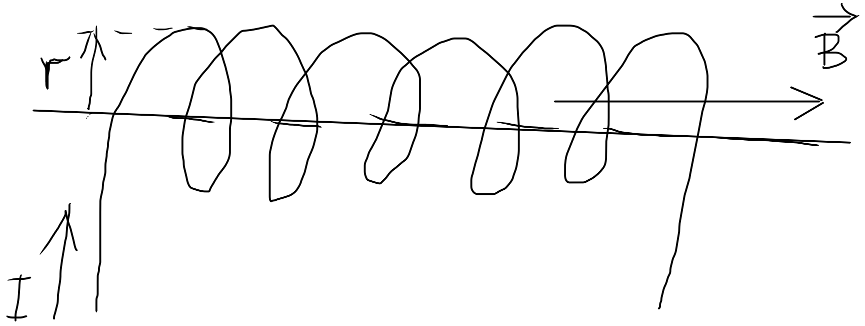
Η μαγνητική ροή που δημιουργείται από το Μ.Π. πού παράγει το κύκλωμα εξαιτίας του ρεύματος που το διαρρέει είναι προφανώς ανάλογη αυτού του ρεύματος (π.χ 2πλάσιο ρεύμα → 2πλάσιο Μ.Π. → 2πλάσια ροή)

Δηλ. $\Phi_{ΜΠ} = L \cdot I$ $\quad [L] = \frac{T/m^2}{A} = H$ (Henry) $\quad L$: αυτεπαγωγή.

Νόμος Faraday: $(\mathcal{E}) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_{ΜΠ}}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$

Η αυτεπαγωγή εξαρτάται από την γεωμετρία του κυκλώματος, δηλ. από την ροή του Μ.Π. που αποκόπτει λόγω της μορφής του.

Έτσι αν έχουμε ένα πηνίο: με ακτίνα r το μαγνητικό πεδίο



$\vec{B}$ στο εσωτερικό του έχει τιμή

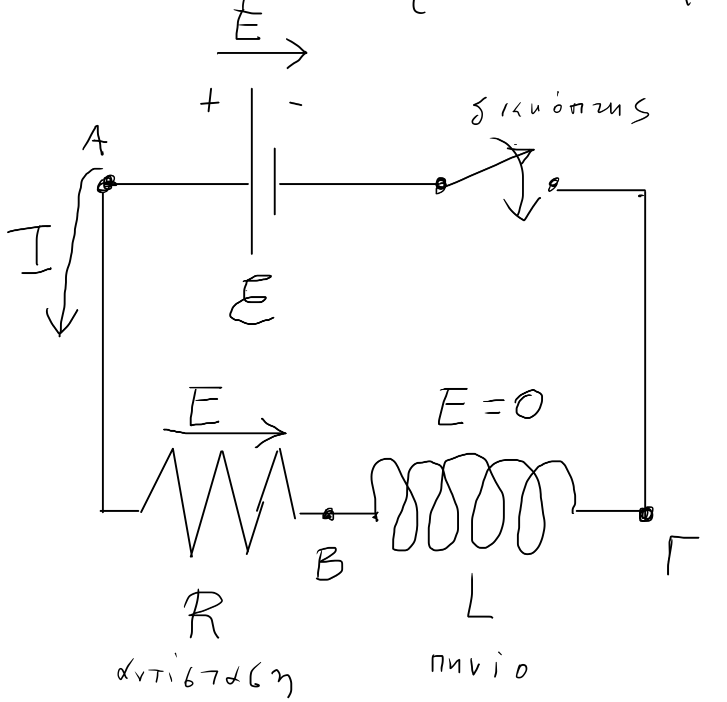
$$B = \mu_0 I \frac{N}{\ell}$$

όπου N ο αριθμός σπειρών και ℓ το μήκος του. Το εμβαδόν κάθε σπείρας είναι $\pi \cdot r^2$. Αφού έχουμε N σπείρες, το συνολικό εμβαδόν είναι $N\pi r^2$. Η ροή του Μ.Π. που «αποκόπτει» το πηνίο είναι

$$\Phi_{\mu\pi} = B \cdot N\pi r^2 = \mu_0 I \frac{N}{\ell} N\pi r^2 = L \cdot I \text{ δηλ.}$$

$$L = \pi r^2 \frac{N^2}{\ell} \mu_0$$

Ας δούμε τώρα το παρακάτω κύκλωμα:



Για $t=0$ το ρεύμα είναι 0. Κλείνω τον διακόπτη και το ρεύμα πάει να γίνει $\frac{\mathcal{E}_{\text{μπαταρίας}}}{R}$ αλλά το πηνίο L "αντιστέκεται". Εφαρμόζοντας τον νόμο Faraday έχουμε

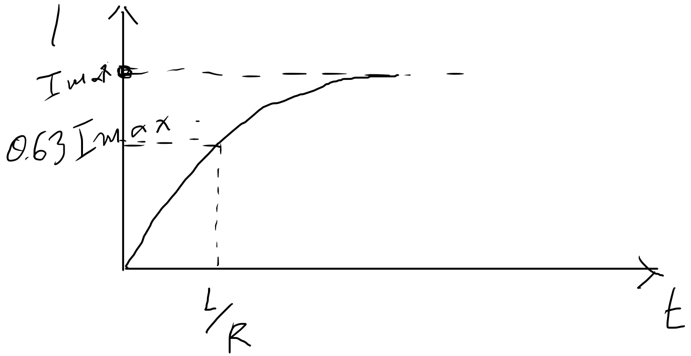
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I\cdot R - \mathcal{E}_{\text{μπαταρίας}} = -L\frac{dI}{dt}$$ δηλ.

$$\mathcal{E}_{\text{μπαταρίας}} - \underbrace{L\frac{dI}{dt}}_{\text{επαγόμενη ΗΕΔ που αντιτίθεται στην ΗΕΔ της μπαταρίας}} = I\cdot R$$ Αυτό δίνει την διαφορική εξίσωση:

$L\frac{dI}{dt} + I\cdot R - \mathcal{E}_{μπαταρίας} = 0$ που έχει λύση

$$I = I_{max}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad I_{max} = \frac{\mathcal{E}_{μπαταρίας}}{R}$$



$t = 0$, $I = 0$

$t = \frac{L}{R}$, $I = 0.63 \cdot I_{max}$

$t \to \infty$, $I = I_{max}$

Αν ξαφνικά αντικαταστήσω την μπαταρία με βραχυκύκλωμα δηλ. $\mathcal{E}_{μπατ.} = 0$, η αυτεπαγωγή θα αντιδράσει στην μεταβολή του ρεύματος, που θα θέλει να γίνει 0 από I_{max}

Έτσι αν στην διαφορική εξίσωση αντικαταστήσουμε το $\mathcal{E}_{μπαταρίας}$ με 0 και βάλουμε $I(t=0) = I_{max}$ θα έχουμε

$$I = I_{max}\, e^{-\frac{R}{L}t}$$ που για

$t = 0$ $I = I_{max}$

$t = \frac{L}{R}$ $I = 0.37\, I_{max}$

$t \to \infty$ δίνει $I = 0$

Το ρεύμα καθώς σβήνει παράγει θερμότητα πάνω στην αντίσταση. Η θερμότητα είναι Ισχύς επί χρόνος δηλ.

$$\int_{t=0}^{\infty} I^2 \cdot R \cdot dt = \int_{t=0}^{\infty} \left(I_{max} e^{-R/L\, t}\right)^2 R\, dt = I_{max}^2 R \int_{t=0}^{\infty} e^{-\frac{2R}{L} t} dt =$$

$$= I_{max}^2 \cdot R \cdot \frac{L}{2R} = \frac{1}{2} L I_{max}^2$$

Αυτή η θερμότητα πού παράγεται είναι η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη μέσα στο Μ.Π.

Μπορώ να βρώ την "πυκνότητα ενέργειας" του Μ.Π. χρησιμοποιώντας την $\frac{1}{2} L I_{max}^2$

το $\int_0^{\infty} e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{\alpha x} d(\alpha x) =$

$= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} (e^{\alpha x})' d(\alpha x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \Big|_0^{\infty} =$

$= \frac{1}{\alpha} \left(\underset{x \to \infty}{e^{\alpha x}} - e^{\alpha \cdot 0} \right) =$

$\frac{1}{\alpha} (0 - 1) = -\frac{1}{\alpha}$

αν α<0 το $\underset{x\to\infty}{e^{\alpha x}} \to 0$

Πυκνότητα Ενέργειας Μαγν. Πεδίου

αντικαθιστω το I_{max} με το B χρησιμοποιώντας το

$$B = \mu_0 I \frac{N}{\ell} \quad \delta\eta\lambda \quad I = \frac{B}{\mu_0} \cdot \frac{\ell}{N} \quad \text{και} \quad I^2 = \frac{B^2}{\mu_0^2} \frac{\ell^2}{N^2}$$

Ενώ $L = \pi r^2 \frac{N^2}{\ell} \mu_0$ οπότε η ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα είναι

$$\frac{1}{2} \pi r^2 \frac{\cancel{N^2}}{\cancel{\ell}} \cancel{\mu_0} \frac{B^2}{\cancel{\mu_0^2}} \frac{\cancel{\ell^2}}{\cancel{N^2}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cdot \pi r^2 \ell$$

$\pi r \ell^2$ είναι ο όγκος που καταλαμβάνει το Μ.Π. του πηνίου

έτσι $\frac{\text{Ενέργεια}}{\text{Όγκος}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad J/m^3$ (Για το ηλ. πεδίο ήταν $\frac{1}{2} \varepsilon_0 k E^2$)

Στην περίπτωση του Ηλ. Πεδίου η ενέργεια του αντιπροσωπεύει το έργο που πρέπει να παράξω για να βάλω τα φορτία σε μία συγκεκριμένη διάταξη.

Στην περίπτωση του Μ.Π. η ενέργεια αντιπροσωπεύει το έργο που πρέπει να παράξω για να υπερνικήσω την αντίδραση της αυτεπαγωγής στην ανάπτυξη ρεύματος μέσα από αυτή.

Δηλ. Ενώ η αυτεπαγωγή δεν έχει αντίσταση, ωστόσο θα αντισταθεί στην προσπάθεια να μεγαλώσω ή να μικρύνω το ρεύμα, επομένως πρέπει να παράξω έργο.