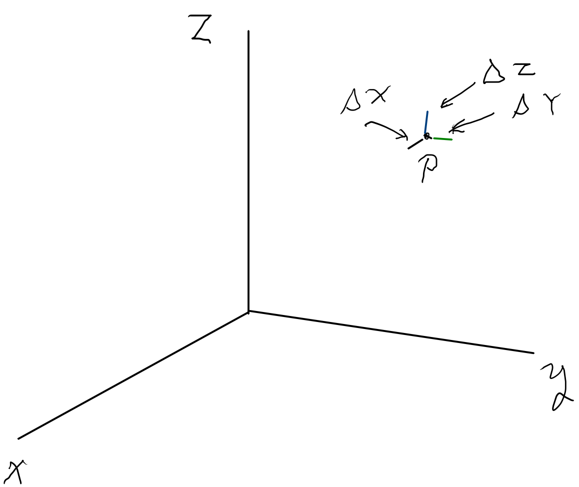
"Όταν κινούμαστε επάνω σε μία ισοδυναμική επιφάνεια από το σημείο A προς το σημείο B, προφανώς $V_A - V_B = 0$ αφού $V_A = V_B$. Άρα $0 = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$. Αφού το $\vec{E}$ δεν είναι 0, ο μόνος τρόπος για να έχουμε το αποτέλεσμα $\vec{E}\cdot d\vec{r} = E\,dr\,\text{συν}\theta = 0$ είναι να ισχύει $\text{συν}\theta = 0$ δηλ $\theta = \frac{\pi}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο σε κάθε σημείο μιας ισοδυναμικής επιφάνειας



Έστω ότι στο σημείο $P = (x_0, y_0, z_0)$ το δυναμικό $V_P = V(x_0, y_0, z_0)$ έχει μια τιμή. Αν κάνω ένα πολύ μικρό βήμα Δx παράλληλα στον x άξονα και το V δεν αλλάξει, αυτό θα σημαίνει ότι το $\vec{E}$ είναι κάθετο στο Δx άρα η συνιστώσα $E_x = 0$. Αν αλλάξει, τότε, όπως έχουμε πει, $E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}$. Το ίδιο ισχύει και αν κάνω ένα πολύ μικρό Δy η Δz. Άρα το

$\vec{E}$ στο σημείο $P=(x_0,y_0,z_0)$ έχει

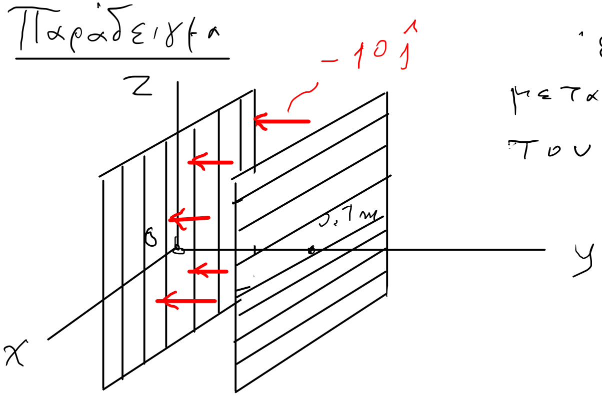
$$E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}\Bigg|_{\substack{y,z \text{ σταθερά} \\ (y_0,z_0)}}, \quad E_y = -\frac{\Delta V}{\Delta y}\Bigg|_{\substack{x,z \text{ σταθερά} \\ (x_0,z_0)}}, \quad E_z = -\frac{\Delta V}{\Delta z}\Bigg|_{\substack{x,y \text{ σταθερά} \\ (x_0,y_0)}}.$$

Αυτά όμως είναι ο ορισμός της μερικής παραγώγου για $\Delta x \to 0$ (αντίστοιχα για $\Delta y \to 0$ ή $\Delta z \to 0$). Επομένως:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$ που συμβολίζεται

και $\vec{E} = -\nabla V$ $\left(\vec{E} = -\mathrm{grad}\,V\right)$

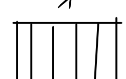
<u>Παραδείγματα</u>



Έστω δύο παράλληλες αγώγιμες πλάκες με μεταξύ τους απόσταση 0.1m. Το δυναμικό ανάμεσά τους είναι $V = 10\cdot y$

$$\vec{E} = -\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial V}{\partial x}}}_{0}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial V}{\partial z}}}_{0}\hat{k}\right) = -\frac{d}{dy}(10y)\hat{j}$$

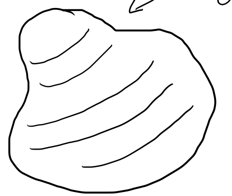
$$\vec{E} = -10\hat{j}$$

Η πλάκα  έχει $V=0$

Η πλάκα  έχει $V = 10\cdot 0.1 = 1V$

Αγωγοί

Οι αγωγοί (μέταλλα) έχουν στο εσωτερικό τους "ελεύθερα ηλεκτρόνια", που παρά το ότι "ανήκουν" σε άτομα μπορούν να κινούνται ελεύθερα μέσα στον αγωγό. Αρα όταν είναι ακίνητα το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον αγωγό είναι 0. Οταν το ηλεκτρικό πεδίο E δεν είναι 0, στα ηλεκτρόνια ασκείται δύναμη και δεν παραμένουν ακίνητα.



θετικά φορτισμένος αγωγός με φορτίο Q

Έστω ένας αγωγός (με οποιοδήποτε σχήμα) που του βάζω θετικό φορτίο, δηλαδή του αφαιρώ ελεύθερα ηλεκτρόνια. Για το πως κατανέμεται το θετικό φορτίο υπάρχουν οι εξής τρεις πιθανότητες:
(α) Το φορτίο παραμένει συγκεντρωμένο σε μία περιοχή
(β) το φορτίο κατανέμεται σε όλον τον ογκο
(γ) το φορτίο βρίσκεται μόνο στην επιφάνεια του αγωγού.

Η πιθανότητα (α) αποκλείεται γιατί αφενός τα θετικά φορτία απωθούνται μεταξύ τους και αφετέρου στην περιοχή του αγωγού που θα ήταν συγκεντρωμένα θα είχαμε $\oint_{\text{κλειστή επιφάνεια}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

Όμως επειδή όταν τα φορτία στον αγωγό είναι ακίνητα, το $\vec{E}=0$ το $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$

Η πιθανότητα (β) αποκλείεται γιατί και εδώ αν πάρουμε το $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}$ σε μια κλειστή επιφάνεια θα πρέπει να ισούται με το $\frac{Q_{\text{μέσα της}}}{\varepsilon_0}$

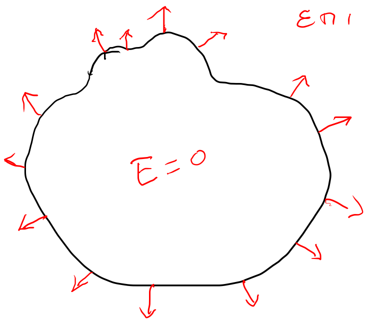
όμως το $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$

Άρα στον φορτισμένο αγωγό το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνειά του

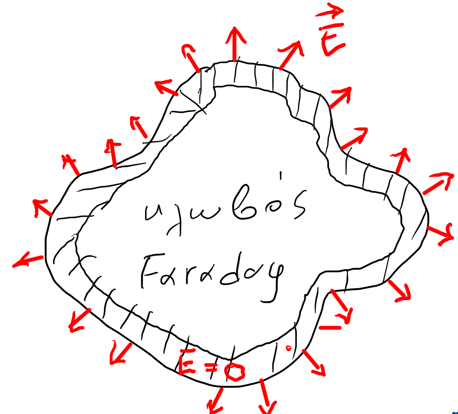
Αφού το πεδίο μέχρι την επιφάνεια του αγωγού είναι 0, τότε όλος ο αγωγός έχει ίδιο δυναμικό, αυτό της επιφάνειάς του.

Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του αγωγού είναι κάθετο προς αυτήν

Ο "κούφιος" αγωγός που ό,τι φορτίο και να του δώσεις αυτό θα μείνει στην επιφάνειά του ονομάζεται ΚΛΩΒΟΣ FARADAY και μας προστατεύει. Π.χ. τα χειρουργεία είναι μέσα σε κλωβούς Faraday.

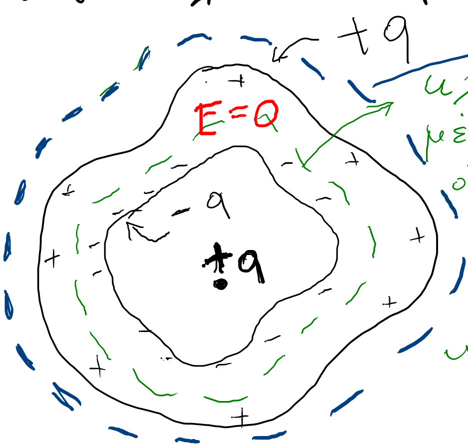


ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια θετικά φορτισμένου αγωγού



Αν μέσα στον κούφιο αφόρτιστο αγωγό βάλω ένα φορτίο +q:

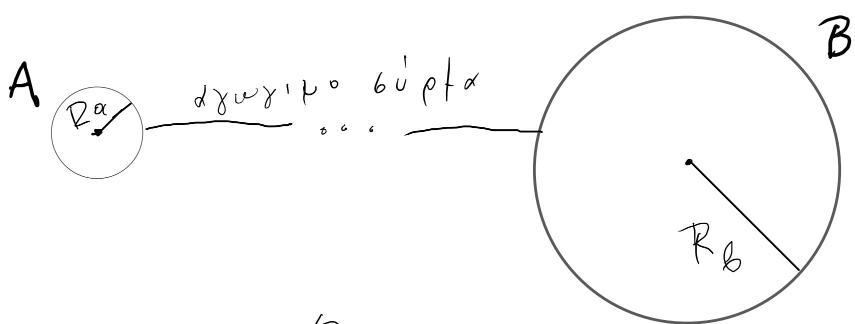
$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{+q}{\varepsilon_0}$ το φορτίο που περικλείει η S'



κλειστή επιφάνεια μέσα στον αγωγό όπου $\vec{E}=0$. Άρα $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$ αφού αυτή περικλείει το q, θα πρέπει να υπάρχει και −q ώστε το $Q_{ολικό}=0$

Έτσι στην εσωτερική επιφάνεια του αγωγού μαζεύεται φορτίο −q και στην εξωτερική ίσο και αντίθετο +q

Εστω δύο σφαιρικοί αγωγοί A με ακτίνα Rα και B με ακτίνα Rβ όπου Rβ = 5 Rα οι οποίοι βρίσκονται πολύ μακριά ο ένας από τον άλλο, αλλά είναι συνδεμένοι με αγώγιμο σύρμα. Φέρνω ένα φορτίο Q σε αυτούς. Το Q κατανέμεται στους αγωγούς.
Την συνθήκη να είναι πολύ μακριά ο ένας αγωγός από τον άλλο την βάζω για να μην επηρεάζει πολύ ο ένας τον άλλο.



Αφού οι αγωγοί είναι συνδεμένοι θα έχουν το ίδιο δυναμικό δηλ $V_A = V_B = V_{\text{σύρματος}}$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_A}{R_\alpha} + \{\text{κάτι μικρό λόγω της B και του σύρματος}\}$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_B}{R_B} + \{\text{κάτι μικρό λόγω της A και του σύρματος}\}$$

δεν λαμβάνω υπόψη τις μικρές συνεισφορές οπότε

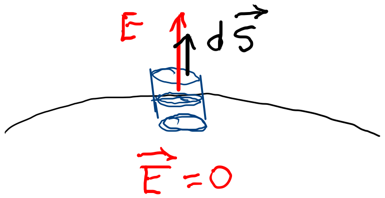
$$\cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\cdot\frac{Q_A}{R_\alpha} \simeq \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\cdot\frac{Q_B}{R_B} \iff Q_A\cdot R_B \simeq Q_B\cdot R_\alpha \text{ δηλ } Q_A\cdot 5\cancel{R_\alpha} = Q_B\cdot \cancel{R_\alpha}$$

επομένως $Q_B = 5\cdot Q_A$ δηλ. το φορτίο της B είναι 5 φορές αυτό της A

Όμως αν πάρουμε τις επιφανειακές πυκνότητες φορτίου σ

$$\sigma_A = \frac{Q_A}{4\pi R_\alpha^2} \text{ και } \sigma_B = \frac{Q_B}{4\pi R_B^2} = \frac{5Q_A}{4\pi(5R_\alpha)^2} = \frac{Q_A}{5\,4\pi R_\alpha^2} = \frac{\sigma_A}{5}, \text{ δηλ.}$$

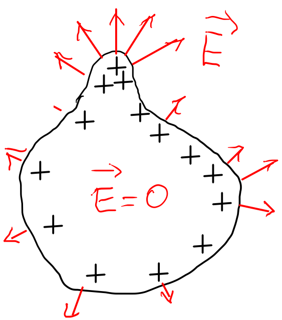
Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου της Α είναι 5 φορές μεγαλύτερη από την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου της Β, παρά το ότι το φορτίο της Β είναι 5 φορές μεγαλύτερο από αυτό της Α.
Το πεδίο στην επιφάνεια της κάθε σφαίρας το βρίσκουμε με την βοήθεια του νόμου Gauss, χρησιμοποιώντας μια κυλινδρική κλειστή επιφάνεια με βάσεις πολύ κοντά στην επιφάνεια της σφαίρας:



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\,ds = \frac{\sigma\, ds}{\varepsilon_0} \quad \text{άρα} \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

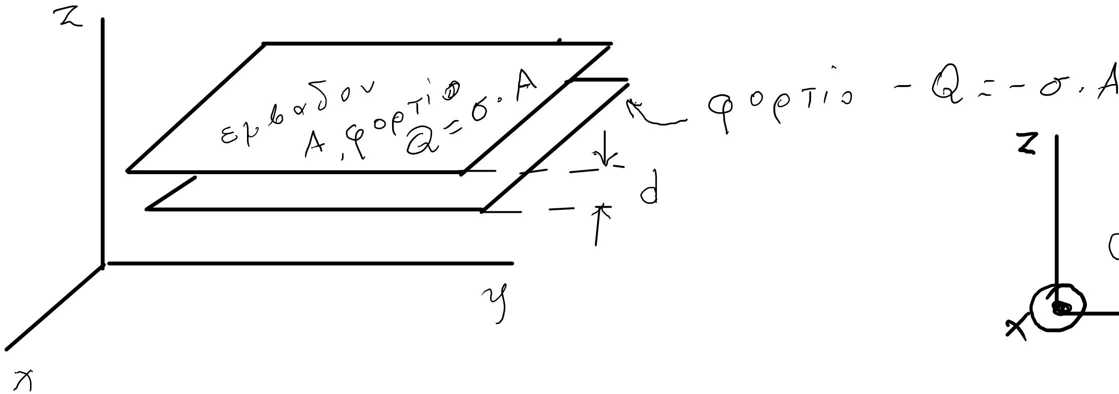
Επομένως το E στην επιφάνεια της A είναι 5 φορές μεγαλύτερο από το E στην επιφάνεια της B

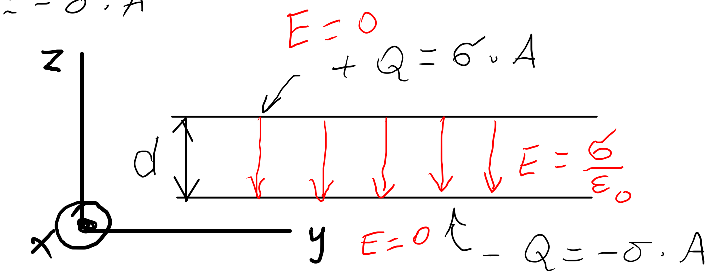
Απο το παράδειγμα αυτό φαίνεται ότι το φορτίο δεν είναι κατ' ανάγκη ισοκατανεμημένο στην επιφάνεια ενός αγωγού.
Αντίθετα εκεί που η καμπυλότητα είναι μεγάλη (μικρή ακτίνα Rα) το πεδίο είναι πιο ισχυρό από εκεί που η καμπυλότητα είναι μικρή (μεγάλη ακτίνα Rβ)



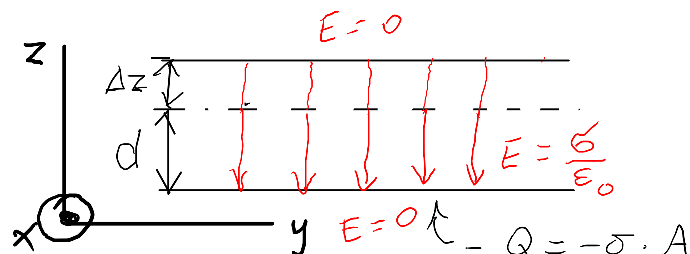
Πυκνότητα Ενέργειας του Ηλεκτρικού Πεδίου

Εστω ότι έχουμε δύο παράλληλα αγώγιμα φύλλα με εμβαδόν A και πυκνότητα φορτίου +σ και -σ που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d





Εστω ότι μετακινώ την επάνω πλάκα κατά Δz



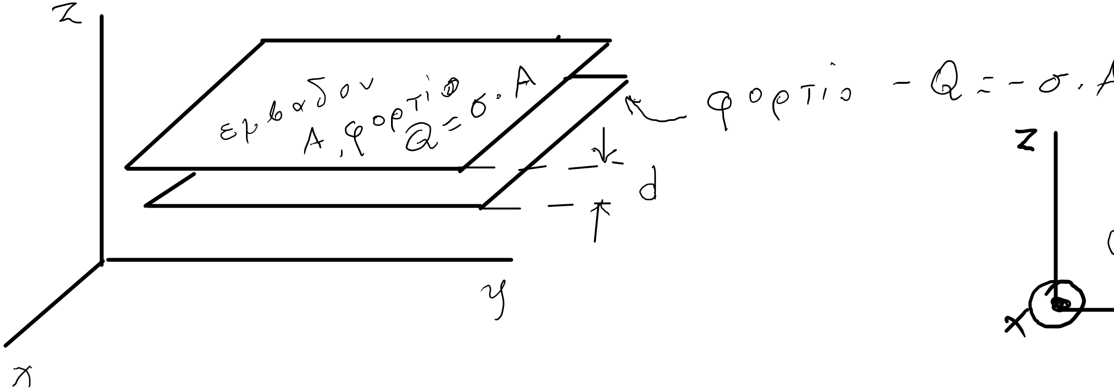
Το $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, όμως τώρα υπάρχει πεδίο και στον όγκο $A\cdot\Delta Z$ όπου προηγουμένως το πεδίο ήταν μηδενικό. Για να συμβεί αυτό κατέβαλλα έργο: Υπερνίκησα την ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το κάτω αγώγιμο φύλλο στο επάνω φύλλο για να το μετακινήσω κατά ΔZ. Αυτή η ηλεκτρική δύναμη είναι $Q_{\text{πάνω φύλλου}}\cdot E_{\text{κάτω φύλλου}} = \sigma\cdot A\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

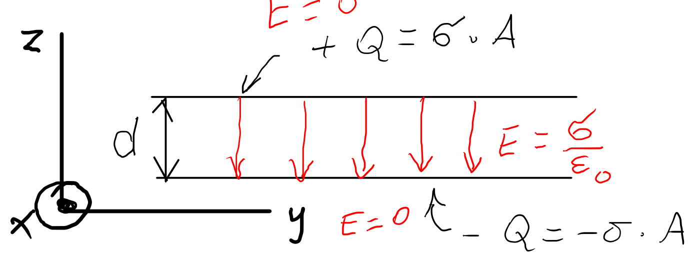
Το έργο $W = F\cdot\Delta Z = \sigma\cdot A\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\Delta Z = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot A\cdot\Delta Z = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\Delta V$

ΔV: ο επιπλέον όγκος, E: το πεδίο ανάμεσα στις πλάκες

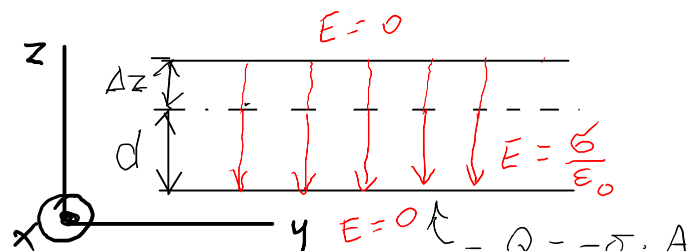
Πυκνότητα Ενέργειας του Ηλεκτρικού Πεδίου

Εστω ότι έχουμε δύο παράλληλα αγώγιμα φύλλα με εμβαδόν A και πυκνότητα φορτίου +σ και -σ που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d





Εστω ότι μετακινώ την επάνω πλάκα κατά Δz



Το $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, όμως τώρα υπάρχει πεδίο και στον όγκο $A\cdot\Delta Z$ όπου προηγουμένως το πεδίο ήταν μηδενικό. Για να συμβεί αυτό κατέβαλλα έργο: Υπερνίκησα την ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το κάτω αγώγιμο φύλλο στο επάνω φύλλο για να το μετακινήσω κατά ΔZ. Αυτή η ηλεκτρική δύναμη είναι $Q_{\text{πάνω φύλλου}}\cdot E_{\text{κάτω φύλλου}}=\sigma\cdot A\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Το έργο $W=F\cdot\Delta Z=\sigma\cdot A\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\Delta Z=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot A\cdot\Delta Z=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\Delta V$

ΔV: ο επιπλέον όγκος, E: το πεδίο ανάμεσα στις πλάκες

Παίρνω τον λόγο $\frac{\text{Έργο}}{\text{Όγκος}} = \frac{W}{\Delta V}$ και το ονομάζω

πυκνότητα ενέργειας u του ηλεκτρικού πεδίου με μονάδες $\frac{J}{m^3}$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι γενικά η πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου είναι $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ και όχι μόνο σε αυτή την περίπτωση.

Επομένως αν θέλουμε να υπολογίσουμε την Ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια μιας κατανομής φορτίων στον χώρο έχουμε δύο τρόπους:

(α) Υπολογίζουμε το έργο που πρέπει να καταβάλλουμε για να φέρουμε τα φορτία στις θέσεις τους

ή

(β) Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της πυκνότητας ενέργειας στον χώρο εξαιτίας του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί η κατανομή φορτίων

Στην περίπτωση των αγώγιμων φύλλων που είδαμε:

Ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια: $U = \int_{\text{σε όλο τον χώρο}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV = \int_{\text{εξωτερικός χώρος}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV + \int_{\text{χώρος ανάμεσα στα φύλλα}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV$

Στον εξωτερικό χώρο $E = 0$, οπότε εκεί το ολοκλήρωμα είναι 0. Στον εσωτερικό χώρο $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, άρα:

$$U = \int_{\text{χώρος ανάμεσα στα φύλλα}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} dV = \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^{\cancel{2}}}\int_{\text{χώρος ανάμεσα στα φύλλα}} dV = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}_{E}\cdot\underbrace{\sigma\cdot A}_{Q}\cdot d = \frac{1}{2}E\cdot d\cdot Q$$

Ξέρουμε ότι $\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\hat{k}$ άρα $E = \frac{dV}{dz}$ και $E dz = dV$ και

$$\int_{z_{\text{κατω φύλλου}}}^{z_{\text{πανω φύλλου}}} E dz = \int_{V_{\text{κατω}}}^{V_{\text{πάνω}}} dV = V_{\text{πανω φύλλου}} - V_{\text{κάτω φύλλου}}$$ δηλ

$$E \cdot \left(z_{\text{κατω φύλλου}} + d - z_{\text{κάτω φύλλου}} \right) = E \cdot d = \Delta V$$ επομένως

Η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια του πεδίου των δύο αγώγιμων φύλλων είναι:

$$U = \frac{1}{2} E \cdot d \cdot Q = \frac{1}{2} Q \Delta V$$