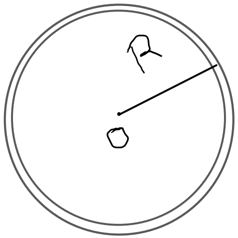
Ηλεκτρικό Δυναμικό (συνέχεια)

Εστω μια "κούφια" μεταλλική σφαίρα με πολύ λεπτό τοίχωμα. Η σφαίρα έχει ακτίνα R = 0.1 m και θετικό φορτίο Q = 1 μC. Θα βρούμε το δυναμικό σε όλον τον χώρο



Έστω ότι ένα σημείο P είναι

(α) έξω από την σφαίρα, δηλ. η απόσταση $r = OP > R$. Σύμφωνα με τον ορισμό το V_P είναι: έργο που παράγεται εξ αιτίας της ηλεκτρικής δύναμης για να μεταφερθεί ένα q_{test} από το P στο ∞ δια του q_{test}:

$$V_P = \frac{1}{q_{test}} \int_P^{\infty} \vec{F}_{ηλεκτρική} \cdot d\vec{r} = \int_P^{\infty} \frac{\vec{F}_{ηλεκτρική}}{q_{test}} \cdot d\vec{r}$$

δηλ. $V_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_P^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \int_P^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$

(β) Μέσα στη σφαίρα, δηλαδή για $OP = r < R$. Πάλι

$$V_P = \frac{1}{q_{test}} \int_P^{\infty} \vec{F}_{ηλεκτρική} \cdot d\vec{r} = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_P^{R} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Επειδή, όπως έχουμε δείξει, στο εσωτερικό της κούφιας σφαίρας το $\vec{E} = 0$, το

$\int_P^R \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$. Άρα το V_P για P στο εσωτερικό της σφαίρας

είναι $V_P = \int_R^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Αντικαθιστώντας με τις τιμές έχω:

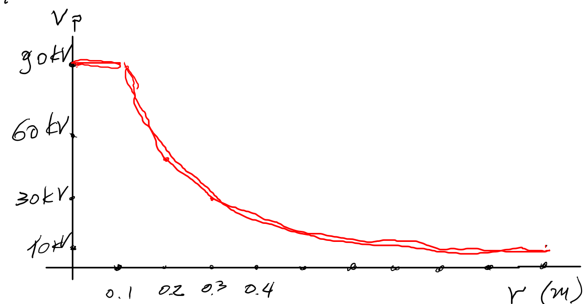
για $r \le R = 0.1\,m$ $\quad V_P = 9\cdot 10^9 \cdot \dfrac{10^{-6}}{10^{-1}} = 9\cdot 10^4\,V = 90\,kV$

$r = 1\,m \qquad V_P = 9\,kV$

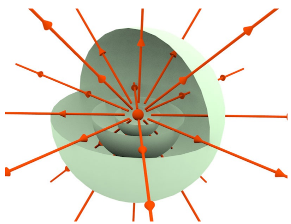
$r = 10\,m \qquad V_P = 900\,V$

$r = 100\,m \qquad V_P = 90\,V$

$r = 1\,km \qquad V_P = 9\,V$



Όπως σε έναν χάρτη υπάρχουν ισοϋψείς καμπύλες, έτσι και στον χώρο μπορούμε να έχουμε ισοδυναμικές επιφάνειες.



Αν έχω κάποια φορτία κατανεμημένα στον χώρο η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια U είναι κάποια, εστω a Joules. Το ηλεκτρικό δυναμικό όμως έχει διάφορες τιμές γιατί εξαρτάται από το σημείο του χώρου για το οποίο το υπολογίζουμε.
Εστω ότι στο σημείο Α το δυναμικό είναι V_A και στο σημείο Β το δυναμικό είναι V_B

V_A A

V_B B

$$V_A = \int_A^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}\,, \quad V_B = \int_B^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad \text{άρα}$$

$$V_A - V_B = \int_A^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} - \int_B^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_B^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} - \int_B^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Το $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$ έχει ίδια τιμή ανεξάρτητα από την διαδρομή από το Α προς το Β. Σημασία έχει μόνο το αρχικό και το τελικό σημείο της διαδρομής (συντηρητικό πεδίο) και $0 = V_A - V_A = \oint_{\text{κλειστή διαδρομή}} \vec{E}\cdot d\vec{r}$

Εστω ότι το σημείο Α έχει δυναμικό + 150 V και το σημείο Β έχει δυναμικό +50 V. Παίρνω ένα Qtest (θετικό) και το φέρνω από μακριά στο σημείο Β. Θα έχω παράξει έργο 50Qtest Joules. Μετά το πάω στα Α. Θα έχω παράξει έργο 150Qtest Joules. Αν αφήσω ελεύθερο το Qtest, η ηλεκτρική δύναμη θα έχει φορά την φορά του ηλ. πεδίου δηλ από το υψηλότερο προς το χαμηλότερο δυναμικό (από το Α προς το Β) και θα μεταφέρει το Qtest από το Α προς το Β αυξάνοντας την ταχύτητά του και άρα την κινητική του ενέργεια Κ.

$$Q_{test} V_A - Q_{test} V_B = K_B - K_A \Rightarrow Q_{test}\cdot(V_A - V_B) = K_B - K_A$$

Αν έχω ένα ηλεκτρόνιο, που έχει φορτίο $e^- = -1.6\cdot 10^{-19}\,C$ και μάζα $m_e = 9.1\cdot 10^{-31}$ kg, αυτό θα κινηθεί από το B προς το A (η ηλεκτρική δύναμη είναι αντίθετη στην φορά του πεδίου. Δηλ. η ηλεκτρική δύναμη δείχνει από το χαμηλότερο προς το υψηλότερο δυναμικό)

Όταν φτάσει το ηλεκτρόνιο στο A θα έχει $K_A = \frac{1}{2} m_e v_A^2$

και έστω ότι στο B έχει $v_B = 0$, δηλ $K_B = 0$

Επομένως: $K_B - K_A = e^- \cdot (V_A - V_B)$ δηλ

$$0 - \frac{1}{2} m_e v_A^2 = -1.6\cdot 10^{-19}\cdot(150-50)\,J \Leftrightarrow -\frac{1}{2} m_e v_A^2 = -1.6\cdot 10^{-19}\cdot 100\,J$$

και $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10^{-31} v_A^2 = 1.6\cdot 10^{-17} \Leftrightarrow v_A^2 = \frac{2\cdot 1.6\cdot 10^{-17}}{9}\cdot 10^{31} \Leftrightarrow$

$$v_A = \sqrt{\frac{3.2}{9}\cdot 10^{14}}\ \frac{m}{s} = \sqrt{0,355}\cdot 10^{7}\ \frac{m}{s} = 0.596\cdot 10^{7}\ m/s.$$

Αυτή η ταχύτητα είναι 50 φορές μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός (πολύ μεγάλη!!!) $\left(\frac{3\cdot 10^8}{0,596\cdot 10^7} = \frac{30\cdot \cancel{10^7}}{0,596\cdot \cancel{10^7}} \simeq 50\right)$

Προφανώς δεν θα άλλαζε τίποτε στο αποτέλεσμα αν βάζαμε αυθαίρετα ότι π.χ $V_A = +100V$ και $V_B = 0V$ ή

$V_A = 0V$ και $V_B = -100V$ ή

$V_A = +50V$ και $V_B = -50V$ κ.ο.κ.

Το $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$ είναι σε όλες τις περιπτώσεις το ίδιο

Έχουμε δει ότι: Γνωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} \Longrightarrow$

Βρίσκουμε την διαφορά δυναμικού $V_A - V_B$ ανάμεσα σε δύο σημεία

$V_A - V_B$: το ολοκλήρωμα του $\vec{E}$ επάνω σε μία διαδρομή από το A στο B

Επομένως αν γνωρίζουμε το δυναμικό σε κάθε σημείο το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ θα είναι η παράγωγος του V

Πράγματι για ένα φορτίο Q ξέρουμε ότι $\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$ και $V = k\frac{Q}{r}$ παρατηρούμε ότι $\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{d}{dr}\left(k\dfrac{Q}{r}\right) = kQ\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\right) = kQ(-1)\cdot\dfrac{1}{r^2}$

άρα $\vec{E} = -\dfrac{dV}{dr}\hat{r}$