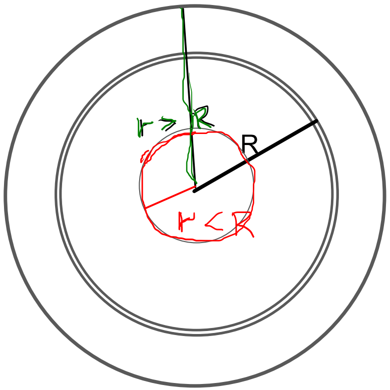
Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss μπορούμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο εύκολα σε περιπτώσεις που υπάρχει συμμετρία:

Παράδειγμα: Να βρεθεί το Ηλ. πεδίο που δημιουργείται από σφαιρικό φλοιό ακτίνας R που έχει στην επιφάνειά του φορτίο Q ισοκατανεμημένο.



Φτιάχνουμε μία σφαιρική επιφάνεια που περιβάλλει τον σφαιρικό φλοιό, επομένως έχει ακτίνα $r > R$. Η ροή μέσα από αυτήν $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$. Εξαιτίας της σφαιρικής συμμετρίας το ηλ. πεδίο $\vec{E}$ έχει την διεύθυνση της ακτίνας της σφαίρας. Το ίδιο ισχύει και για την διεύθυνση του διανύσματος $d\vec{S}$. Επομένως $\vec{E}\cdot d\vec{S} = E\, dS \,\text{συν}\theta = E\, dS$. Επίσης το μέτρο E του ηλ. πεδίου είναι το ίδιο σε κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας. Έτσι η ροή

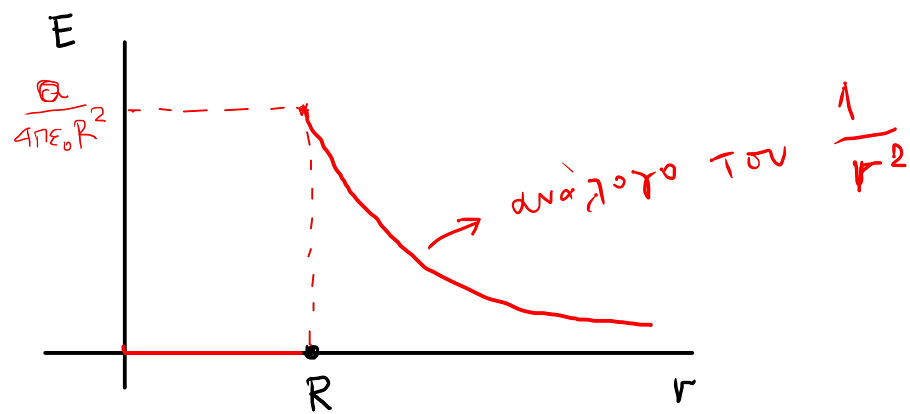
$$\Phi = \oint_{\substack{\text{επιφάνεια}\\ \text{σφαίρας}}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{\substack{\text{επιφάνεια}\\ \text{σφαίρας}}} E\, dS = E \oint_{\substack{\text{επιφάνεια}\\ \text{σφαίρας}}} dS = E\, 4\pi r^2 .$$

Άρα τελικά:

$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$. Προφανώς για $r=R$ δηλ. επάνω στον σφαιρικό φλοιό το $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R^2}$

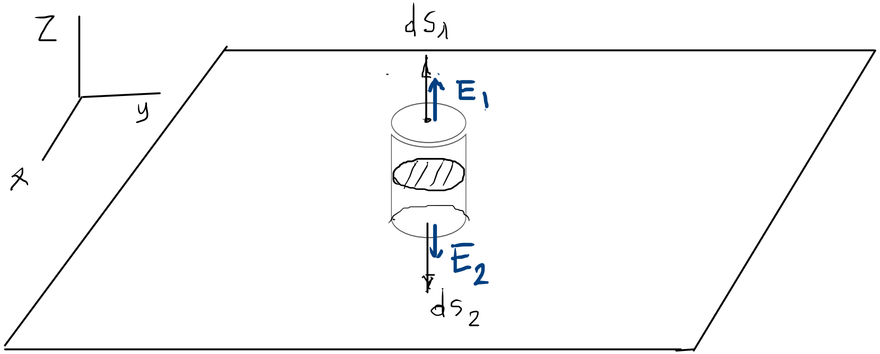
Αν φτιάξουμε μιά σφαιρική επιφάνεια στο εσωτερικό του φλοιού, δηλ. μιά σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα $r<R$, το φορτίο που περικλείει είναι 0. Άρα το $E\,4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0$ δηλαδή το $E=0$, για $r<R$

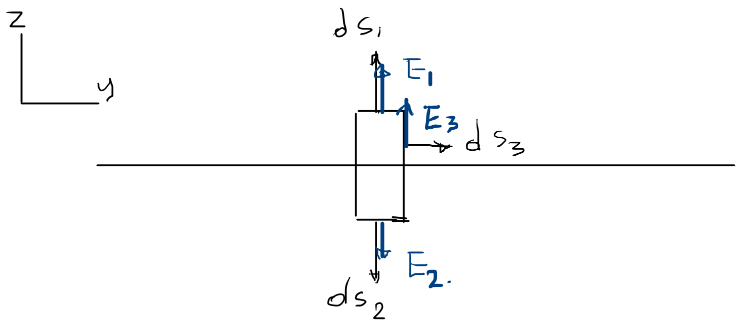
Η γραφική παράσταση της τιμής του ηλ. πεδίου E είναι:



Παράδειγμα

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα επίπεδο φύλλο με άπειρες διαστάσεις και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ C/m^2





Το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας της συμμετρίας έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο φύλλο. Αυτό θα το αιτιολογήσουμε παρακάτω

Φτιάχνουμε μια κλειστή κυλινδρική επιφάνεια με εμβαδόν βάσης $|\vec{dS_1}| = |\vec{dS_2}| = dS$. Η ροή του ηλ. πεδίου είναι

$$\Phi = \vec{E_1}\cdot\vec{dS_1} + \vec{E_2}\cdot\vec{dS_2} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot\vec{dS}}_{\text{πλευρική επιφάνεια}}$$

το $\vec{E_1}$ και το $\vec{E_2}$ έχουν ίδιο μέτρο E. Άρα $\vec{E_1}\cdot\vec{dS_1} = E\,dS$

και $\vec{E_2}\cdot\vec{dS_2} = E\,dS$

ενώ το $\displaystyle\int_{\text{πλευρική επιφάνεια}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = 0$ γιατί στην πλευρική επιφάνεια το $\vec{E}$ είναι κάθετο σε κάθε $\vec{dS}$ (π.χ. $\vec{E_3} \perp \vec{dS_3}$

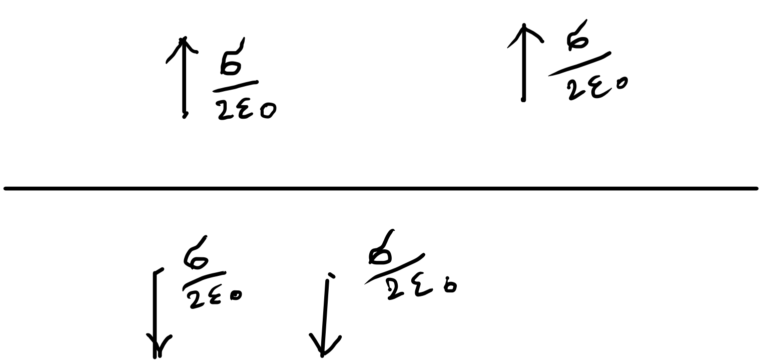
Άρα $\Phi = 2Eds$

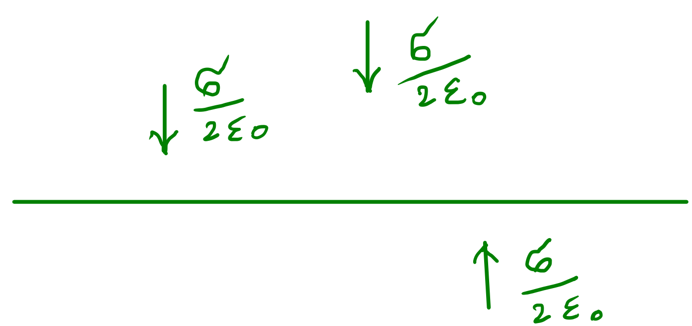
Το φορτίο που περικλείει ο κύλινδρος είναι $\sigma \cdot ds$ (γιατί το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας είναι ds)

Νόμος Gauss: $\Phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ άρα $2E\cancel{ds} = \dfrac{\sigma \cancel{ds}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

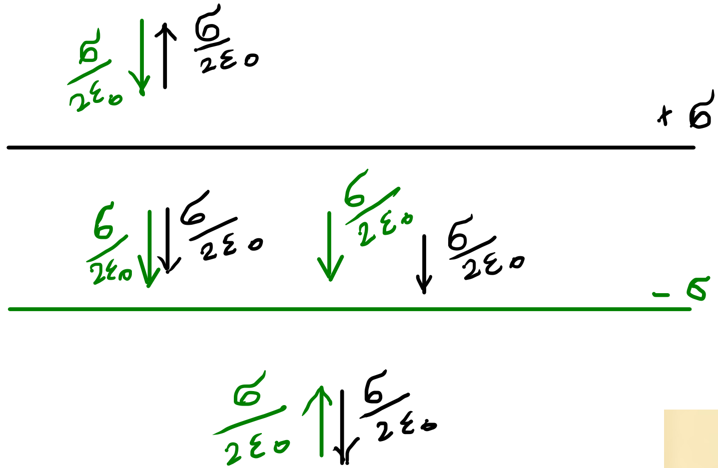
Δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο ενός αγώγιμου φύλλου «απείρων» διαστάσεων με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $+\sigma\ C/m^2$ είναι:

με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $-\sigma\ C/m^2$

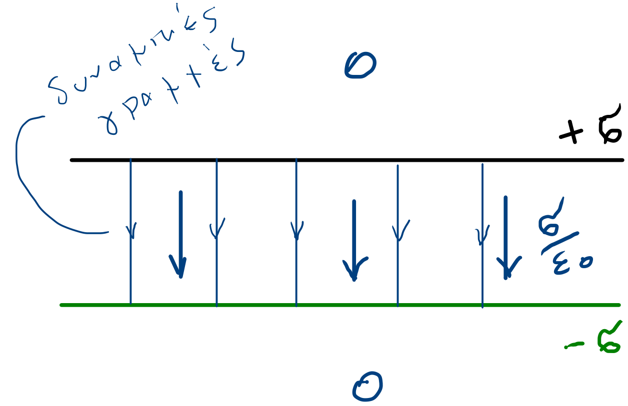




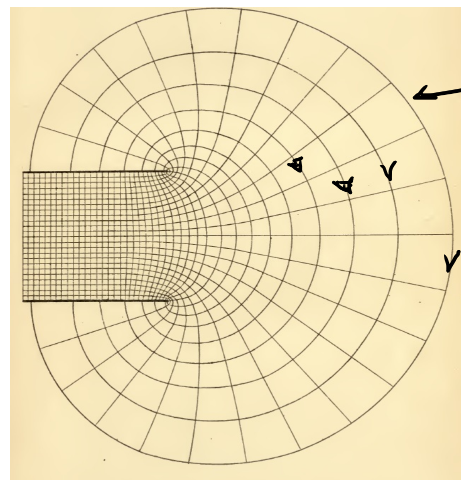
Αν βάλουμε τό ένα αγώγιμο φύλλο πάνω από το άλλο:



=

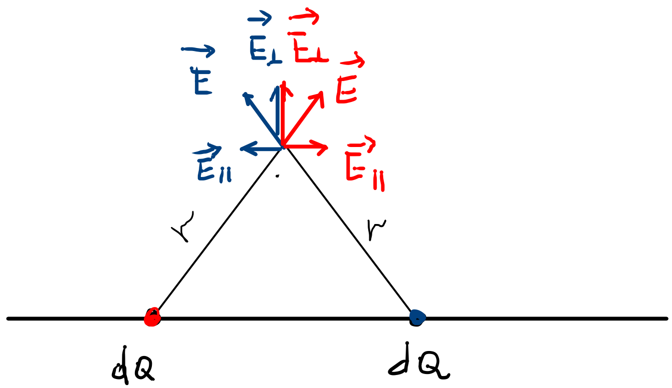


Όταν τα αγώγιμα φύλλα έχουν πεπερασμένες διαστάσεις;



Lines of Force between two Plates

δυναμικές γραμμές του ηλ. πεδίου στην άκρη των δύο φύλλων



Γιατί το πεδίο που δημιουργεί το αγώγιμο φύλλο είναι κάθετο;

Το dQ δημιουργεί το πεδίο

$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$

Το dQ δημιουργεί το πεδίο

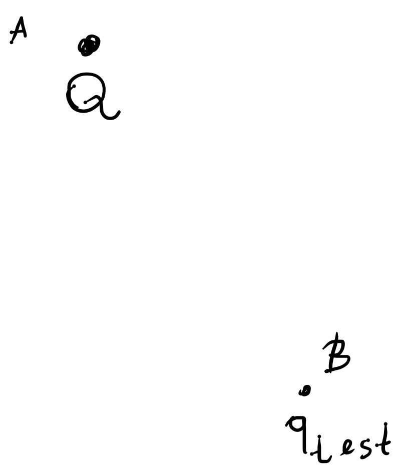
$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ Τα $E_{\parallel}$ είναι ίσα και αντίθετα και το άθροισμά τους είναι 0

Τα $\vec{E}_{\perp}$ είναι ίσα με ίδια φορά και προστίθενται.

Άρα το $\vec{E}$ είναι το άθροισμα των $\vec{E}_{\perp}$ εξαιτίας όλων των dQ

Ηλεκτροστατική Δυναμική Ενέργεια

Έστω ένα φορτίο Q «καρφωμένο» στο σημείο A. Αν πάρω ένα φορτίο q_{test} (ομόσημο με το Q) από το άπειρο (δηλ. από πολύ μακριά) και το φέρω στο σημείο B, που απέχει R από το A, θα πρέπει να εφαρμόσω δύναμη $\vec{F}$ ίση και αντίθετη από την $\vec{F}_{coulomb}$ και επομένως να παράξω έργο



$$W = \int_{\infty}^{R} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ (Σαν να πιέζω ένα ελατήριο)

Το $W = \int_{\infty}^{R} (-\vec{F}_{coulomb}) \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} \vec{F}_{coulomb} \cdot d\vec{r} = \int_{R}^{\infty} \vec{F}_{coulomb} \cdot d\vec{r}$

Το έργο αυτό μετατρέπεται σε ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια

U του φορτίου q_{test} (Αν το αφήσω ελεύθερο θα αυξηθεί η ταχύτητά του και άρα η κινητική του ενέργεια και θα μειωθεί η δυναμική ενέργεια)

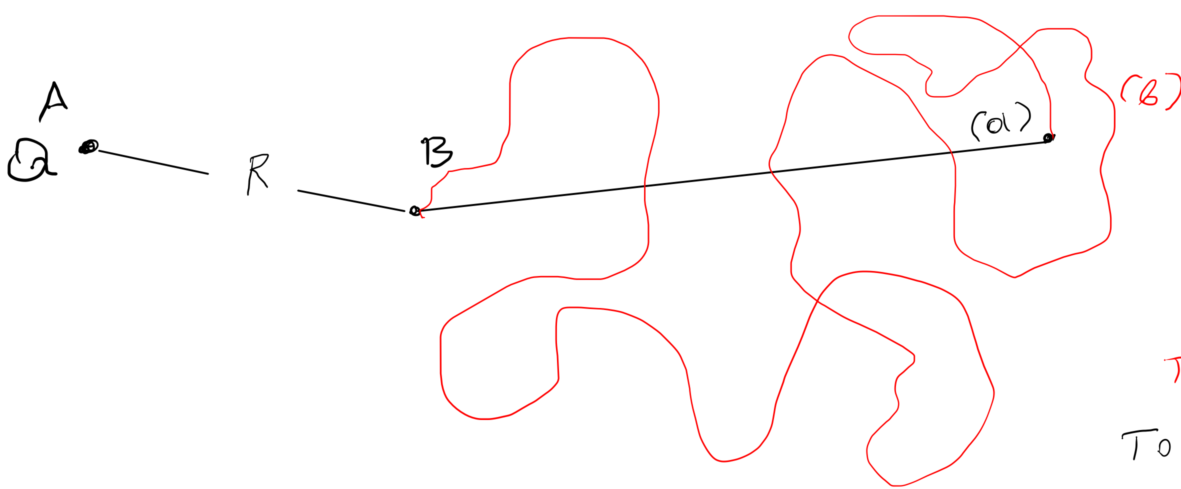
$$U = \int_R^{\infty} k \frac{Q\, q_{test}}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \int_R^{\infty} k \frac{Q\, q_{test}}{r^2} dr = k Q q_{test} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

το $\displaystyle \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}\Big|_R^{\infty} = \lim_{\alpha \to \infty} \left(-\frac{1}{r}\Big|_R^{\alpha}\right) = \lim_{\alpha \to \infty} \left[-\frac{1}{\alpha} - \left(-\frac{1}{R}\right)\right]$

$= 0 + \dfrac{1}{R}$ Επομένως $\displaystyle U = k \frac{Q\, q_{test}}{R}$.

Αν το Q και το q_{test} είναι ετερόσημα, η δυναμική ενέργεια είναι αρνητική. Στο ∞ είναι 0 και μειώνεται προς αρνητικές τιμές και εγώ αντί να καταβάλω προσπάθεια για να μεταφέρω το q_{test}, έλκομαι από το Q

Το έργο πού θα παράξω (θετικό ή αρνητικό) για νά φέρω το q_{test} από το ∞ στο σημείο Β είναι ανεξάρτητο από το ποιά διαδρομή θά ακολουθήσω



Είτε μεταφέρω το q_{test} με την διαδρομή (α) είτε με την διαδρομή (β)

Το έργο που θα παράξω για να υπερνικήσω την ηλεκτρική δύναμη θα είναι

$$k\frac{Q\,q_{test}}{R}$$

Η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια U του φορτίου q_{test} στο σημείο B είναι: $U = k\dfrac{Q q_{test}}{R}$

Το δυναμικό V του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το φορτίο Q στο σημείο B είναι: $V = \dfrac{U}{q_{test}}$

Επομένως $V = \dfrac{\dfrac{kQ\cancel{q_{test}}}{R}}{\cancel{q_{test}}} = k\dfrac{Q}{R}$.

Έτσι η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια του $q_{test} = 1\,C$ θα είναι $U_1 = V \cdot 1\,C$ και του $q_{test} = 1\,\mu C$ θα είναι $U_2 = V \cdot 1\,\mu C$. Η μονάδα του V είναι το

$$1\ V\ (1\ \text{Volt}) = \frac{1\ J\ (\text{Joule})}{1\ C\ (\text{Coulomb})}$$