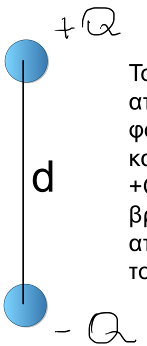
Ηλεκτρικό Δίπολο



Το ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δύο φορτία με ίδιο μέγεθος και αντίθετο πρόσημο, +Q και -Q που βρίσκονται σε σταθερή απόσταση d μεταξύ τους.

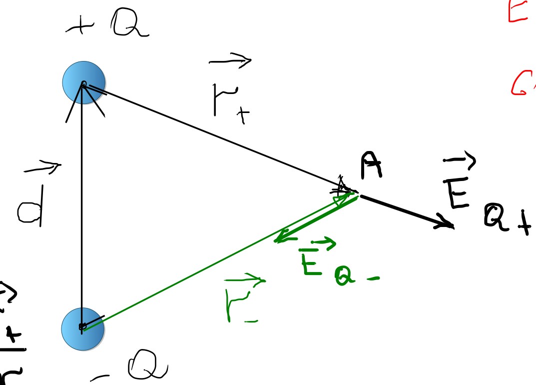
Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο A που βρίσκεται σε ίση απόσταση από τα δύο φορτία:

$$|\vec{r}_+| = |\vec{r}_-| = r$$

μοναδιαία διανύσματα

$$\hat{r}_+ = \frac{\vec{r}_+}{|\vec{r}_+|} = \frac{\vec{r}_+}{r}$$

$$\hat{r}_- = \frac{\vec{r}_-}{|\vec{r}_-|} = \frac{\vec{r}_-}{r}$$



$\vec{E}_{Q_+}$: το πεδίο στο σημείο Α εξαιτίας του Q:

$$\vec{E}_{Q+} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}_+$$

$$\vec{E}_{Q-} = k\frac{-Q}{r^2}\hat{r}_-$$

Το συνολικό πεδίο στο Α είναι $\vec{E}_{ολικο} = \vec{E}_{Q+} + \vec{E}_{Q-}$

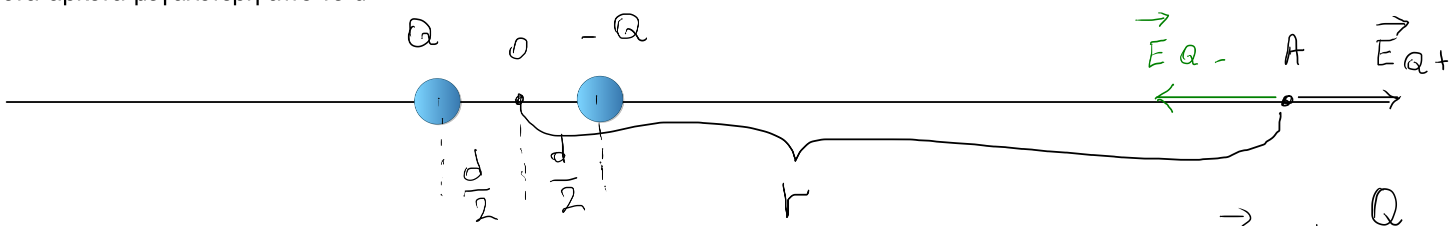
$$\vec{E}_{ολικο} = \frac{kQ}{r^2}\frac{\vec{r}_+}{r} - \frac{kQ}{r^2}\frac{\vec{r}_-}{r} =$$

$$= \frac{kQ}{r^3}\left(\vec{r}_+ - \vec{r}_-\right)$$

Όμως $\vec{d} + \vec{r}_+ = \vec{r}_-$ άρα $\boxed{\vec{E}_{ολικο}} = \frac{kQ}{r^3}\left[\cancel{\vec{r}_+} - \vec{d} - \cancel{\vec{r}_+}\right] = \boxed{-\frac{kQ\vec{d}}{r^3}}$

Το γινόμενο φορτίο Q επί διάνυσμα της απόστασης d με φορά από το -Q προς το Q λέγεται ηλεκτρική διπολική ροπή ; $\vec{P} = Q\cdot\vec{d}$

Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο A που βρίσκεται επάνω στην ευθεία που ενώνει τα δύο φορτία και σε απόσταση από αυτά αρκετά μεγαλύτερη από το d



απόσταση του A από το +Q: $r+\frac{d}{2}$ Πεδίο στο A εξαιτίας του Q+ $\vec{E}_{Q+} = k\frac{Q}{(r+\frac{d}{2})^2}\hat{r}$

απόσταση του A από το -Q: $r-\frac{d}{2}$ Πεδίο στο A εξαιτίας του Q- $\vec{E}_{Q-} = -k\frac{Q}{(r-\frac{d}{2})^2}\cdot\hat{r}$

Γράφω το $r+\frac{d}{2} = r\left(1+\frac{d}{2r}\right) \Rightarrow \left(r+\frac{d}{2}\right)^2 = r^2\left(1+\frac{d}{2r}\right)^2$

ομοίως $r-\frac{d}{2} = r\left(1-\frac{d}{2r}\right) \Rightarrow \left(r-\frac{d}{2}\right)^2 = r^2\left(1-\frac{d}{2r}\right)^2$

Το $\vec{E}_{ολικο}$ στο A είναι: $\vec{E}_{Q+}+\vec{E}_{Q-} = k\frac{Q}{r^2\left(1+\frac{d}{2r}\right)^2}\hat{r} + k\frac{-Q}{r^2\left(1-\frac{d}{2r}\right)^2}\hat{r}$

$\vec{E}_{ολικο} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}\left[\left(1+\frac{d}{2r}\right)^{-2} - \left(1-\frac{d}{2r}\right)^{-2}\right]$. Χρησιμοποιούμε την σχέση $(1\pm x)^{\nu} \simeq 1 \pm \nu x$ αν $x \ll 1$ ..

Επειδή $r >> d$, το $\frac{d}{2r} << 1$, έτσι η προηγούμενη σχέση δίνει:

$$\left(1+\frac{d}{2r}\right)^{-2} \simeq 1 + (-2)\cdot\frac{d}{2r} = 1 - \frac{d}{r} \quad \text{και} \quad \left(1-\frac{d}{2r}\right)^{-2} \simeq 1-(-2)\frac{d}{2r} = 1+\frac{d}{r}$$

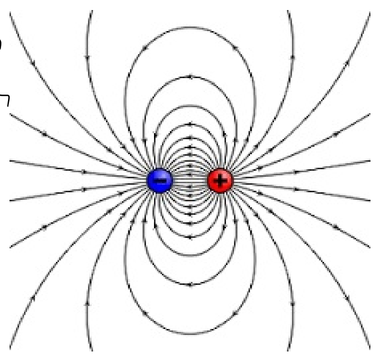
Άρα το $\vec{E}_{ολικο} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}\left[1-\frac{d}{r} - 1 - \frac{d}{r}\right] = -\frac{2kQd}{r^3}\hat{r} \Rightarrow$

$$\vec{E}_{ολικο} = -\frac{2k\vec{P}}{r^3}$$

Αν το σημείο Α ήταν από την πλευρά του $+Q$ τότε $\vec{E} = \frac{2k\vec{P}}{r^3}$

Φυσική σημασία της ηλεκτρικής διπολικής ροπής:

(1) Δυναμικές γραμμές

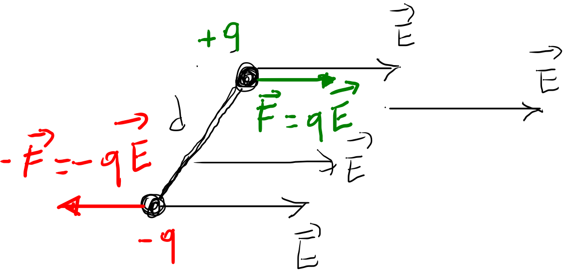


[GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) or CC BY-SA3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], via Wikimedia Commons

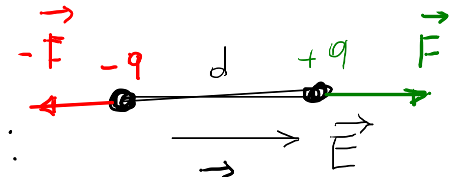
(2) είδαμε ότι όσο απομακρυνόμαστε από το ηλεκτρικό δίπολο το ηλεκτρικό πεδίο εξασθενεί όχι ανάλογα με το $\frac{1}{r^2}$ αλλά ανάλογα με το $\frac{1}{r^3}$ δηλαδή εξασθενεί πιο γρήγορα

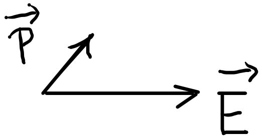
3

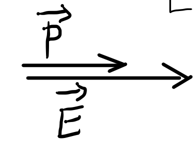
Αν βάλω το ηλεκτρικό δίπολο μέσα σε ένα ΟΜΟΓΕΝΕΣ ηλεκτρικό πεδίο, δηλαδη σε ένα ηλεκτρικό πεδίο που η διεύθυνση φορά και μέτρο του Ηλ. πεδίου είναι ίδια σε κάθε σημείο του χώρου θα έχω:



άρα περιστροφή και ευθυγράμμιση:





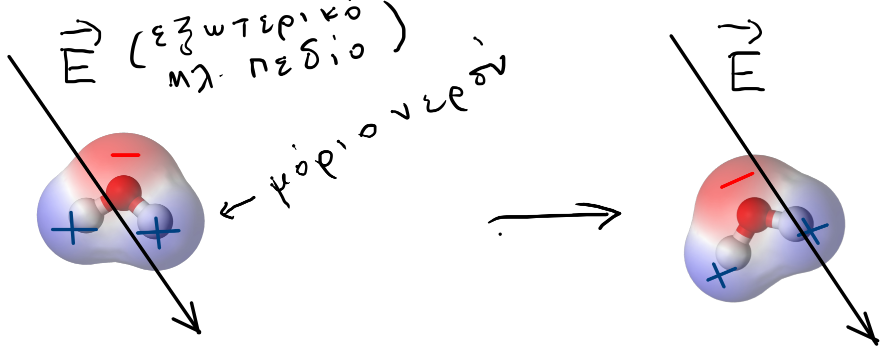


$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

ροπή περιστρέφει το δίπολο

$$\vec{\tau} = 0$$

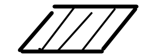
η ροπή = 0 όταν το δίπολο ευθυγραμμίζεται με το ηλ. πεδίο

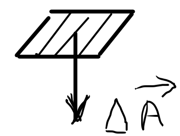


Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1498405

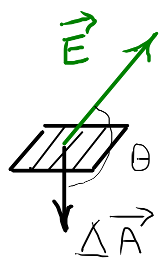
Το μόριο του νερού προσανατολίζεται (πολώνεται)

Ροή Ηλεκτρικού Πεδίου

Έστω μια "μικρή" επίπεδη επιφάνεια με εμβαδόν ΔΑ : 
Ορίζω ένα διάνυσμα με διεύθυνση κάθετη στο κέντρο της επιφάνειας, φορά όποια θέλω και μέτρο ίσο με το εμβαδόν ΔΑ. Το διάνυσμα αυτό είναι το:



Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P στο κέντρο της επιφάνειας είναι $\vec{E}$



Ροή του ηλ. πεδίου μέσα από την επιφάνεια ΔΑ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο: $\vec{E}\cdot\Delta\vec{A}$

$$\Phi = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A} = E\,\Delta A\,\text{συν}\theta$$

Αφού το συνθ παίρνει τιμές από -1 ως 1 η Φ μπορεί να είναι από $-E\Delta A$ ως $E\Delta A$ ανάλογα με την γωνία θ

Αν έχω μια «μεγάλη» επιφάνεια Α, όχι κατ' ανάγκη επίπεδη, την χωρίζω σε 1, 2, ..., ν πολλά μικρά τμήματα, όπου το ν τείνει στο άπειρο. Κάθε τέτοιο τμήμα, επειδή είναι μικρό, προσεγγίζει πολύ το επίπεδο και η ροή:

$$\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{A}_1 \ , \ \Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{A}_2 \ , \ \ldots \ , \ \Phi_\nu = \vec{E}_\nu \cdot \Delta\vec{A}_\nu$$

Η ροή μέσα από την επιφάνεια Α είναι $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_\nu$ όπου $\nu \to \infty$ και το $\Delta A_i \to 0$. Αυτό το άθροισμα λέγεται επιφανειακό ολοκλήρωμα και το συμβολίζουμε έτσι:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} .$$

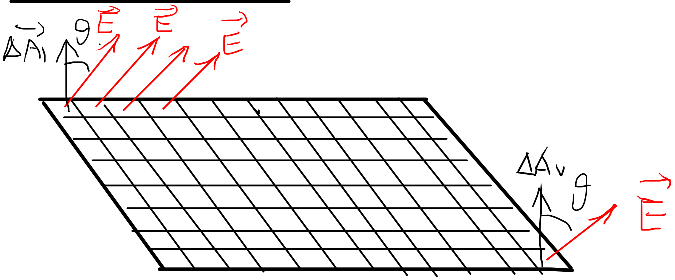
Η ροή Φ έχει μονάδα

μονάδα πεδίου × μονάδα εμβαδού

$$\frac{N}{C} \cdot m^2 = 1 \text{ Weber}$$

Αν τα $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \ldots, \vec{E}_\nu$ είναι ίδια (ομογενές πεδίο) βγαίνουν κοινός παράγοντας στο άθροισμα.

Παράδειγμα: Επίπεδη επιφάνεια μέσα σε ομογενές ηλ. πεδίο



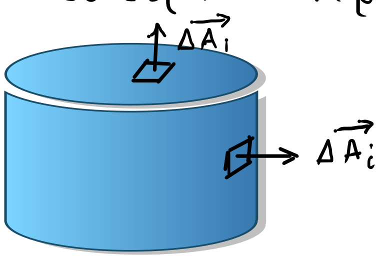
$$\Phi = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_1 + \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_2 + \dots + \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_v$$

$$= E\Delta A_1 \sigma\upsilon\nu\vartheta + E\Delta A_2 \sigma\upsilon\nu\vartheta + \dots + E\,\Delta A_v \sigma\upsilon\nu\vartheta$$

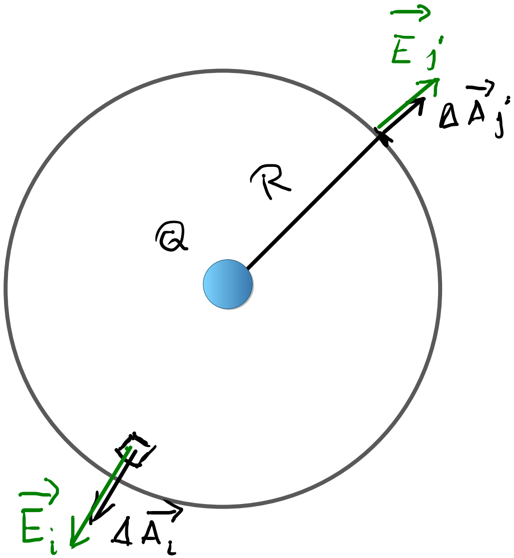
$$= E\cdot(\Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots \Delta A_v)\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta =$$

$$= E\cdot A\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Όταν έχω μια κλειστή επιφάνεια, δηλ. μια επιφάνεια πού χωρίζει τον χώρο σε δύο τμήματα τον εσωτερικό και τον εξωτερικό (μιά σφαιρική επιφάνεια, μια κλειστή τσάντα, ένα μπαλόνι), τότε ορίζω ότι η φορά κάθε στοιχειώδους τμήματος της επιφάνειας θα είναι από τον εσωτερικό προς τον εξωτερικό χώρο



Έστω μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R, που στο κέντρο της βάζω φορτίο Q



Η ροή Φ είναι:

$$\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 + \dots + \Delta\Phi_\nu =$$

$$\vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{A}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{A}_2 + \dots + \vec{E}_\nu \cdot \Delta\vec{A}_\nu =$$

$$E_1 \Delta A_1 \, \text{συν} 0^\circ + \dots + E_\nu \Delta A_\nu \, \text{συν} 0^\circ =$$

$$E_1 \Delta A_1 + E_2 \Delta A_2 + \dots + E_\nu \Delta A_\nu$$

όμως $E_1 = E_2 = \dots = E_\nu = k\dfrac{Q}{R^2}$

άρα βγάζουμε κοινό παράγοντα το $k\dfrac{Q}{R^2}$ και

$$\Phi = k\frac{Q}{R^2}(\Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_\nu) = k\frac{Q}{R^2} \cdot \text{επιφάνεια σφαίρας}$$

$$= k\frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = k4\pi Q$$

. Την σταθερά Coulomb k την έχουμε γράψει και

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, ε_0: διηλεκτρική διαπερατότητα του κενού

Άρα $\Phi = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0} Q \cancel{4\pi} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$. Αποδεικνύεται ότι

Το αποτέλεσμα αυτό $\left(\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}\right)$ ισχύει για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια και οπουδήποτε στο εσωτερικό της και να βρίσκεται το Q

Επίσης αν στο εσωτερικό της επιφάνειας βρίσκονται $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ φορτία έχουμε $\Phi_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$, $\Phi_2 = \frac{Q_2}{\varepsilon_0}, \ldots, \Phi_N = \frac{Q_N}{\varepsilon_0}$

και $\Phi_{ολικό} = \frac{Q_1 + \cdots + Q_N}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{ολικό}}{\varepsilon_0}$

Το αποτέλεσμα $\underset{\text{μέσα από την κλειστή επιφάνεια A}}{\Phi_{ολικό}} = \frac{Q_{ολικό\ στο\ εσωτερικό\ της}}{\varepsilon_0}$

λέγεται ΝΟΜΟΣ του GAUSS και είναι η 1η εξίσωση Maxwell

γράφεται: $\boxed{\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$ Το $\oint_A$ συμβολίζει το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην κλειστή επιφάνεια A