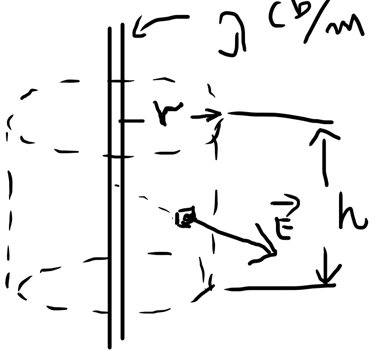
Ξέρουμε από τα αποτελέσματα των πειραμάτων ότι όσο απομακρυνόμαστε από έναν αγωγό το Μαγνητικό Πεδίο μειώνεται ανάλογα με το $\frac{1}{r}$ όπου r η απόσταση από τον αγωγό.

Ωστόσο ξέρουμε ότι και όταν έχουμε έναν αγωγό και το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μειώνεται ανάλογα με το $1/r$:

Έστω αγωγός με φορτίο $\lambda \frac{C}{m}$. Εφαρμόζω τον νόμο του Gauss εκμεταλλευόμενος την κυλινδρική συμμετρία



$$\underset{\text{πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου}}{\oint} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0}$$

όμως $\oint \vec{E}\cdot dS = \underbrace{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\text{στις βάσεις του κυλίνδρου}} + \underbrace{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\text{πλευρική επιφάνεια}} =$

$= \underset{(\vec{E}\,d\vec{S} = 0)}{0} + E\cdot 2\pi r\cdot h$ άρα

$$E\cdot 2\pi r\cdot h = \frac{\lambda\cdot h}{\varepsilon_0} \Longleftrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

Είδαμε ότι μια γραμμική κατανομή φορτίου δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο ανάλογο του $1/r$ όπου r η απόσταση από αυτήν.

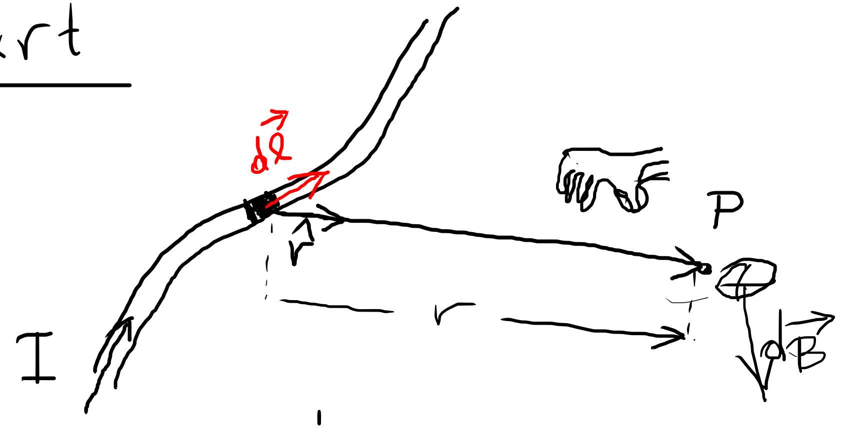
Αυτό είναι ανάλογο με το πειραματικό δεδομένο που έχουμε ότι το Μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένας αγωγός με ρεύμα είναι ανάλογο του $1/r$ όπου r η απόσταση από αυτόν.

Επομένως είναι βάσιμη η σκέψη ότι το Μαγν. Πεδίο που δημιουργεί ένα στοιχειώδες τμήμα του αγωγού με ρεύμα θα είναι ανάλογο του $1/r^2$ (όπως το ηλ. πεδίο ενός φορτίου)

Νόμος Biot Savart

$$d\vec{B} = C \cdot \frac{I}{r^2}\left(d\vec{\ell} \times \hat{r}\right)$$

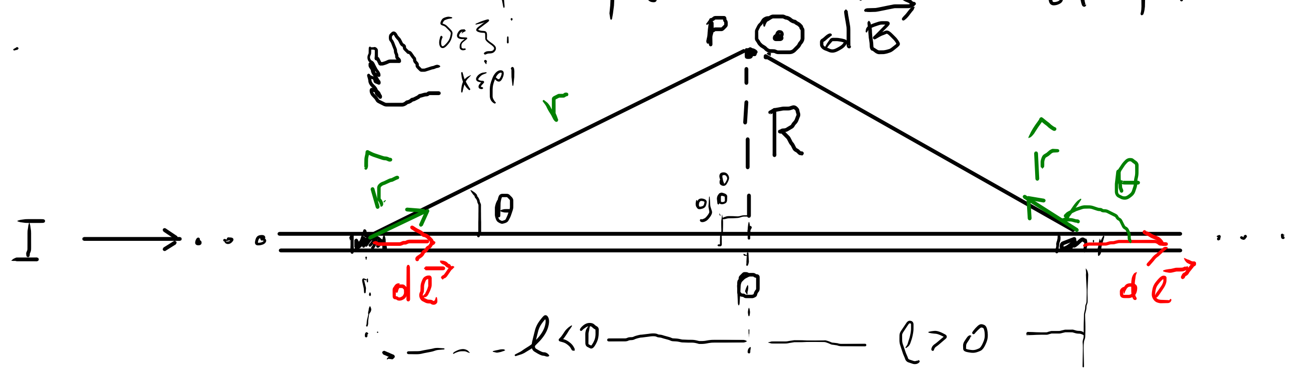
$\hat{r}$: μοναδιαίο διάνυσμα



$C = 10^{-7} = \frac{\mu_0}{4\pi}$

$\mu_0 \simeq 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ μαγνητική διαπερατότητα του κενού

Μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένας ευθύγραμμος αγωγός με άπειρο μήκος.



Το συνολικό Μαγν. Πεδίο θα είναι το άθροισμα όλων των $\vec{dB}$ πού έχουν όλα την ίδια φορά έτσι

$$B = \int_{l=-\infty}^{l=+\infty} dB = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^2}\, dl\, \eta\mu\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\mu\theta}{r^2}\, dl$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{R}{l} = -\varepsilon\varphi\theta \quad \left(\begin{array}{l} \text{από } l=-\infty \\ \text{ως } l=0^- \\ \text{το } \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \text{από } l=0^+ \\ \text{ως } l=+\infty \\ \text{το } \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{array} \right)$$

$$\frac{l}{R} = -\sigma\varphi\theta \Rightarrow l = -R\sigma\varphi\theta \Rightarrow dl = -R(\sigma\varphi\theta)' d\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{(\sigma\varphi\theta)' = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\right)' = \frac{\sigma\upsilon\nu'\theta\,\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu'\theta}{\eta\mu^2\theta} = \frac{-\eta\mu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta} = \frac{-(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta)}{\eta\mu^2\theta} = -\frac{1}{\eta\mu^2\theta}}$$

$$dl = \frac{R}{\eta\mu^2\theta}\, d\theta$$

Έτσι το $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\ell=-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\mu\theta}{r^2} d\ell$ γράφεται $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\eta\mu\theta}{r^2} \frac{R}{\eta\mu^2\theta} \cdot d\theta$

Παρατηρούμε επίσης ότι $\frac{R}{r} = \eta\mu\theta$ άρα $r = \frac{R}{\eta\mu\theta}$ έτσι το ολοκλήρωμα τελικά γράφεται: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\eta\mu\theta}{\cancel{\left(\frac{R}{\eta\mu\theta}\right)^2}} \cdot \frac{\cancel{R}}{\cancel{\eta\mu^2\theta}} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\theta=0}^{\pi} \eta\mu\theta \, d\theta$

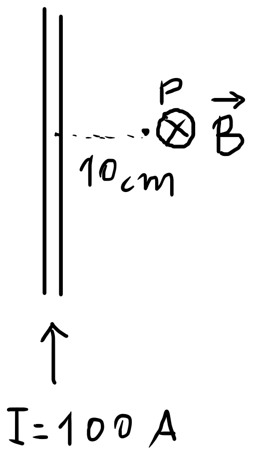
Το $\int_0^{\pi} \eta\mu\theta d\theta = \left(-\sigma\upsilon\nu\theta \Big|_0^{\pi}\right) =$

$= -\sigma\upsilon\nu\pi - (-\sigma\upsilon\nu 0) =$

$= -(-1) - (-1) = 2$

Επομένως $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ Πεδίο ρευματοφόρου αγωγού «απείρου» μήκους

Αριθμητικό παράδειγμα



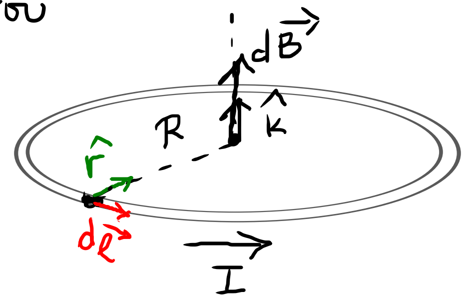
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r} = 10^{-7}\cdot\frac{2\cdot 100}{10^{-1}}\,T = 2\cdot 10^{-4}\,T = 2\,G$$

αν η απόσταση r γίνει 0.5 m τότε

$$B = 10^{-7}\cdot\frac{2\cdot 100}{\frac{1}{2}}\,T = 4\cdot 10^{-5}\,T = 0.4\,G$$

(περίπου η ένταση του Μ.Π. της γης)

Χρησιμοποιώντας τον Νόμο Biot Savart βρίσκω το Μ.Π. στο κέντρο κυκλικού αγωγού



$$\vec{B} = \int_{\text{επάνω στον αγωγό}} d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int_{\text{επάνω στον αγωγό}} d\vec{\ell}\times\hat{r}$$

παρατηρούμε ότι $\hat{r}\perp d\vec{\ell}$ έτσι

$$d\vec{\ell}\times\hat{r} = d\ell\cdot 1\,\eta\mu\frac{\pi}{2}\,\hat{k} = d\ell\,\hat{k}$$

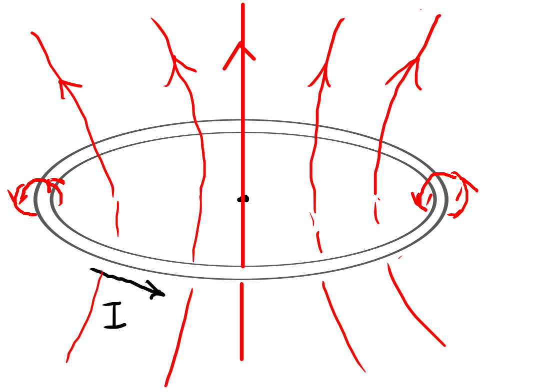
έτσι

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\,\hat{k}\int_{\text{επάνω στον αγωγό}} d\ell = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\,2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}\,\hat{k}$$

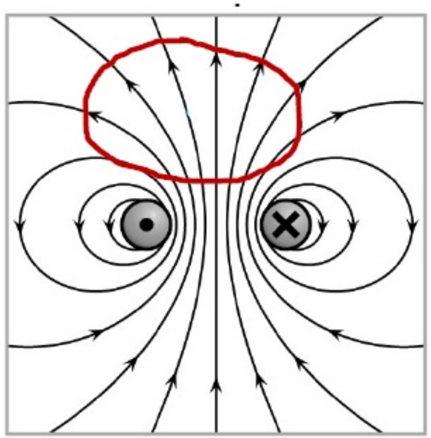
Βρήκαμε ότι το Μ.Π. στο κέντρο του κυκλικού αγωγού είναι

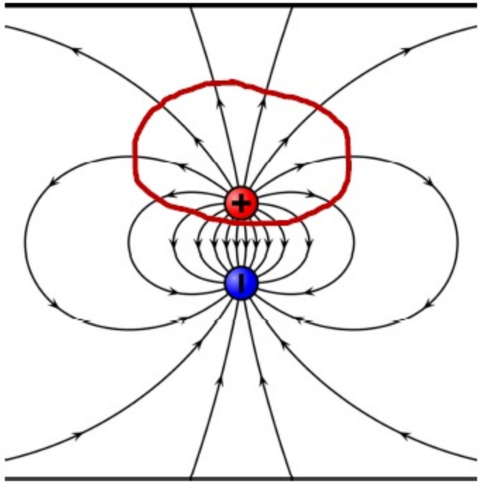
$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{k}$. Αν δούμε τώρα τις δυναμικές γραμμές του πεδίου που τις φτιάχνουμε όπως και τις δυναμικές γραμμές του ηλ. πεδίου (εφαπτόμενες στο διάνυσμα και με την ίδια φορά)

Δείτε τις ομοιότητες και τις διαφορές του ηλεκτρικού διπόλου με το Μαγν. Πεδίο του βρόγχου ρεύματος



βρόγχος ρεύματος





Για το μαγνητικό πεδίο ισχύει ότι η συνολική ροή του πεδίου πάνω σε μία κλειστή επιφάνεια είναι 0

$$\boxed{\oint_{\substack{\text{κλειστή}\\\text{επιφάνεια}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

2η εξίσωση Maxwell

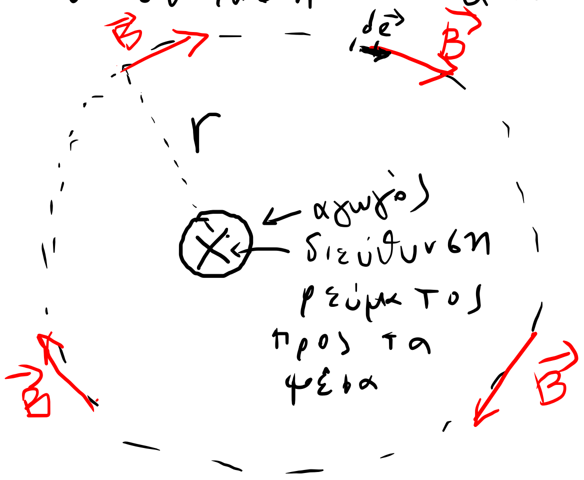
Σε αντίθεση με την 1η εξίσωση Maxwell (Νομος Gauss)

$$\oint_{\substack{\text{κλειστή}\\\text{Επιφάνεια}}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Θα δούμε τον νόμο του Ampere που είναι <u>σχεδόν</u> η 3η εξίσωση Maxwell. Λέμε σχεδόν γιατί θα πρέπει να τον τροποποιήσουμε, όπως θα δούμε παρακάτω.

Νόμος Ampere

Είδαμε ότι με τον Νόμο Biot-Savart παίρνουμε το μαγν. πεδίο σε απόσταση r από έναν αγωγό που έχει ρεύμα I



$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I$$

Αν «περπατήσουμε» πάνω στην περιφέρεια του κύκλου και την χωρίσουμε σε «στοιχειώδη τμήματα» $d\vec{l}$, το εσωτερικό γινόμενο του καθε $d\vec{l}$ με το $\vec{B}$ είναι Bdl γιατί η μεταξύ τους γωνία είναι 0. Οπότε το άθροισμα όλων των Bdl είναι το ολοκλήρωμα επάνω στην περιφέρεια του κύκλου:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

επάνω στην περιφέρεια του κύκλου

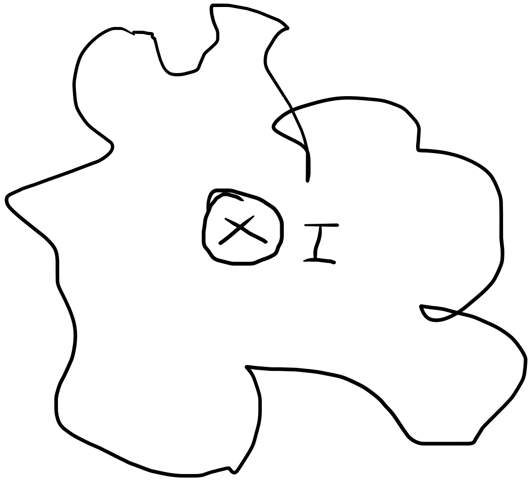
Προσοχή: Το $d\vec{l}$ επάνω στην περιφέρεια του κύκλου δεν το μπερδεύουμε με το $d\vec{l}$ επάνω στον αγωγό ρεύματος που χρησιμοποιούμε στον Νόμο Biot-Savart

Ο Ampere ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε ότι το αποτέλεσμα

$$\oint_{\text{κλειστή διαδρομή}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

δεν εξαρτάται απο το αν η κλειστή διαδρομή είναι περιφέρεια κύκλου ή κάποιο άλλο σχήμα.

Δηλ. θα μπορούσε να είναι π.χ.



Το $\oint_{\text{κλειστή διαδρομή}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$ ← αυτή είναι «σχεδόν» η 3η εξίσωση Maxwell