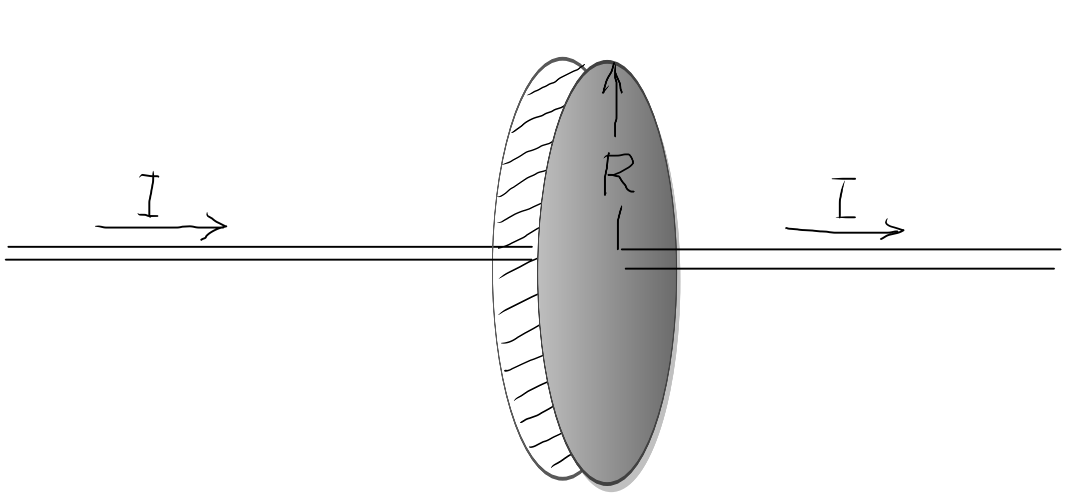
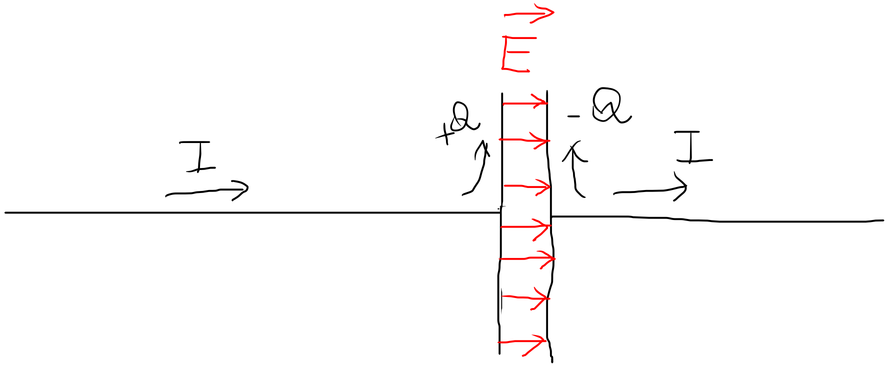
Αναθεώρηση νόμου Ampere

Η ανάγκη αναθεώρησης του νόμου Ampere θα φανεί στο παρακάτω παράδειγμα:



Έχω έναν αγωγό με ρεύμα I στον οποίο παρεμβάλλεται ένας πυκνωτής, τον οποίο το ρεύμα I φορτίζει (ή εκφορτίζει)

Ο πυκνωτής έχει οπλισμούς που είναι δίσκοι ακτίνας R και η απόσταση μεταξύ τους είναι $d \ll R$.



Το ηλ. πεδίο μέσα στον πυκνωτή είναι

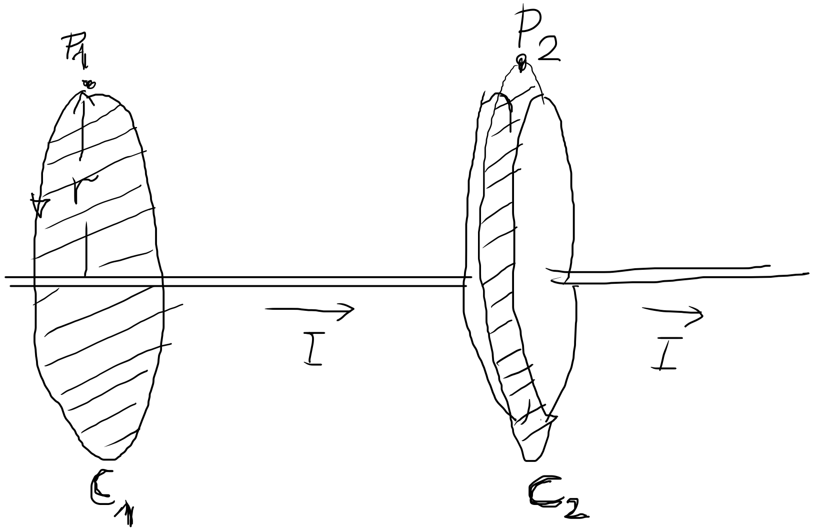
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 k} = \frac{\frac{Q}{\pi R^2}}{\varepsilon_0 k}$$

το ρεύμα I είναι $\frac{dQ}{dt}$ άρα το ηλ. πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς είναι μεταβαλλόμενο

και $$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0 k}\right) = \frac{I}{\pi R^2 \varepsilon_0 k}$$

Αν ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή δεν υπάρχει διηλεκτρικό, τότε $k=1$

Υποθέτουμε ότι ηλ. πεδίο υπάρχει μόνο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή. Ας δούμε τι γίνεται με το μαγνητικό πεδίο. π.χ. στο σημείο P_1 που βρίσκεται σε απόσταση r από τον αγωγό και αρκετά μακριά από τον πυκνωτή. Θα εφαρμόσουμε τον νόμο Ampere στον κύκλο C_1 με ακτίνα r:



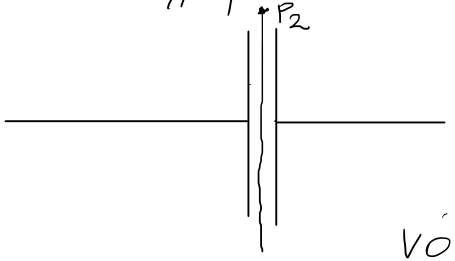
Το $\oint_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = B 2\pi r$ το ρεύμα που διαπερνά την γραμμοσκιασμένη επιφάνεια είναι I άρα το

$$\oint_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

που δίνει Μ.Π. στο σημείο P_1 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

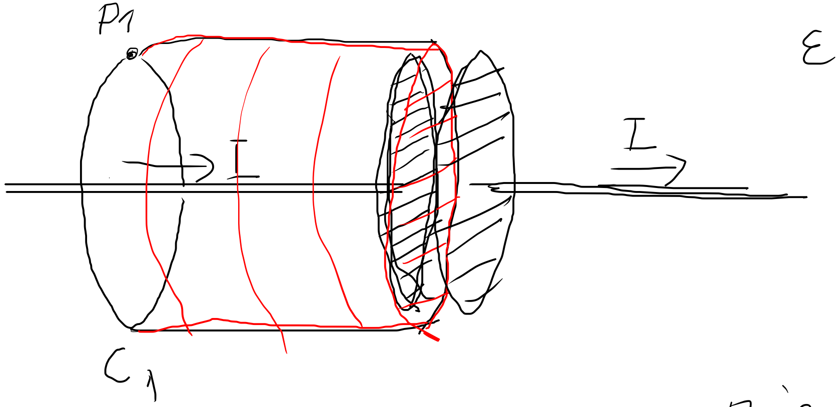
Ας δούμε τι γίνεται στο σημείο P_2 πού είναι πάνω από τους οπλισμούς του πυκνωτη. Βλέπω ότι το ρεύμα που διαπερνά την επιφάνεια είναι 0. Άρα

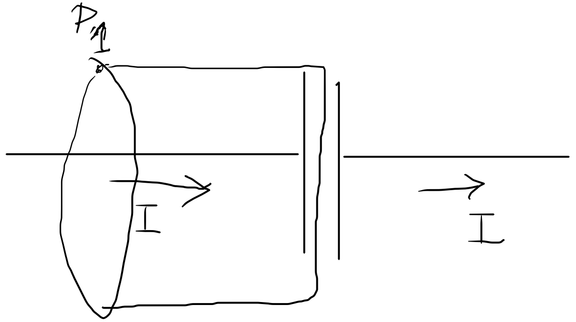
$$\oint_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow B\cdot 2\pi r = 0 \Rightarrow B = 0$$



Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει «περίεργο», γιατί ο νόμος Biot-Savart λέει ότι εφόσον κινούνται φορτία επάνω στην

Επιφάνεια των οπλισμών του πυκνωτή, δηλ. υπάρχει ρεύμα στους οπλισμούς, θα δημιουργείται Μ.Π. στό σημείο P_2.





Τα πράγματα γίνονται χειρότερα αν πάω να εφαρμόσω τον νόμο Ampere για να βρω το Μ.Π. στο σημείο P_1 παίρνοντας ως επιφάνεια την οποία διαπερνά κάποιο ρεύμα, όχι την επίπεδη κυκλική, που πήρα προηγουμένως, αλλά μια "σακκούλα", η οποία έχει όριο την καμπύλη C_1, αλλά την οποία δεν διαπερνά κανένα ρεύμα.

Η εφαρμογή του νόμου Ampere τώρα δίνει

$B=0$ για το P_1

Επομένως είναι προφανές οτι ο νόμος Ampere πρέπει να αλλάξει.

Τον νόμο του Ampere τον άλλαξε ο Maxwell.

Ο Maxwell είπε ότι

(α) Ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή υπάρχει ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο

(β) Αφού ξέρουμε από τον Νόμο Faraday ότι μια μεταβαλλόμενη ροή μαγνητικού πεδίου δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο, ίσως και μια μεταβαλλόμενη ροή ηλεκτρικού πεδίου να δημιουργεί Μαγνητικό πεδίο

Οπότε ο Maxwell πρόσθεσε έναν όρο στην εξίσωση του νόμου Ampere:

$$\oint_{C} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 k \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

όπου Φ_E η ροή του ηλ. πεδίου μέσα από την ανοιχτή επιφάνεια της οποίας σύνορο είναι η κλειστή διαδρομή C

C: κλειστή διαδρομή

$$\Phi_E = \int_{\text{ανοιχτή επιφάνεια}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

(Για να μην υπάρχει παρανόηση: Για τον νόμο Gauss βρίσκουμε την Φ_E σε μία κλειστή επιφάνεια)

Ο Maxwell ονόμασε τον όρο $\varepsilon_0 k \frac{d\Phi_E}{dt}$ ρεύμα μετατόπισης

Επομένως ο νόμος Ampere αναθεωρημένος είναι:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\left(I + \varepsilon_0 k \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{S}\right)$$

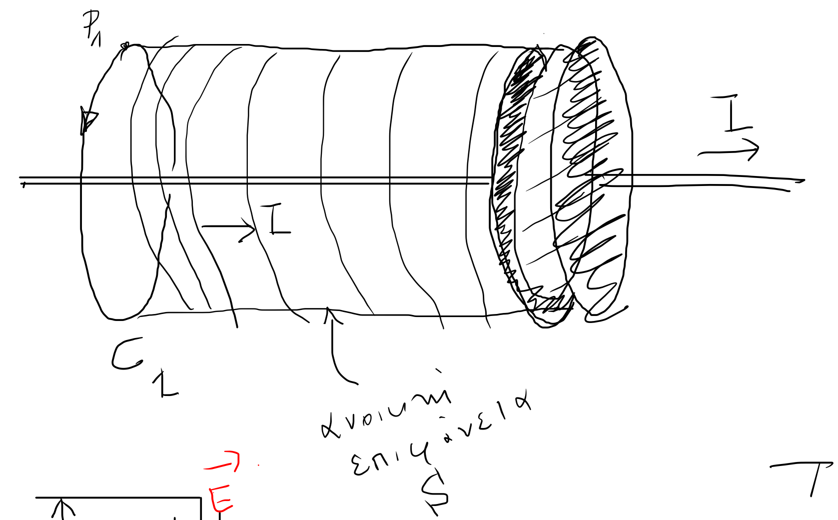
C: κλειστή καμπύλη

I: ρεύμα που διαπερνά την ανοικτή επιφάνεια με όριο την C

$\int$: ανοικτή επιφάνεια με όριο την C

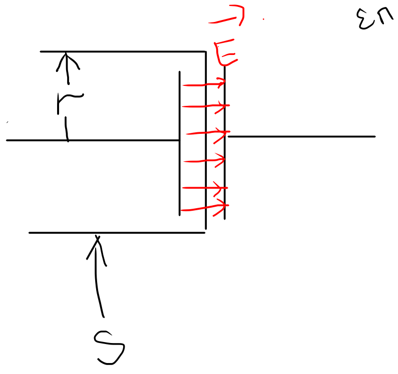
Οπότε ας δούμε τι παίρνουμε αν εφαρμόσουμε την παραπάνω σχέση στο προηγούμενο πρόβλημα.

Ας δούμε πρώτα τι γίνεται για το σημείο P_1:



Το $\oint_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = 2\pi r \cdot B$

Το I που διαπερνά την επιφάνεια S' είναι 0



Το $\Phi_E = \int_{S'} \vec{E}\cdot d\vec{S}$ (επειδή έχω θεωρήσει ότι ηλ. πεδίο υπάρχει μόνο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή. Το $\vec{E}\cdot d\vec{S} \neq 0$ μόνο ανάμεσα σε αυτούς

και έτσι $\int_{S'} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0 k} = \cancel{\pi R^2} \cdot \frac{\frac{Q}{\cancel{\pi R^2}}}{\varepsilon_0 k} = \frac{Q}{\varepsilon_0 k}$ άρα το

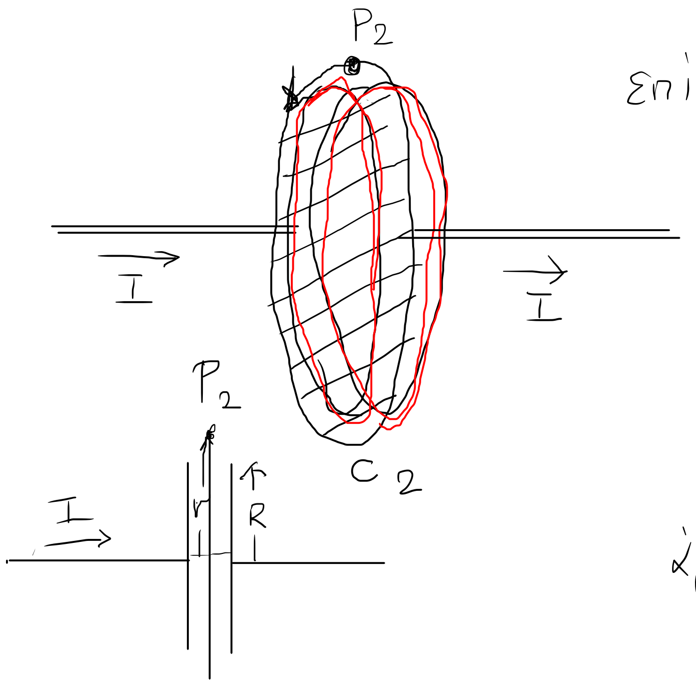
$$\frac{d}{dt}\Phi_E = \frac{d}{dt}\frac{Q}{\varepsilon_0 k} = \frac{I}{\varepsilon_0 k}.$$

Αν βάλω αυτά που βρήκα στον αναθεωρημένο νόμο Ampere έχω

$$2\pi r B = \mu_0\left(0 + \varepsilon_0 k \cdot \frac{I}{\varepsilon_0 k}\right) = \mu_0 I \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Θα δω τι γίνεται στο σημείο P_2 (με κόκκινο φαίνονται οι οπλισμοί του πυκνωτή ακτίνας R) και η μαύρη επίπεδη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια είναι το όριο της καμπύλης C_2

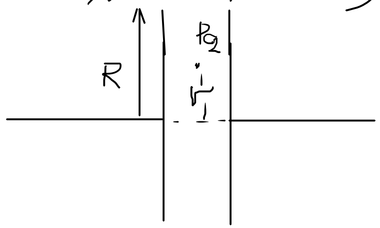


$$\oint_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B\,2\pi r \qquad I = 0$$ (δεν διαπερνά ρεύμα την επιφάνεια)

$$\Phi_E = \pi R^2 \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0 k} = \frac{Q}{\varepsilon_0 k}$$ και $$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{I}{\varepsilon_0 k}$$

άρα $$B\,2\pi r = \mu_0\left(0 + \varepsilon_0 k \cdot \frac{I}{\varepsilon_0 k}\right) = \mu_0 I$$

Για τον υπολογισμό της Ροής του Ηλ. Πεδίου μέσα από την επιφάνεια που έχει όριο την C_2 δέχθηκα ότι το Ηλ. Πεδίο έξω από τους οπλισμούς του πυκνωτή είναι 0. (Αυτό δεν είναι ακριβές, αλλά απλοποιεί τους υπολογισμούς)



Αν το P_2 είναι μέσα στον πυκνωτή, δηλ. αν $r < R$

Τότε το $B 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 k \frac{d\Phi_E}{dt}$ όπου

$$\Phi_E = \int_{S'} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0 k} = \pi r^2 \cdot \frac{\frac{Q}{\pi R^2}}{\varepsilon_0 k} = \frac{Q}{\varepsilon_0 k}\frac{r^2}{R^2}$$

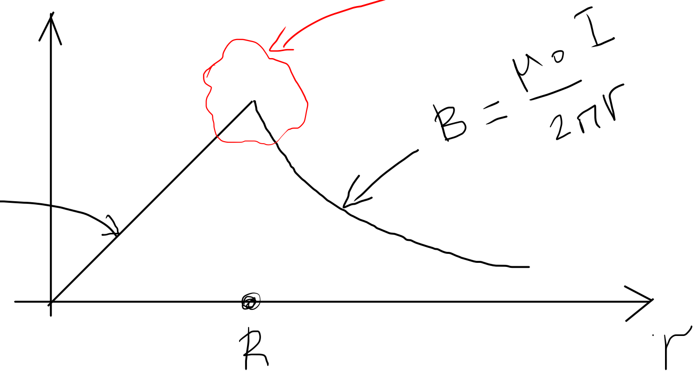
Επομένως το $\oint_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B 2\pi \cancel{r} = \mu_0 \cancel{\varepsilon_0 k} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\cancel{\varepsilon_0 k}}\frac{r^2}{R^2}\right) =$

$$= \mu_0 I \frac{r^{\cancel{2}}}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2}$$

Δηλαδή

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I r}{R^2}$$



εδω ο υπολογισμός δεν είναι ακριβής γιατί υπέθεσα ότι το Ηλ. πεδίο γίνεται απότομα 0 έξω από τους οπλισμούς του πυκνωτή.

Αυτές είναι οι εξισώσεις του Maxwell:

1η (Νόμος Gauss)

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o k}$$

← φορτίο που περιέχεται μέσα στον όγκο που περιβάλλει η κλειστή επιφάνεια

κλειστή επιφάνεια

2η (αυτή την βρήκε ο Maxwell)

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

κλειστή επιφάνεια

3η (Νόμος Ampere που διόρθωσε ο Maxwell)

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o\left(I + \varepsilon_o k \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{S}\right)$$

C κλειστή καμπύλη

ρεύμα που διαπερνά την ανοιχτή επιφάνεια

πάνω στην ανοιχτή επιφάνεια

4η (Νόμος Faraday)

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

C κλειστή καμπύλη

ανοιχτή επιφάνεια