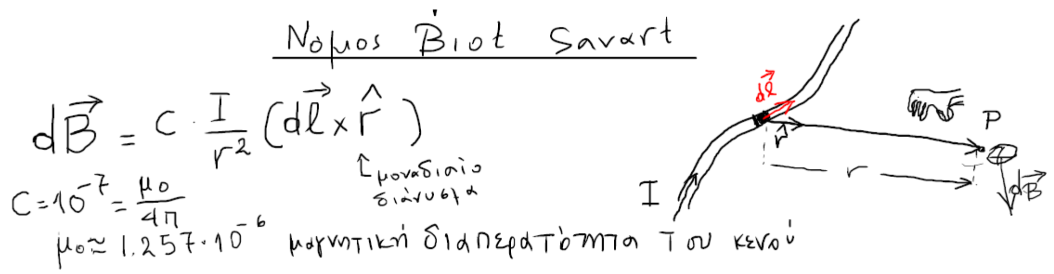
Παραδείγματα λυμένων ασκήσεων: Νόμος Biot Savart, Νόμος Ampere

<u>Ο Νόμος Biot Savart λέει:</u>

Το (στοιχειώδες) μαγνητικό πεδίο $d\vec{B}$ που δημιουργείται σε σημείο P από το στοιχειώδες τμήμα $d\vec{l}$ αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα *I* είναι:

$$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\cdot\frac{I}{r^2}\cdot d\vec{l}\times\hat{r}$$

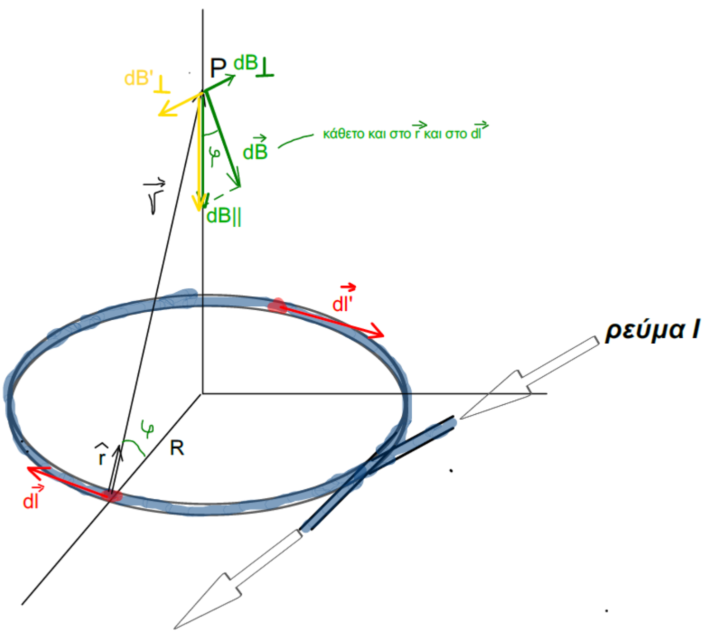
Το $d\vec{l}$ είναι διάνυσμα με μήκος dl και φορά την φορά του ρεύματος. Το $\hat{r}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του $\vec{r}$ που συνδέει τον αγωγό με το σημείο P. Την φορά του $d\vec{B}$ την βρίσκουμε με τον κανόνα του δεξιού χεριού: Ο αντίχειρας δείχνει το $d\vec{l}$, που είναι το α' μέλος στο εξωτερικό γινόμενο, τα υπόλοιπα δάκτυλα δείχνουν το $\hat{r}$, που είναι το β' μέλος στο εξωτερικό γινόμενο και λυγίζοντας τα δάκτυλα βρίσκουμε την φορά του $d\vec{B}$. Δείτε το παρακάτω σχήμα:



<u>Παράδειγμα</u>

Να υπολογισθεί το Μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί κυκλικός ρευματοφόρος αγωγός σε ένα σημείο P που βρίσκεται στην ευθεία κάθετη στο κέντρο του.

<u>Λύση</u>



Το $d\vec{l}$ και το $\hat{r}$ σχηματίζουν γωνία π/2 μεταξύ τους. Αρα $d\vec{l}\times\hat{r} = dl\cdot 1\cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = dl$. Επομένως ο νόμος Biot Savart δίνει για το μέτρο του διανύσματος $d\vec{B}$:

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \cdot \frac{I}{r^2} \cdot dl$$

Το $d\vec{B}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μία $dB_{||}$ παράλληλη στον άξονα z και μία κάθετη $dB_{\perp}$

Απέναντι από το $d\vec{l}$ βρίσκεται το $d\vec{l}'$ που δίνει το $d\vec{B}'$ που έχει $dB'_{||}$ ίσο με το $dB_{||}$, αλλά το $dB'_{\perp}$ είναι αντίθετο από το $dB_{\perp}$ και το άθροισμά τους μηδενίζεται.

Το συνολικό $\vec{B}$ είναι το άθροισμα όλων των $dB_{||}$, που δημιουργούνται από όλα τα $d\vec{l}$.

Το κάθε dl δίνει $dB_{||} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \cdot \frac{I}{R^2+Z^2} \cdot συνφ = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \cdot \frac{I}{R^2+Z^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+Z^2}}$ και το άθροισμα είναι $B_{||} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \cdot \frac{I}{R^2+Z^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+Z^2}} \cdot 2\pi R$

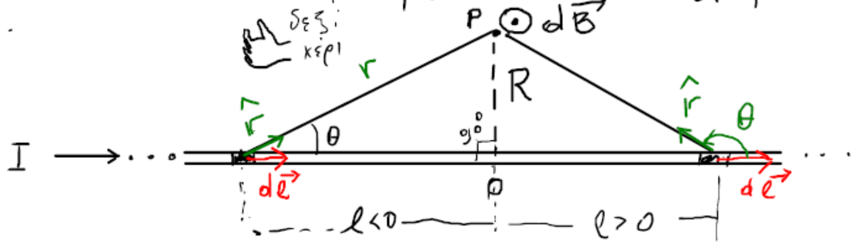
$$= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + Z^2)^{3/2}}$$

Το διάνυσμα $\vec{B} = -B_{||}\hat{k}$, όπου $\hat{k}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον z-άξονα

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το Μαγνητικό Πεδίο στο σημείο P σε απόσταση r από έναν ευθύγραμμο αγωγό «απείρου μήκους» (δηλ το μήκος του είναι πολύ μεγαλύτερο από την απόσταση r) που διαρρέεται από ρεύμα *I*

Μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένας ευθύγραμμος αγωγός με άπειρο μήκος.



Το συνολικό Μαγν. Πεδίο θα είναι το άθροισμα όλων των $d\vec{B}$ πού έχουν όλα την ίδια φορά έτσι

$$B=\int_{l=-\infty}^{l=+\infty} dB=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{r^2}\,dl\,\eta\mu\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\mu\theta}{r^2}\,dl$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{R}{l}=-\varepsilon\varphi\theta \quad \left(\begin{array}{l}\text{από } l=-\infty \\ \text{ως } l=0^- \\ \text{το } \theta\in(0,\frac{\pi}{2}) \\ \text{από } l=0^+ \\ \text{ως } l=+\infty \\ \text{το } \theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{array}\right)$$

$$\frac{l}{R}=-\sigma\varphi\theta \Rightarrow l=-R\sigma\varphi\theta \Rightarrow dl=-R(\sigma\varphi\theta)'d\theta \Rightarrow$$

$$(\sigma\varphi\theta)'=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\right)'=\frac{\sigma\upsilon\nu'\theta\,\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu'\theta}{\eta\mu^2\theta}=\frac{-\eta\mu^2\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta}=\frac{-(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)}{\eta\mu^2\theta}=-\frac{1}{\eta\mu^2\theta}$$

$$dl=\frac{R}{\eta\mu^2\theta}\,d\theta$$

Έτσι το $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\mu\theta}{r^2}\,dl$ γράφεται $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{\eta\mu\theta}{r^2}\,\frac{R}{\eta\mu^2\theta}\cdot d\theta$

Παρατηρούμε επίσης ότι $\frac{R}{r}=\eta\mu\theta$ άρα $r=\frac{R}{\eta\mu\theta}$ έτσι το ολοκλήρωμα τελικά γράφεται: $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\eta\mu\theta}{\left(\frac{\cancel{R}}{\cancel{\eta\mu\theta}}\right)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{R}}{\cancel{\eta\mu^2\theta}}\,d\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\theta=0}^{\pi}\eta\mu\theta\,d\theta$

Το $\int_0^\pi \eta\mu\theta\,d\theta=\left(-\sigma\upsilon\nu\theta\Big|_0^\pi\right)=$

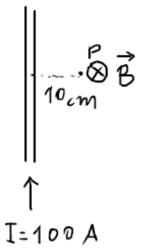
$=-\sigma\upsilon\nu\pi-(-\sigma\upsilon\nu 0)=$

$=-(-1)-(-1)=2$

Επομένως $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

Πεδίο ρευματοφόρου αγωγού «απείρου» μήκους

Αριθμητικό παράδειγμα



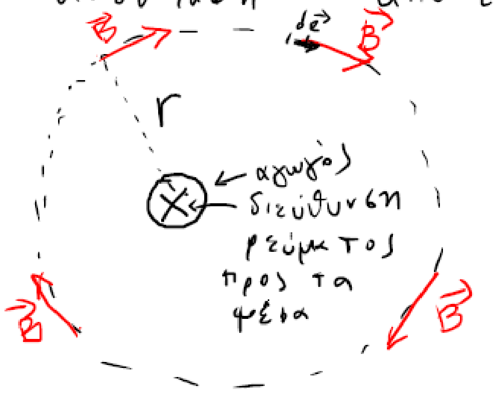
$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}=10^{-7}\cdot\frac{2\cdot100}{10^{-1}}\,T=2\cdot10^{-4}\,T=2\,G$

αν η απόσταση r γίνει 0.5 m τότε

$B=10^{-7}\cdot\frac{2\cdot100}{\frac{1}{2}}\,T=4\cdot10^{-5}\,T=0.4\,G$ (περίπου η ένταση του μ.π. της γης)

Νόμος Ampere

Είδαμε ότι με τον Νόμο Biot-Savart παίρνουμε το μαγν. πεδίο σε απόσταση r από έναν αγωγό που έχει ρεύμα I



$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\cdot I$$

Αν «περπατήσουμε» πάνω στην περιφέρεια του κύκλου και την χωρίσουμε σε «στοιχειώδη τμήματα» $d\vec{\ell}$, το εσωτερικό γινόμενο του κάθε $d\vec{\ell}$ με το $\vec{B}$ είναι $B\,d\ell$ γιατί η μεταξύ τους γωνία είναι 0

Οπότε το άθροισμα όλων των $B\,d\ell$ είναι το ολοκλήρωμα επάνω στην περιφέρεια του κύκλου:

$$\oint_{\substack{\text{επάνω}\\ \text{στην περιφέρεια}\\ \text{του κύκλου}}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, d\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

<u>Προσοχή</u>: Το $d\vec{\ell}$ επάνω στην περιφέρεια του κύκλου δεν το μπερδεύουμε με το $d\vec{\ell}$ επάνω στον αγωγό ρεύματος που χρησιμοποιούμε στον Νόμο Biot-Savart

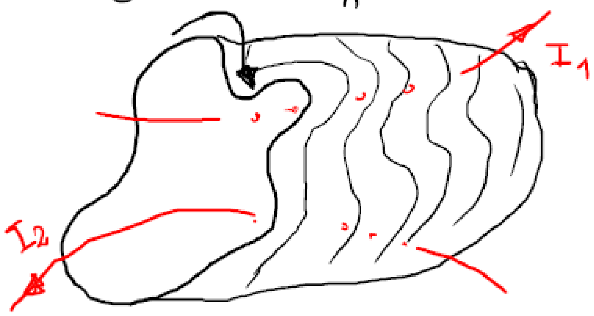
Νόμος Ampere

$$\boxed{\oint_{\substack{\text{κλειστή}\\ \text{διαδρομή}}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I}$$

Σχεδόν η 3η εξίσωση Maxwell

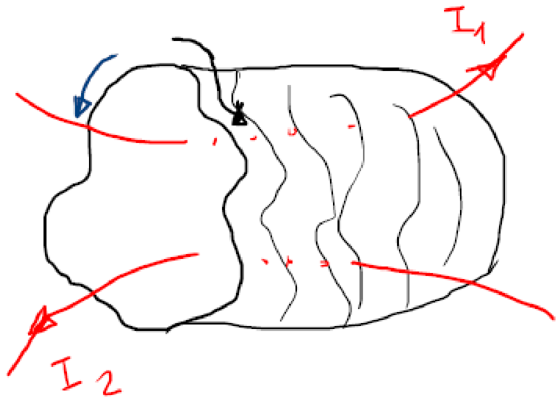
Το ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου πάνω σε μία κλειστή διαδρομή ισούται με το μ_0 επί το ρεύμα το οποίο «περιβάλλεται» από την κλειστή διαδρομή.

Θα δούμε ακριβώς τι σημαίνει η έκφραση: το ρεύμα «περιβάλλεται» από την κλειστή διαδρομή.



Η κλειστή διαδρομή είναι το όριο μιας ανοικτής επιφάνειας που μπορεί να είναι επίπεδη, αλλά μπορεί και να μην είναι επίπεδη. Το ρεύμα θα πρέπει να διαπερνά αυτή την επιφάνεια.

Αν περπατάμε την κλειστή διαδρομή με φορά σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού, τότε



$$\oint_{\text{κλειστή διαδρομή}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

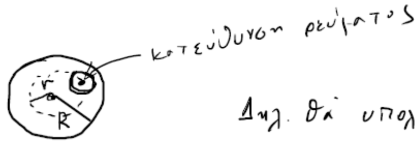
δηλ. με τον κανόνα του δεξιού χεριού ο αντίχειρας δείχνει την φορά της διαδρομής και τα λυγισμένα δάχτυλα δείχνουν το ρεύμα που θα έχει πρόσημο +

$$\oint_{\substack{\text{κλειστή διαδρομή} \\ \text{με αντίθετη φορά}}} \vec{B}\cdot d\ell = \mu_0 (I_2 - I_1)$$

Στην εφαρμογή του νόμου Ampere για τους υπολογισμούς προσπαθούμε να βρίσκουμε εύκολες κλειστές διαδρομές (π.χ. κύκλους ή τετράγωνα) και μετά να ορίζουμε την επιφάνεια της οποίας είναι όριο η κλειστή διαδρομή.

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ampere θα υπολογίσουμε το Μαγν. Πεδίο στο εσωτερικό ενός αγωγού με ρεύμα.

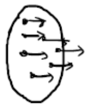
αγωγός 3-διάστατη εικόνα



κάθετη τομή

Δηλ. θα υπολογίσουμε το Μ.Π. για $r < R$

Ορίζουμε την πυκνότητα ρεύματος: $\frac{I}{S}$, S το εμβαδόν της διατομής του αγωγού



η πυκνότητα ρεύματος είναι ομοιόμορφη σε όλη την διατομή: Ίδιος αριθμός ηλεκτρονίων σε κάθε στοιχειώδες εμβαδόν και όλα τα ηλεκτρόνια με την ίδια ταχύτητα ολίσθησης.

Η εφαρμογή του νόμου Ampere σε κύκλο ακτίνας $r < R$ δίνει:

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I'$ όπου I' = πυκνότητα ρεύματος · εμβαδόν κύκλου ακτίνας r

δηλ. $I' = \left(\frac{I}{\pi R^2}\right)\cdot \pi r^2 = I\frac{r^2}{R^2}$ έτσι:

$$B\,2\pi \cancel{r} = \mu_0 I \frac{r^{\cancel{2}}}{R^2} \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2}$$ δηλ. B ανάλογο του r

Ενώ έξω από τον αγωγό έχουμε βρει ότι B ανάλογο του $\frac{1}{r}$

$\left(B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\right)$. Για $r=R$ οι δύο τύποι δίνουν ίδιο αποτέλεσμα.