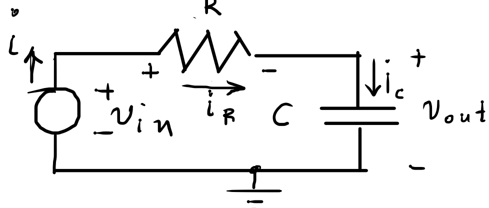
Συνέχεια στα παραδείγματα εφαρμογής νόμων Kirchoff.

Έχουμε το κύκλωμα



Πάλι ο KCL δίνει $i = i_R = i_C$

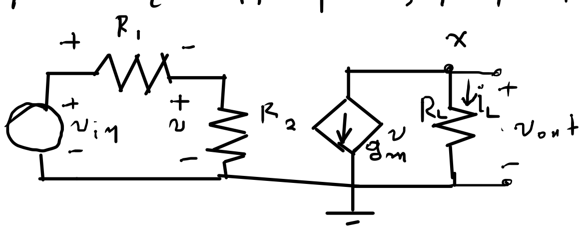
και ο KVL δίνει $v_{in} = v_R + v_{out}$

Οι σχέσεις ρεύματος-τάσης είναι: $v_R = i \cdot R$ και $i = C\dfrac{dv_C}{dt} = C\dfrac{dv_{out}}{dt}$

Επομένως $v_{in} = C\dfrac{dv_{out}}{dt} \cdot R + v_{out} \Leftrightarrow \dfrac{dv_{out}}{dt} + \dfrac{1}{CR}v_{out} = \dfrac{v_{in}}{CR}$

Δηλαδή καταλήγουμε σε μια διαφορική εξίσωση με άγνωστο το $v_{out}(t)$. Θα δούμε την λύση της παρακάτω. Γενικά επειδή σχεδόν πάντα καταλήγουμε σε διαφορικές εξισώσεις, τις μετατρέπουμε σε αλγεβρικές εξισώσεις με διάφορες μεθόδους.

Επόμενο παράδειγμα με εξαρτημένη πηγή ρεύματος από τάση:



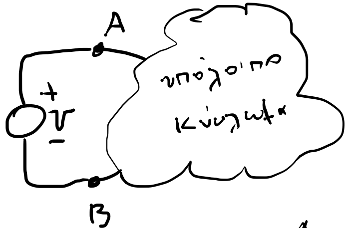
KCL στον x $g_m v + i_L = 0 \Leftrightarrow i_L = -g_m v$

$i_L = \dfrac{v_{out}}{R_L}$ άρα $v_{out} = -g_m R_L v$

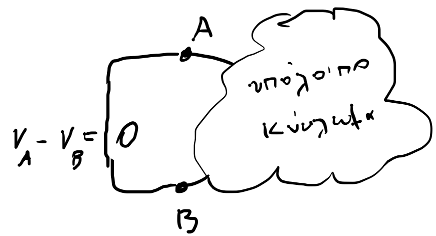
$v = v_{R2} = v_{in} \cdot \dfrac{R_2}{R_1 + R}$ επομένως $v_{out} = -g_m R_L \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} v_{in}$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Τι σημαίνει "μηδενίζω" μιά ανεξάρτητη πηγή τάσης συνδεμένη στους κόμβους Α και Β;

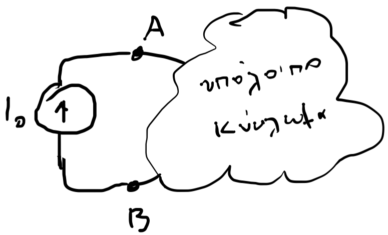


Η τάση $V_A - V_B$ από V γίνεται 0

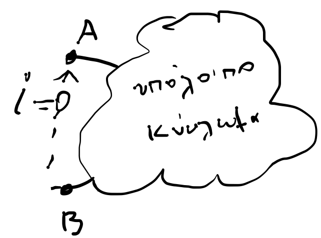


Δηλαδή αντικαθιστώ την ανεξάρτητη πηγή τάσης με βραχυκύκλωμα.

Τι σημαίνει "μηδενίζω" μια ανεξάρτητη πηγή ρεύματος συνδεμένη στους κόμβους Α και Β



Το ρεύμα από I_0 γίνεται 0



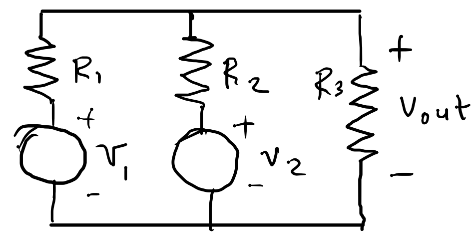
Δηλαδή βγάζω την πηγή ρεύματος και αφήνω ανοιχτοκύκλωμα.

Θεώρημα της υπέρθεσης ή αρχή της επαλληλίας

Η απόκριση ενός γραμμικού κυκλώματος σε ένα σύνολο από ανεξάρτητες πηγές (τάσης ή ρεύματος) ισούται με το άθροισμα των αποκρίσεων εξαιτίας κάθε μιας πηγής ξεχωριστά μηδενίζοντας τις υπόλοιπες.

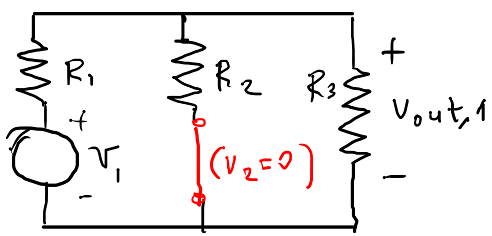
Παράδειγμα

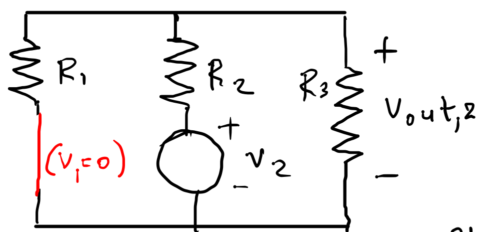
Η απόκριση V_{out} του κυκλώματος:



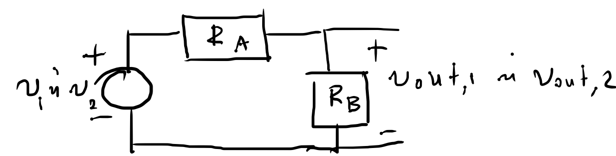
είναι

$V_{out} = V_{out,1} + V_{out,2}$ όπου





Παρατηρούμε ότι και τα δύο κυκλώματα έχουν την μορφή



Για το πρώτο $R_A = R_1$ και $R_B = R_2 || R_3$
(παράλληλη σύνδεση)

Για το δεύτερο $R_A = R_2$ και $R_B = R_1 || R_3$

Τα κυκλώματα είναι "διαιρέτες τάσης", οπότε:

$$V_{out,1} = V_1 \cdot \frac{R_B}{R_A + R_B} = V_1 \cdot \frac{R_2 \| R_3}{R_1 + R_2 \| R_3} \qquad R_2 \| R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad \text{άρα}$$

$$V_{out,1} = V_1 \cdot \frac{\left(R_2 R_3 / (R_2 + R_3)\right) \cdot (R_2 + R_3)}{\left(R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)\right) \cdot (R_2 + R_3)} = V_1 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

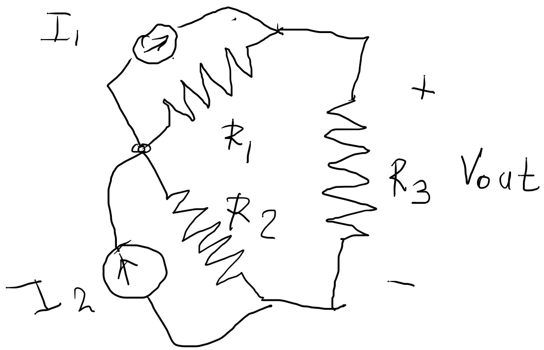
$$V_{out,2} = V_2 \cdot \frac{R_B}{R_A + R_B} = V_2 \cdot \frac{R_1 \| R_3}{R_2 + R_1 \| R_3} \qquad R_1 \| R_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \quad \text{άρα}$$

$$V_{out,2} = V_2 \cdot \frac{\left(\frac{R_1 R_3}{(R_1 + R_3)}\right) \cdot (R_1 + R_3)}{\left(R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3)\right) \cdot (R_1 + R_3)} = V_2 \cdot \frac{R_1 R_3}{R_2 R_1 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

Επομένως $$V_{out} = \frac{R_2 R_3 \cdot V_1 + R_1 R_3 \cdot V_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

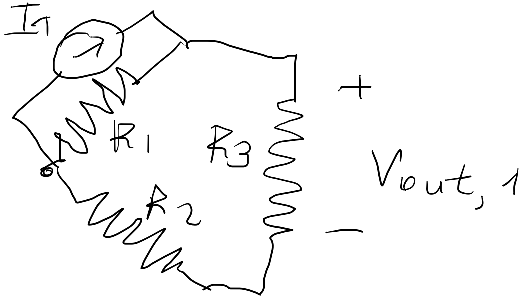
Παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος επαλληλίας:

Έχω το κύκλωμα:



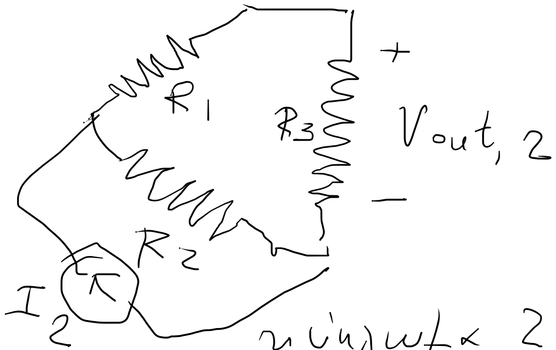
Σύμφωνα με το θεώρημα της επαλληλίας

$$V_{out} = V_{out,1} + V_{out,2}$$ όπου:



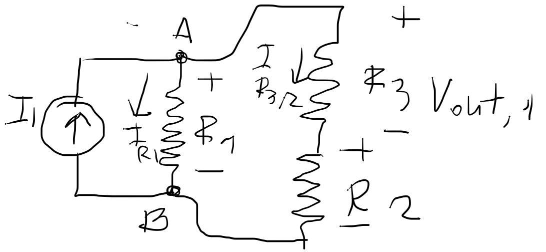
κύκλωμα 1

και



κύκλωμα 2

κυκλωμα 1



$$I_1 = I_{R_1} + I_{R_{3,2}}$$

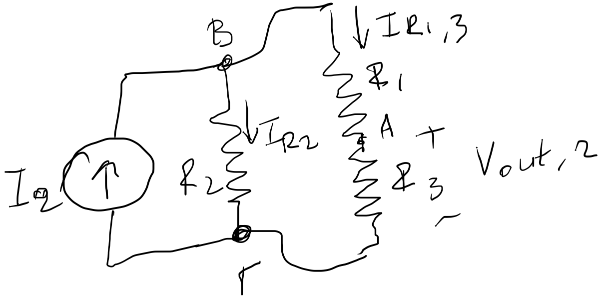
$$I_{R_{3,2}} = \frac{V_{AB}}{R_3 + R_2}$$

$$\frac{V_{AB}}{I_1} = R_1 // (R_3 + R_2)$$ άρα

$$V_{AB} = I_1 \cdot (R_1 // (R_3 + R_2)) \Rightarrow I_{R_{3,2}} = \frac{I_1 \cdot (R_1 // (R_3 + R_2))}{R_3 + R_2}$$ και $V_{out,1} = I_{R_{3,2}} \cdot R_3$ δηλ.

$$V_{out,1} = I_1 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_2} \cdot (R_1 // (R_3 + R_2))$$

Όμοια το κύκλωμα 2 είναι:



$$V_{B\Gamma} = I_2 \cdot (R_2 // (R_1 + R_3))$$

$$I_{R1,3} = \frac{V_{B\Gamma}}{R_1 + R_3} \quad \text{δηλ} \quad I_{R1,3} = \frac{I_2 \cdot (R_2 // (R_1 + R_3))}{R_1 + R_3}$$

$$V_{out,2} = I_{R1,3} \cdot R_3 = I_2 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot (R_2 // (R_1 + R_3))$$

Τελικά $V_{out} = I_1 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_2} \cdot (R_1 // (R_3 + R_2)) + I_2 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot (R_2 // (R_1 + R_3))$

$$(R_1 // (R_3 + R_2)) = \frac{R_1 (R_3 + R_2)}{R_1 + R_3 + R_2} \quad \text{και} \quad R_2 // (R_1 + R_3) = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_2 + R_1 + R_3}$$

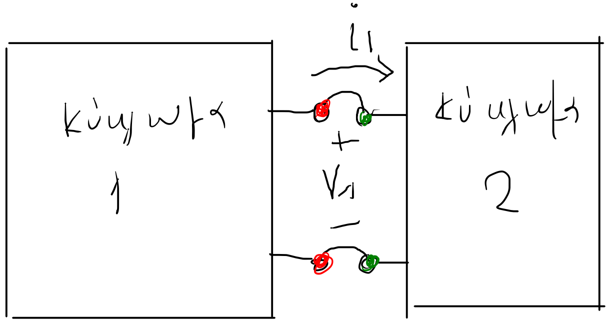
θυμίζω ότι όταν 2 αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες παράλληλα

$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \Longleftrightarrow R_{o\lambda} = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b}$$

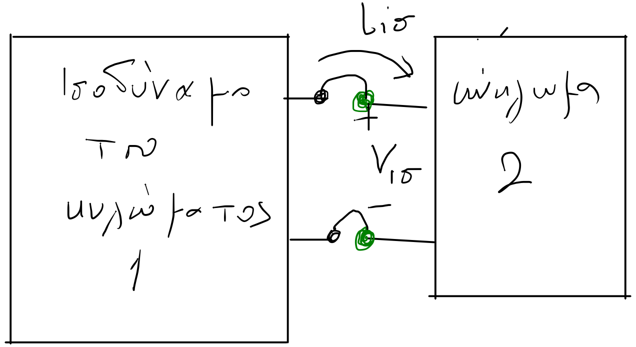
Τελικά $V_{out} = I_1 \cdot \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + I_2 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

Η έννοια του ισοδύναμου κυκλώματος

Έχω το "κύκλωμα 1" και το "κύκλωμα 2". Τα συνδέσουμε και στους κόμβους σύνδεσης (ακροδέκτες εξόδου του 1 και ακροδέκτες εισόδου του 2) δημιουργείται τάση V και στον κλάδο η "κύκλωμα 2" περνάει ένα ρεύμα i



Ισοδύναμο του κυκλώματος 1 ως πρός την επίδρασή του στο κύκλωμα 2 είναι ένα άλλο κύκλωμα, το οποίο αν συνδεθεί στους ακροδέκτες εισόδου του κυκλώματος 2, θα δώσει ίδια τάση V και ίδιο ρεύμα i με αυτό που θα υπήρχε λόγω του κυκλώματος 1

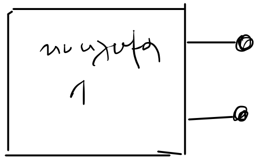


$$V_{ισ} = V_1$$
$$i_{ισ} = i_1$$

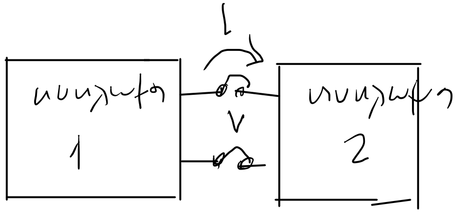
Δηλ. το κύκλωμα 2 "δεν καταλαβαίνει" αν στην είσοδό του έχει το κύκλωμα 1 ή το ισοδύναμό του.

Θεώρημα Thevenin

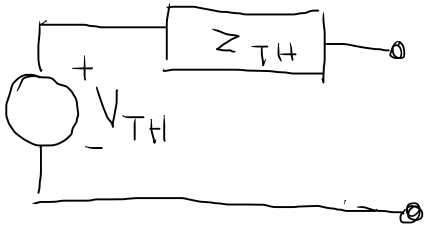
Έστω το κύκλωμα 1



του οποίου οι ακροδέκτες εξόδου συνδέονται με τους ακροδέκτες εισόδου του κυκλώματος 2:

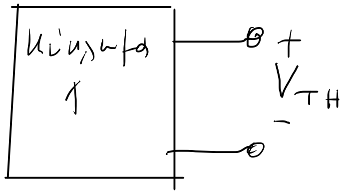


Το κύκλωμα 1 είναι ισοδύναμο ως προς την επίδρασή του στο κύκλωμα 2 με το παρακάτω κύκλωμα:



(Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin)

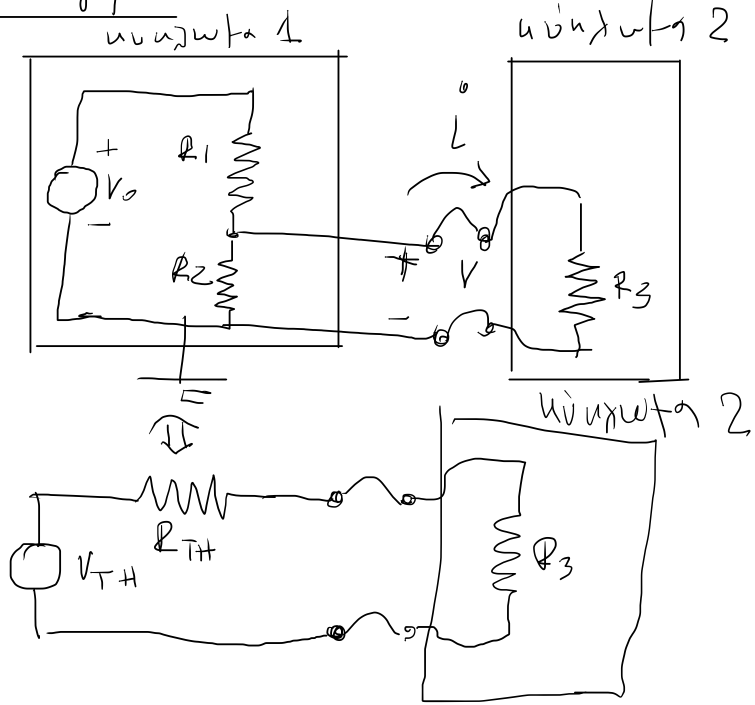
Την τιμή του V_{TH} την βρίσκω ως εξής: Αφαιρώ από την έξοδο του κυκλώματος 1 το κύκλωμα 2. Η τάση ανάμεσα στους ακροδέκτες εξόδου του κυκλώματος 1 είναι η V_{TH}.



Την τιμή του Z_{TH} την βρίσκω ως εξής: Στο εσωτερικό του κυκλώματος 1, βραχυκυκλώνω (μηδενίζω) τις ανεξάρτητες πηγές τάσης και ανοιχτοκυκλώνω (μηδενίζω) τις ανεξάρτητες πηγές ρεύματος.

Η εμπέδηση (αντίσταση) που προκύπτει ανάμεσα στους ακροδέκτες εξόδου του κυκλώματος 1 είναι η Z_{TH}.

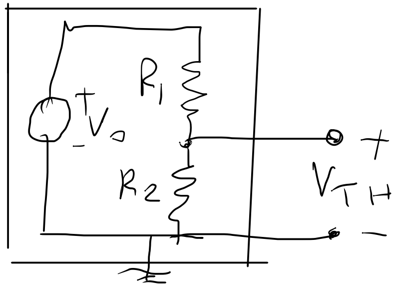
Παράδειγμα



$$V = V_0 \cdot \frac{(R_2 // R_3)}{R_1 + (R_2 // R_3)} = V_0 \cdot \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = V_0 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

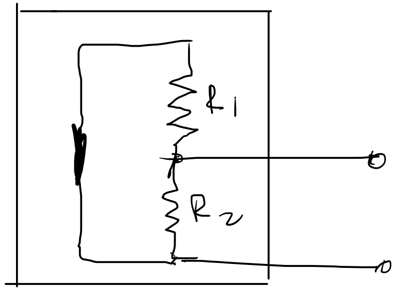
$$i = \frac{V}{R_3} = V_0 \cdot \frac{\frac{R_2}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

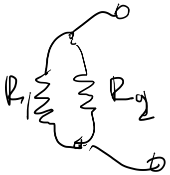
Το V_{TH} το βρίσκω αφαιρώντας το κύκλωμα 2 από την έξοδο του κυκλώματος 1



$$V_{TH} = V_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

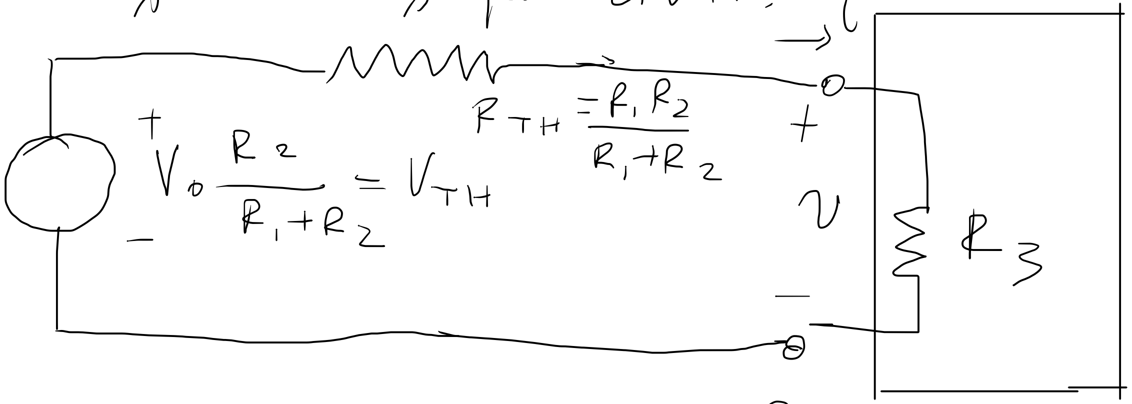
Το R_{TH} το βρίσκω βραχυκυκλώνοντας την ανεξάρτητη πηγή τάσης:





άρα $R_{TH} = R_1//R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ δηλ. το συνολικό κύκλωμα είναι:

κύκλωμα 2



$V = V_{TH} \cdot \frac{R_3}{R_{TH}+R_3}$, $i = \frac{V}{R_3}$ δηλ. $V = V_0 \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{R_3}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3} =$

$= V_0 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + (R_1+R_2)\cdot R_3} = V_0 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$, $i = V_0 \frac{R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$