Ενδεικτικές ασκήσεις

1. Απόσβεση φάσης

Δίνεται σύστημα δύο καταστάσεων Σ με χώρο Hilbert $\mathcal{H}_\Sigma$.

Επίσης δίνεται σύστημα Π με χώρο Hilbert $\mathcal{H}_\Pi$ που έχει σαν βάση τις τρεις ορθοκανονικές καταστάσεις $|0\rangle_\pi$, $|1\rangle_\pi$ και $|2\rangle_\pi$.

Θεωρούμε ότι το Π αποτελεί το περιβάλλον του Σ και ότι υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ Σ και Π.

Δίνεται ο ακόλουθος (μοναδιακός) κανόνας χρονικής εξέλιξης:

$$\hat{U}\,|\uparrow\rangle_\Sigma \otimes |0\rangle_\pi = |\uparrow\rangle_\Sigma \otimes \left(\sqrt{1-p}\;|0\rangle_\pi + \sqrt{p}\;|1\rangle_\pi\right)$$

$$\hat{U}\,|\downarrow\rangle_\Sigma \otimes |0\rangle_\pi = |\downarrow\rangle_\Sigma \otimes \left(\sqrt{1-p}\;|0\rangle_\pi + \sqrt{p}\;|2\rangle_\pi\right)$$

όπου $|\uparrow\rangle_\Sigma$, $|\downarrow\rangle_\Sigma$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}_\Sigma$

- Να βρεθούν οι τελεστές Kraus που καθορίζουν την χρονική εξέλιξη του (ανηγμένου) πίνακα πυκνότητας του Σ.
- - Θεωρώντας ότι το p περιγράφει τη πιθανότητα αλληλεπίδρασης του Σ με το Π σε διάστημα Δt να βρεθεί η γενική μορφή του πίνακα πυκνότητας του Σ για $t \to \infty$. (Θέστε $p \sim \Delta t$).

<u>Λύση</u>: Θα έχουμε 3 τελεστές Kraus

$$\hat{K}_0 = {}_\Pi\langle 0|\hat{U}|0\rangle_\Pi = \sqrt{1-p}\;\hat{I}_\Sigma \quad \left(= \begin{bmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix}\right)$$

$$\hat{K}_1 = {}_\Pi\langle 1|\hat{U}|0\rangle_\Pi = \sqrt{p}\;|\uparrow\rangle_\Sigma {}_\Sigma\langle\uparrow| \quad \left(= \begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\hat{K}_2 = {}_\Pi\langle 2|\hat{U}|0\rangle_\Pi = \sqrt{p}\;|\downarrow\rangle_\Sigma {}_\Sigma\langle\downarrow| \quad \left(= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{bmatrix}\right)$$

Προφανώς ισχύει: $|\uparrow\rangle_\Sigma {}_\Sigma\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle_\Sigma {}_\Sigma\langle\downarrow| = \hat{I}_\Sigma$ οπότε: $\sum_{i=0}^{2} \hat{K}_i^\dagger \hat{K}_i = \hat{I}_\Sigma$

Έστω $\hat{\rho}_\Sigma(0) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{01}^* & 1-\rho_{00} \end{pmatrix}$ τότε:

$$\underbrace{\Phi}_{\substack{\text{υπερτελεστής} \\ \text{απεικόνιση Kraus}}}\left(\hat{\rho}_\Sigma(0)\right) = \sum_{j=0}^{2} \hat{K}_j \, \hat{\rho}_\Sigma(0) \, \hat{K}_j^+ = \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-p)\rho_{01} \\ (1-p)\rho_{01}^* & 1-\rho_{00} \end{pmatrix}$$

Οπότε:

$$\underbrace{\Phi \circ \Phi \circ \ldots \circ \Phi}_{N \text{ φορές}}\left(\hat{\rho}_\Sigma(0)\right) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-p)^N \rho_{01} \\ (1-p)^N \rho_{01}^* & 1-\rho_{00} \end{pmatrix}$$

Αν $p = \Gamma \Delta t$ και $t = N \Delta t$ τότε:

$$\hat{\rho}_\Sigma(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \left(1-\frac{\Gamma t}{N}\right)^N \rho_{01} \\ \left(1-\frac{\Gamma t}{N}\right)^N \rho_{01}^* & 1-\rho_{00} \end{pmatrix}$$

και στο όριο $\Delta t \to 0$ $(N \to \infty)$ με $N\Delta t = t$

παίρνουμε $\hat{\rho}_\Sigma(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & e^{-\Gamma t}\rho_{01} \\ e^{-\Gamma t}\rho_{01}^* & 1-\rho_{00} \end{pmatrix}$

οπότε στο όριο $t \to \infty$ παίρνουμε:

$$\lim_{t\to\infty} \rho_\Sigma(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 \\ 0 & 1-\rho_{00} \end{pmatrix}$$

Μπορείτε να αποφανθείτε αν η κατάσταση $\hat{\rho}_\Sigma(\infty)$ είναι καθαρή ή όχι;

<u>Παρατήρηση</u>: Στην άσκηση αυτή υποθέσαμε ότι η αλληλεπίδραση δεν μεταβάλλει την κατάσταση του Σ (qubit). Δηλ. η ενέργεια που απαιτείται για να γίνει η μετάβαση $|\uparrow\rangle_\Sigma \leftrightarrow |\downarrow\rangle_\Sigma$ είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή που απαιτείται για τις μεταβάσεις

π.χ. $|0\rangle_\Pi \to |1\rangle_\Pi$, $|2\rangle_\Pi$ του περιβάλλοντος Π.

2. Απόσβεση πλάτους

Θεωρείστε τώρα το εξής πρόβλημα. Ένα δισταθμικό άτομο όταν είναι στη θεμελιώδη του κατάσταση (έστω $|\uparrow\rangle_A$) δεν υφίσταται καμμία μεταβολή στην κατάστασή του. Αν είναι στη διεγερμένη του κατάσταση ($|\downarrow\rangle_A$) τότε αποδιεγείρεται εκπέμποντας ακτινοβολία την οποία απορροφά το περιβάλλον. Αυτή η αποδιέγερση γίνεται με πιθανότητα p. Θεωρείστε για απλότητα ότι το περιβάλλον μπορεί και αυτό να βρεθεί σε δύο καταστάσεις:

την θεμελιώδη $|0\rangle_\Pi$ και τη διεγερμένη $|1\rangle_\Pi$

Η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από τον ακόλουθο τελεστή χρονικής εξέλιξης:

$$\hat{U}|\uparrow\rangle_\Sigma \otimes |0\rangle_\Pi = |\uparrow\rangle_\Sigma \otimes |0\rangle_\Pi$$

$(\Sigma = A)$

$$\hat{U}|\downarrow\rangle_\Sigma \otimes |0\rangle_\Pi = \sqrt{1-p}\;|\downarrow\rangle_\Sigma \otimes |0\rangle_\Pi + \sqrt{p}\;|\uparrow\rangle_\Sigma \otimes |1\rangle_\Pi$$

- Βρείτε τους τελεστές Kraus που καθορίζουν την χρονική εξέλιξη του Σ (δηλ. του ατόμου A)

•• Κάνοντας την υπόθεση $p \sim \Delta t$ όπως στην άσκηση 1 προσδιορίστε τον πίνακα πυκνότητας $\hat{\rho}_\Sigma(t)$ στο όριο $\Delta t \to 0$.

••• Ελέγξτε αν η $\hat{\rho}_\Sigma(\infty)$ αντιστοιχεί σε μικτή ή καθαρή κατάσταση.

•••• Προσδιορίστε την εξίσωση Lindblad που υπακούει η $\hat{\rho}_\Sigma(t)$.

Επίλυση: Ακολουθούμε διαδικασία παρόμοια με αυτήν της άσκησης 1. Θέτουμε και πάλι $p = \Gamma\Delta t$

Εδώ έχουμε μόνο 2 τελεστές Kraus:

$$\hat{K}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \hat{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Θα βρούμε την αντίστοιχη εξίσωση Lindblad.

$$\text{Ο} \quad \hat{K}_0(\Delta t) \quad \text{είναι:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\Gamma\Delta t} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\frac{\Gamma}{2}\Delta t \end{pmatrix}$$

που γράφεται ως:

$$\hat{K}_0(\Delta t) = \left(1 - \frac{\Gamma}{4}\Delta t\right)\hat{I} + \frac{\Gamma}{4}\Delta t\,\hat{\sigma}_z$$

ενώ ισχύει:

$$\hat{K}_1(\Delta t) = \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma\Delta t}\,\left(\hat{\sigma}_x + i\,\hat{\sigma}_y\right)$$

Οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε τους αντίστοιχους τελεστές Lindblad. Επειδή στη γραφή: $\hat{K}_o(\Delta t) = \hat{I} - (\; + i\hat{H})\Delta t$ προκύπτει ότι $\hat{H} = 0$, $\hat{D} = -\frac{\Gamma}{4}(\hat{I} - \hat{\sigma}_z)$

Επίσης $\hat{R}_1 = \frac{\sqrt{\Gamma}}{2}(\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y)$

Θέτουμε $\hat{\sigma}_{\pm} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)$ οπότε η εξίσωση Lindblad στο τρέχον πρόβλημα γράφεται:

$$\boxed{\frac{d\hat{\rho}_\Sigma(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho}_\Sigma(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}_\Sigma(t)\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_+\hat{\rho}_\Sigma(t)\hat{\sigma}_-}$$