# Το $\phi(t)=\int_0^t \Delta B(\tau)d\tau$ ως διαδικασία Wiener

Ας υποθέσουμε ότι το $\Delta B$ κάθε χρονική στιγμή παίρνει τυχαία τιμή από μια ομοιόμορφη κατανομή στο $[-\Delta B_{max}, \Delta B_{max}]$. Οι τιμές του $\Delta B$ σε δυο διαφορετικές χρονικές στιγμές $t$ και $t'$ είναι ασυσχέτιστες:

$$\langle \Delta B(t)\Delta B(t')\rangle = G\,\delta(t-t') \qquad \text{ενώ} \qquad \langle \Delta B(t)\rangle = 0$$

Τότε μπορεί να δείξει κανείς ότι το $\phi(t)=\int_0^t \Delta B(\tau)d\tau$ αποτελεί στοχαστική διαδικασία Wiener με:

$$P(\phi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\phi}\, e^{-\frac{\phi^2}{2\sigma_\phi^2}} \qquad \text{όπου} \qquad \sigma_\phi^2 = \underbrace{D_\phi}_{\text{συντελεστής διάχυσης}} t$$

Θα υπολογίσουμε τον ανηγμένο πίνακα πυκνότητας σε αυτή την περίπτωση ολοκληρώνοντας ως προς $\phi$

Ο πίνακας πυκνότητας, όπως δείξαμε, δίνεται από την σχέση:

$$\hat{\rho}_\Sigma(t) = \cos^2\frac{\mu\phi(t)}{\hbar}\,\hat{\rho}_\Sigma(0) + \sin^2\frac{\mu\phi(t)}{\hbar}\,\hat{\sigma}_z\hat{\rho}_\Sigma(0)\hat{\sigma}_z + \frac{i}{2}\sin\frac{2\mu\phi(t)}{\hbar}\left[\hat{\sigma}_z, \hat{\rho}_\Sigma(0)\right]$$

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2\frac{\mu\phi(t)}{\hbar} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2i\mu\phi(t)}{\hbar}} + e^{-\frac{2i\mu\phi(t)}{\hbar}}\right)\\
\sin^2\frac{\mu\phi(t)}{\hbar} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2i\mu\phi(t)}{\hbar}} + e^{-\frac{2i\mu\phi(t)}{\hbar}}\right)\\
\sin\frac{2\mu\phi(t)}{\hbar} &= \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{2i\mu\phi(t)}{\hbar}} - e^{-\frac{2i\mu\phi(t)}{\hbar}}\right)
\end{aligned}\right\}$$

Χρειάζεται ο υπολογισμός:

$$\left\langle e^{\pm\frac{2i\mu\phi(t)}{\hbar}}\right\rangle_\phi = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi\, P(\phi,t)\, e^{\pm\frac{2i\mu\phi(t)}{\hbar}}}_{\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\phi}\, e^{-\frac{\phi^2}{2\sigma_\phi^2}}\; e^{\pm\frac{2i\mu\phi(t)}{\hbar}}}_{\text{συμπλήρωση τετραγώνου στον εκθέτη}}}$$

$$\Rightarrow \left\langle e^{\pm\frac{2i\mu\phi}{\hbar}}\right\rangle_\phi = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\phi}\, e^{-\left(\frac{\phi}{\sigma_\phi\sqrt{2}} \mp i\,\frac{\mu\sigma_\phi\sqrt{2}}{\hbar}\right)^2}}_{=1}\; e^{-\frac{2\mu^2\sigma_\phi^2}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle e^{\pm\frac{2i\mu\phi}{\hbar}}\right\rangle_\phi = e^{-\gamma t}}$$

όπου $\sigma_\phi^2 = Dt$ και $\boxed{\gamma = \frac{2\mu^2 D}{\hbar^2}}$

Έτσι παίρνουμε για αυτή την περίπτωση:

$$\hat{\rho}_{αν.Σ}(t) = \frac{1}{2}(1+e^{-\gamma t})\hat{\rho}_{Σ}(0) + \frac{1}{2}(1-e^{-\gamma t})\hat{\sigma}_z \hat{\rho}_{Σ}(0)\hat{\sigma}_z$$

που μπορεί να γραφεί με τελεστές Kraus ως:

$$\hat{\rho}_{αν,Σ}(t) = \hat{\tilde{K}}_0(t)\hat{\rho}_{Σ}(0)\hat{\tilde{K}}_0^{+}(t) + \hat{\tilde{K}}_1(t)\hat{\rho}_{Σ}(0)\hat{\tilde{K}}_1^{+}(t)$$

όπου: $\underbrace{\hat{\tilde{K}}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+e^{-\gamma t})}\,\hat{I} \quad \text{και} \quad \hat{\tilde{K}}_1(t) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-e^{-\gamma t})}\,\hat{\sigma}_z}$

Οι τελεστές Kraus $\hat{\tilde{K}}_0(t)$ και $\hat{\tilde{K}}_1(t)$ διαφέρουν από τους $\hat{K}_0(t)$, $\hat{K}_1(t)$ της προηγούμενης περίπτωσης

Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε:

- Αρχικά, τα κοινά στοιχεία των δύο περιπτώσεων
- Στη συνέχεια, την σημασία (σε επίπεδο περιγραφής) των διαφορών τους

# Σπιν σε μαγνητικό πεδίο με στοχαστικές διακυμάνσεις

## Φαινομενολογικά χαρακτηριστικά

**Σενάριο 1**

Τυχαία διακύμανση, χρονικά σταθερή

**Σενάριο 2**

Ασυσχέτιστη τυχαία διακύμανση, χρονικά μεταβαλλόμενη

Αρχικός πίνακας πυκνότητας

$$\rho^{(1)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} e^{-\Gamma^2 t^2} \\ \rho^*_{12} e^{-\Gamma^2 t^2} & 1-\rho_{11} \end{pmatrix} \Leftarrow \hat{\rho}^{(0)}_{\Sigma} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho^*_{12} & 1-\rho_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow \rho^{(2)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} e^{-\gamma t} \\ \rho^*_{12} e^{-\gamma t} & 1-\rho_{11} \end{pmatrix}$$

Μέτρηση του $\hat{\sigma}_x \rightarrow \langle \hat{\sigma}_x \rangle_{\hat{\rho}_{\alpha\nu,\Sigma}}$

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle_{\hat{\rho}^{(1)}_{\alpha\nu,\Sigma}}(t) = \mathrm{Tr}\left[\hat{\sigma}_x \rho^{(1)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)\right] = 2\,\mathrm{Re}\,\rho_{12}\, e^{-\Gamma^2 t^2}$$

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle_{\rho^{(2)}_{\alpha\nu,\Sigma}}(t) = \mathrm{Tr}\left[\hat{\sigma}_x \rho^{(2)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)\right] = 2\,\mathrm{Re}\,\rho_{12}\, e^{-\gamma t}$$

Μηδενισμός των όρων συμβολής για $t \rightarrow \infty$

$\Downarrow$

απώλεια συνοχής φάσης (decoherence)

Είδαμε ότι το κοινό χαρακτηριστικό των δύο σεναρίων για τις στοχαστικές διακυμάνσεις του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου είναι ότι οδηγούν στην απώλεια συνοχής φάσης (decoherence) μέσω της χρονικής εξέλιξης του πίνακα πυκνότητας που χαρακτηρίζει το Σ (ανηγμένος πίνακας πυκνότητας)

$\Downarrow$

Γενική ιδιότητα ανοικτών κβαντικών συστημάτων

Βλέπουμε όμως ότι η χρονική εξέλιξη που οδηγεί στην απώλεια συνοχής φάσης εξαρτάται από το είδος στοχαστικότητας του περιβάλλοντος

$\swarrow$ χρονικά ανεξάρτητες στοχαστικές διακυμάνσεις $\sim e^{-\Gamma^2 t^2}$

$\searrow$ χρονικά μεταβαλλόμενες στοχαστικές διακυμάνσεις $\sim e^{-\gamma t}$

Αξίζει να διερευνήσουμε περαιτέρω τις διαφορές των δύο σεναρίων.
Θα επικεντρωθούμε στη χρονική εξέλιξη του ανηγμένου πίνακα πυκνότητας $\hat{\rho}_{αν,Σ}(t)$ για μικρό χρονικό διάστημα $\Delta t$.

Θα υποθέσουμε ότι οι τελεστές Kraus καθορίζουν την χρονική εξέλιξη στο διάστημα $[t, t+\Delta t]$ μέσω της σχέσης:

$$\hat{\rho}_{αν,Σ}(t+\Delta t) = \hat{K}_0(\Delta t)\,\hat{\rho}_{αν,Σ}(t)\,\hat{K}_0^{+}(\Delta t) + \hat{K}_1(\Delta t)\,\hat{\rho}_{αν,Σ}(t)\,\hat{K}_1^{+}(\Delta t)$$

γενικεύοντας την ιδιότητα:

$$\hat{\rho}_{αν,Σ}(t) = \hat{K}_0(t)\,\hat{\rho}_{Σ}(0)\,\hat{K}_0^{+}(t) + \hat{K}_1(t)\,\hat{\rho}_{Σ}(0)\,\hat{K}_1^{+}(t)$$

έτσι ώστε η απεικόνιση μέσω τελεστών Kraus να μην εξαρτάται από την αρχική χρονική στιγμή $t_0$

Σε αυτή την περίπτωση για το <u>Σενάριο 1</u> παίρνουμε:

$$\hat{\rho}^{(1)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t+\Delta t) = \hat{\rho}^{(1)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t) - \Gamma^2(\Delta t)^2\,\hat{\rho}^{(1)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t) + \frac{\Gamma^2}{4}(\Delta t)^2\,\hat{\sigma}_z\,\hat{\rho}^{(1)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)\,\hat{\sigma}_z$$

οπότε το όριο:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{\rho}^{(1)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t+\Delta t) - \hat{\rho}^{(1)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)}{\Delta t} = \frac{d\hat{\rho}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)}{dt}$$

παίρνει τη τιμή:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{\rho}^{(1)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t+\Delta t) - \hat{\rho}^{(1)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)}{\Delta t} = 0$$

οδηγώντας στο

αποτέλεσμα: $\hat{\rho}^{(1)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t) = \text{σταθερή} = \hat{\rho}_{\Sigma}(0)$

που προφανώς δεν αληθεύει.

Αυτό σημαίνει ότι στο σενάριο 1 η απεικόνιση Kraus <u>εξαρτάται</u> <u>από τις αρχικές συνθήκες</u> (μνήμη)

Ας εφαρμόσουμε την ίδια υπόθεση για το Σενάριο 2.

Τότε θα πάρουμε:

$$\hat{\rho}^{(2)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t+\Delta t) = \hat{\rho}^{(2)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t) - \frac{1}{2}\gamma\Delta t\, \hat{\rho}^{(2)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t) + \frac{\gamma}{2}\Delta t\, \hat{\sigma}_Z \hat{\rho}^{(2)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)\hat{\sigma}_Z$$

και σχηματίζοντας το όριο:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\rho^{(2)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t+\Delta t) - \rho^{(2)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)}{\Delta t} = \frac{d\rho^{(2)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)}{dt}$$

παίρνουμε τελικά:

$$\boxed{\frac{d\rho^{(2)}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\gamma\, \hat{\rho}_{\alpha\nu,\Sigma}(t) + \frac{\gamma}{2}\, \hat{\sigma}_Z \hat{\rho}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)\hat{\sigma}_Z}$$

$\Downarrow$

Τοπική εξίσωση για το $\hat{\rho}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)$ (χωρίς αναφορά στο $\hat{\rho}^{(0)}_{\Sigma}$)

Εξίσωση Lindblad $\Rightarrow$ επιδέχεται γενικής διατύπωσης για συστήματα χωρίς μνήμη

## Συνοψίζοντας

Η μη μοναδιακή χρονική εξέλιξη του ανηγμένου πίνακα πυκνότητας $\hat{\rho}_{αν,Σ}(t)$, ανοικτού κβαντικού συστήματος Σ, μέσω των τελεστών Kraus, δεν οδηγεί απαραίτητα σε μία τοπική περιγραφή της χρονικής εξέλιξης για μικρούς χρόνους $\Delta t$!

Αν αυτό είναι εφικτό τότε η χρονική εξέλιξη του $\hat{\rho}_{αν,Σ}(t)$ μπορεί να περιγραφεί και με διαφορικό τρόπο μέσω της εξίσωσης Lindblad που επιτρέπει μία γενική διατύπωση, ανεξάρτητη από ιδιαιτερότητες του Σ