Ανοικτά κβαντικά συστήματα

Θα χρησιμοποιήσουμε ως πρότυπο έναν κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή σε περιβάλλον κβαντικών αρμονικών ταλαντωτών:

Σ : κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής συχνότητας ω_0 (1-D)

σύστημα

$$\hat{H}_\Sigma = (\hat{a}^+\hat{a} + \tfrac{1}{2})\hbar\omega_0$$

Π : συλλογή από N κβαντικούς αρμονικούς ταλαντωτές (1-D)

περιβάλλον

$$\hat{H}_\Pi = \sum_{k=1}^{N} (\hat{b}_k^+\hat{b}_k + \tfrac{1}{2})\hbar\omega_k$$

Χαρακτηρίζεται από το φάσμα συχνοτήτων $\{\omega_a\}$

Βρίσκεται εν γένει σε μικτή κατάσταση

Αλληλεπίδραση $\Sigma \leftrightarrow \Pi$: σε αναλογία με το κλασικό πρόβλημα

$(\hat{x}_k \sim \lambda_1 \hat{b}_k + \lambda_2 \hat{b}_k^+ \ , \ \hat{X} \sim \mu_1 \hat{a} + \mu_2 \hat{a}^+)$

Ερμιτιανότητα: $\Rightarrow \hat{H}_{\alpha\lambda.} = \hbar \sum_k \lambda_k \hat{a}^+\hat{b}_k + \lambda_k^* \hat{a}\hat{b}_k^+$ (μεταφορά ενέργειας $\Sigma \leftrightarrow \Pi$)

Τελεστής Χαμιλτονιανής για το ΣυΠ:

$$\hat{H}_{\Sigma\Pi} = (\hat{a}^{+}\hat{a} + \tfrac{1}{2})\hbar\omega_0 + \sum_{k=1}^{N}(\hat{b}_k^{+}\hat{b}_k + \tfrac{1}{2})\hbar\omega_k + \hbar\sum_{k=1}^{N}(\lambda_k \hat{a}^{+}\hat{b}_k + \lambda_k^{*}\hat{a}\hat{b}_k^{+})$$

όπου τα $\{\lambda_k\}$ έχουν διαστάσεις συχνότητας

Ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες μετάθεσης:

$$[\hat{a}, \hat{a}^{+}] = 1 \qquad [\hat{b}_k, \hat{b}_\ell^{+}] = \delta_{k\ell}$$

$$[\hat{a}, \hat{b}_k] = [\hat{a}, \hat{b}_k^{+}] = 0 \qquad [b_k, b_\ell] = [b_k^{+}, b_\ell^{+}] = 0$$

Θεωρούμε $N \gg 1$

Το μοντέλο αυτό έχει κάποια προβλήματα που όμως δεν επηρεάζουν την ανάλυσή μας. Συγκεκριμένα οι ιδιοτιμές του $\hat{H}_{\Sigma\Pi}$ δεν έχουν κάτω φράγμα (G.W. Ford & R.F. O'Connell, Physica A 243, 377 (1997)).

Είναι όμως σχετικά καλή προσέγγιση διαδικασιών εκπομπής και απορρόφησης ακτινοβολίας όταν $\omega_k \gg \omega_0$ και $|\lambda_k| \ll \omega_0$

Χρονική εξέλιξη (εικόνα Heisenberg)

Για το Σ

Οι τελεστές $\hat{a}, \hat{a}^+$ εξαρτώνται από το χρόνο

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_{\Sigma\Pi}, \hat{a}(t)\right]$$

Η εξίσωση για το $\hat{a}^+(t)$ προσδιορίζεται εφαρμόζοντας τη συζυγία "+"

Βρίσκουμε:

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -i\omega_0\hat{a}(t) - i\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\hat{b}_k(t)$$

$$\frac{d\hat{a}^+(t)}{dt} = i\omega_0\hat{a}^+(t) + i\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^*\hat{b}_k^+(t)$$

Για το Π

Οι τελεστές $\hat{b}_k, \hat{b}_k^+$ εξαρτώνται από τον χρόνο:

$$\frac{d\hat{b}_k(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_{\Sigma\Pi}, \hat{b}_k(t)\right]$$

και εφαρμόζοντας την συζυγία "+" παίρνουμε την εξίσωση για το $\hat{b}_k^+(t)$.

Βρίσκουμε:

$$\frac{d\hat{b}_k(t)}{dt} = -i\omega_k\hat{b}_k(t) - i\lambda_k^*\hat{a}(t)$$

$$\frac{d\hat{b}_k^+(t)}{dt} = i\omega_k\hat{b}_k^+(t) + i\lambda_k\hat{a}^+(t)$$

Επιλύουμε πρώτα τις εξισώσεις για τα $\hat{b}_k(t)$, $\hat{b}_k^+(t)$ και αντικαθιστούμε τις λύσεις στις εξισώσεις των $\hat{a}(t)$, $\hat{a}^+(t)$ ώστε να προσδιορίσουμε τη χρονική εξέλιξη του Σ που μας ενδιαφέρει.

Η εξίσωση: $\dfrac{d\hat{b}_k(t)}{dt} = -i\omega_k \hat{b}_k(t) - i\lambda_k^* \hat{a}(t)$

έχει την λύση: $\hat{b}_k(t) = e^{-i\omega_k t}\hat{b}_k(0) - i\lambda_k^* \int_0^t d\tau\, e^{-i\omega_k(t-\tau)}\hat{a}(\tau)$

και από εκεί παίρνουμε:

$$\hat{b}_k^+(t) = e^{i\omega_k t}\hat{b}_k^+(0) + i\lambda_k \int_0^t d\tau\, e^{i\omega_k(t-\tau)}\hat{a}^+(\tau)$$

Αντικαθιστούμε τις λύσεις για τα $\hat{b}_k(t)$, $\hat{b}_k^+(t)$ στις εξισώσεις των $\hat{a}(t)$, $\hat{a}^+(t)$ παίρνοντας:

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -i\omega_0 \hat{a}(t) - i\sum_{k=1}^{N}\lambda_k e^{-i\omega_k t}\hat{b}_k(0) - \sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2 \int_0^t d\tau\, e^{-i\omega_k(t-\tau)}\hat{a}(\tau)$$

και

$$\frac{d\hat{a}^+(t)}{dt} = i\omega_0 \hat{a}^+(t) + i\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^* e^{i\omega_k t}\hat{b}_k^+(0) - \sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2 \int_0^t d\tau\, e^{i\omega_k(t-\tau)}\hat{a}^+(\tau)$$

Μπορούμε να περάσουμε από τους τελεστές $\hat{a}(t)$, $\hat{a}^+(t)$ στους τελεστές $\hat{X}(t)$, $\hat{P}(t)$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$\hat{P}(t) = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}}\left(\hat{a}^+(t) - \hat{a}(t)\right) \quad ; \quad \hat{X}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(\hat{a}^+(t) + \hat{a}(t)\right)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης για τα $\hat{a}(t)$, $\hat{a}^+(t)$ παίρνουμε:

$$\underbrace{\frac{d\hat{a}^+(t)}{dt} - \frac{d\hat{a}(t)}{dt}}_{\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega_0}}\frac{d\hat{P}(t)}{dt}} = i\omega_0 \overbrace{\left(\hat{a}^+(t) + \hat{a}(t)\right)}^{\sqrt{\frac{2m\omega_0}{\hbar}}\hat{X}(t)} + i\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k^* e^{i\omega_k t}\hat{b}_k^+(0) + \lambda_k e^{-i\omega_k t}\hat{b}_k(0)\right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2\left[\int_0^t d\tau\left(e^{i\omega_k(t-\tau)}\hat{a}^+(\tau) - e^{-i\omega_k(t-\tau)}\hat{a}(\tau)\right)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\hat{P}(t)}{dt} = -m\omega_0^2\hat{X}(t) \overbrace{- \sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}}\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k^* e^{i\omega_k t}\hat{b}_k^+(0) + \lambda_k e^{-i\omega_k t}\hat{b}_k(0)\right)}^{\hat{F}(t) \text{ (περιέχει \underline{μόνο} τελεστές περιβάλλοντος)}} -$$

$$- i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}}\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2\left[\int_0^t d\tau\left(\cos\omega_k(t-\tau)\left(\hat{a}^+(\tau) - \hat{a}(\tau)\right) + i\sin\omega_k(t-\tau)\left(\hat{a}^+(\tau) + \hat{a}(\tau)\right)\right)\right]$$

Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης για το $\frac{d\hat{P}(t)}{dt}$ γράφεται:

$$-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}}\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2\left[\int_0^t d\tau\,\cos\omega_k(t-\tau)\cdot\frac{\hat{P}(\tau)}{i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}}}+i\int_0^t d\tau\,\underbrace{\sin\omega_k(t-\tau)}\left(\hat{a}^+(\tau)+\hat{a}(\tau)\right)\right]$$

μικρή συνεισφορά
για $t\approx\tau \Rightarrow$ παραγοντική
ολοκλήρωση

Ισχύει: $$\int_0^t d\tau\,\sin\omega_k(t-\tau)\left(\hat{a}^+(\tau)+\hat{a}(\tau)\right)=\frac{1}{\omega_k}\left[\left[\cos\omega_k(t-\tau)(\hat{a}^+(\tau)+\hat{a}(\tau))\right]_0^t-\right.$$

$$\left.-\int_0^t d\tau\,\cos\omega_k(t-\tau)\underbrace{\left(\frac{d\hat{a}^+(\tau)}{d\tau}+\frac{d\hat{a}(\tau)}{d\tau}\right)}_{\frac{d\hat{X}(\tau)}{d\tau}\cdot\sqrt{\frac{2m\omega_0}{\hbar}}}\right]$$

Οπότε: $$\int_0^t d\tau\,\sin\omega_k(t-\tau)\left(\hat{a}^+(\tau)+\hat{a}(\tau)\right)=\frac{1}{\omega_k}\frac{\hat{X}(t)}{\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}}-$$

$$-\frac{1}{\omega_k}\cos\omega_k t\,\left(\hat{a}^+(0)+\hat{a}(0)\right)-\sqrt{\frac{2m\omega_0}{\hbar}}\frac{1}{\omega_k}\int_0^t d\tau\,\cos\omega_k(t-\tau)\,\frac{d\hat{X}(\tau)}{d\tau}$$

Με τελική μορφή:

$$\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2\left[\int_0^t d\tau\,\cos\omega_k(t-\tau)\left(m\frac{\omega_0}{\omega_k}\frac{d\hat{X}(\tau)}{d\tau}-\hat{P}(\tau)\right)+m\frac{\omega_0}{\omega_k}\hat{X}(t)-\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}}\frac{\cos\omega_k t}{\omega_k}\left(\hat{a}^+(0)+\hat{a}(0)\right)\right]$$

Ας μελετήσουμε τους όρους που περιέχουν αρχικές συνθήκες.

Είναι ο $\hat{F}(t) = -\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}} \sum_{k=1}^{N} \Big(\lambda_k^* e^{i\omega_k t} \hat{b}_k^{+}(0) + \lambda_k e^{-i\omega_k t} \hat{b}_k(0)\Big)$

$$\underbrace{\hat{b}_k^{+}(0) \;\ldots\; \hat{b}_k(0)}_{\text{αρχικές συνθήκες για το } \Pi}$$

και ο: $-\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}} \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2 \frac{\overbrace{\cos\omega_k t}^{\frac{1}{2}(e^{i\omega_k t}+e^{-i\omega_k t})}}{\omega_k} \underbrace{\left(\hat{a}^{+}(0)+\hat{a}(0)\right)}_{\text{αρχική συνθήκη για το } \Sigma \; (\sim\hat{x}(0))}$

Στην εξίσωση για το $\frac{d\hat{P}(t)}{dt}$ αθροίζονται δίνοντας:

$$-\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}} \sum_{k=1}^{N} \left(\lambda_k^* e^{i\omega_k t}\left(\hat{b}_k^{+}(0) + \frac{1}{2}\frac{\lambda_k}{\omega_k}\left(\hat{a}^{+}(0)+\hat{a}(0)\right)\right) + \lambda_k e^{-i\omega_k t}\left(\hat{b}_k(0) + \frac{\lambda_k^*}{2\omega_k}\left(\hat{a}^{+}(0)+\hat{a}(0)\right)\right)\right)$$

Ανώτερης τάξης για $|\lambda_k| \ll \omega_k$

$\Downarrow$

Οι αρχικές συνθήκες του Σ επηρεάζουν ασθενέστερα την χρονική του εξέλιξη!

Οπότε οι αρχικές συνθήκες περιέχονται προσεγγιστικά στο $\hat{F}(t)$

$\Downarrow$

στοχαστική δύναμη από Π

Μαζεύοντας όλες τις συνεισφορές η χρονική εξέλιξη $\frac{d\hat{P}(t)}{dt}$

γράφεται:

$$\frac{d\hat{P}(t)}{dt} = -m\omega_0^2\left(1-\sum_{k=1}^{N}\frac{|\lambda_k|^2}{\omega_0^2}\cdot\frac{\omega_0}{\omega_k}\right)\hat{X}(t) + \sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2\int_0^t d\tau\,\cos\omega_k(t-\tau)\left(-\hat{P}(\tau)+\frac{m\omega_0}{\omega_k}\frac{d\hat{X}(\tau)}{d\tau}\right) + \hat{F}(t)$$

Διορθώσεις ανώτερης τάξης όταν: $|\lambda_k| \ll \omega_0 \ll \omega_k$

Θέτοντας $\gamma(t) = \sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2\cos\omega_k t$

παίρνουμε τελικά:

$$\boxed{\frac{d\hat{P}(t)}{dt} + m\omega_0^2\hat{X}(t) + \int_0^t d\tau\,\gamma(t-\tau)\hat{P}(t) = \hat{F}(t)}$$

Κβαντική εξίσωση Langevin

Στοχαστική δύναμη από Π

όρος τριβής → $\gamma(t)$: πυρήνας μνήμης

Θυμίζουμε: $\hat{F}(t) = -\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}}\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k^* e^{i\omega_k t}\hat{b}_k^\dagger(0) + \lambda_k e^{-i\omega_k t}\hat{b}_k(0)\right)$

<u>Εφαρμογή:</u> Έστω ότι το περιβάλλον Π τη χρονική στιγμή $t=0$ (αρχική κατάσταση) είναι σε θερμική ισορροπία

$$\Downarrow$$

Η κατάσταση του Π είναι μικτή και περιγράφεται από τον πίνακα πυκνότητας $\hat{\rho}_\pi$

Για παράδειγμα ένας κβαντικός ταλαντωτής συχνότητας Ω με $\hat{H} = (\hat{b}^+\hat{b} + \frac{1}{2})\hbar\Omega$ σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας θα περιγράφεται από τον πίνακα πυκνότητας:

$$\hat{\rho}_\pi = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle\langle n| \qquad \text{με} \quad \hat{H}|n\rangle = \underbrace{(n+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega}_{E_n} |n\rangle$$

$$\Swarrow$$

Αναμενόμενη τιμή μεγέθους (τελεστού) $\hat{O}$:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_\pi} = Tr(\hat{O}\hat{\rho}_\pi).$$

και $P_n = \dfrac{e^{-\beta E_n}}{Z}$, $Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}$

$\left(\beta = \dfrac{1}{k_B T}\right)$

Επειδή οι ταλαντωτές του Π είναι ασύζευκτοι για $t=0$ ο πίνακας πυκνότητας $\hat{\rho}_\Pi(0)$ για τους N ταλαντωτές του περιβάλλοντος θα δίνεται ως:

$$\hat{\rho}_\Pi(0) = \hat{\rho}_1(0) \otimes \hat{\rho}_2(0) \cdots \otimes \hat{\rho}_N(0) \qquad \text{με} \qquad \hat{\rho}_i(0) = \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta E_{n_i}}}{Z_i} |n_i\rangle\langle n_i|$$

$$\text{με} \quad Z_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta E_{n_i}}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση συσχέτισης $\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t') \rangle_{\hat{\rho}_\Pi(0)}$ της στοχαστικής δύναμης $\hat{F}(t)$

Προφανώς από τη μορφή του $\hat{F}(t)$ οι χρονικές ιδιότητες του $\hat{F}(t)$ προσδιορίζονται αποκλειστικά από τους τελεστές $\hat{b}_k(0), \hat{b}_k^+(0)$ και επομένως τον πίνακα πυκνότητας $\hat{\rho}_\Pi(0)$! Θα έχουμε λοιπόν:

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t') \rangle_{\hat{\rho}_\Pi(0)} = \frac{m\hbar\omega_0}{2} \left\langle \sum_{k=1}^{N} \left(\lambda_k^* e^{i\omega_k t} \hat{b}_k^+(0) + \lambda_k e^{-i\omega_k t} \hat{b}_k(0)\right) \sum_{j=1}^{N} \left(\lambda_j^* e^{i\omega_j t} \hat{b}_j^+(0) + \lambda_j e^{-i\omega_j t} \hat{b}_j(0)\right) \right\rangle_{\hat{\rho}_\Pi(0)}$$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\langle \hat{b}_k(0)\hat{b}_j^+(0)\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)} = \delta_{kj}\langle \hat{b}_k(0)\hat{b}_k^+(0)\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)}$$

(Άσκηση για το σπίτι)

$$\langle \hat{b}_k^+(0)\hat{b}_j(0)\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)} = \delta_{kj}\langle \hat{b}_k^+(0)\hat{b}_k(0)\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)}$$

ενώ

$$\langle \hat{b}_j(0)\hat{b}_k(0)\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)} = \langle \hat{b}_k(0)\hat{b}_j(0)\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)} = \langle \hat{b}_k^+(0)\hat{b}_j^+(0)\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)} = \langle \hat{b}_j^+(0)\hat{b}_k^+(0)\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t')\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)} = \frac{m\hbar\omega_0}{2}\Big[\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2 e^{-i\omega_k(t-t')}\langle \hat{b}_k(0)\hat{b}_k^+(0)\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2 e^{i\omega_k(t-t')}\langle \hat{b}_k^+(0)\hat{b}_k(0)\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)}\Big]$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\langle \hat{b}_k^+(0)\hat{b}_k(0)\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)} = \langle \hat{N}_k(0)\rangle_{\hat{\rho}_k}$$

και

$$\langle \hat{b}_k(0)\hat{b}_k^+(0)\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)} = \langle \hat{b}_k^+(0)\hat{b}_k(0)+1\rangle_{\hat{\rho}_\pi(0)} = \langle \hat{N}_k(0)\rangle_{\hat{\rho}_k} + 1$$

Όπου: $\langle \hat{N}_k(0) \rangle_{\hat{\rho}_k} = \dfrac{Tr\left(e^{-\beta E_{n_k}} |n_k\rangle\langle n_k| \hat{N}_k\right)}{Z_k} = \dfrac{1}{Z_k}\sum_{n_k=0}^{\infty} n_k e^{-\beta E_{n_k}}$

με $E_{n_k} = (n_k + \frac{1}{2})\hbar\omega_k$

Δείξτε ότι: $\langle \hat{N}_k(0) \rangle_{\hat{\rho}_k} = \dfrac{1}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1}$

Οπότε:

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t') \rangle_{\hat{\rho}_\Pi(0)} = \frac{m\hbar\omega_0}{2}\left[\sum_{k=1}^{N}\left(|\lambda_k|^2 \frac{e^{-i\omega_k(t-t')}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}} + |\lambda_k|^2 \frac{e^{i\omega_k(t-t')}}{e^{\beta\hbar\omega_k}-1}\right)\right]$$

καταλήγοντας στη σχέση:

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t') \rangle_{\hat{\rho}_\Pi(0)} = \frac{m\hbar\omega_0}{2}\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2\left[\frac{e^{\beta\hbar\omega_k}+1}{e^{\beta\hbar\omega_k}-1}\cos\omega_k(t-t') - i\sin\omega_k(t-t')\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t') \rangle_{\hat{\rho}_\Pi(0)} \simeq \frac{m\hbar\omega_0}{2}\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2\cos\omega_k(t-t')\,\frac{e^{\beta\hbar\omega_k}+1}{e^{\beta\hbar\omega_k}-1}}$$

έχει μηδαμινή συνεισφορά για $t \simeq t'$

Η σχέση

$$\left\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t')\right\rangle_{\hat{\rho}_\Pi(0)} = \frac{m\hbar\omega_0}{2}\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2\cos\omega_k(t-t')\,\frac{e^{\beta\hbar\omega_k}+1}{e^{\beta\hbar\omega_k}-1}$$

μπορεί να γραφτεί καλύτερα στο όριο χαμηλών θερμοκρασιών

όπου: $\hbar\omega_k \gg k_B T$ όπου ο λόγος $\frac{e^{\beta\hbar\omega_k}+1}{e^{\beta\hbar\omega_k}-1} \approx 1$

Τότε:

$$\left\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t')\right\rangle_{\hat{\rho}_\Pi(0)} \simeq \frac{m\hbar\omega_0}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2\cos\omega_k(t-t')}_{\gamma(t-t')}$$

$\gamma(t-t')$: πυρήνας μνήμης

Αν το φάσμα $\{\lambda_k, \omega_k\}$ είναι τέτοιο ώστε το Π να μην έχει "μνήμη" (μαρκοβιανό σενάριο)

τότε $\gamma(t-t') \simeq \Gamma_0\,\delta(t-t')$. οπότε:

$$\left\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t')\right\rangle_{\hat{\rho}_\Pi(0)} \overset{\text{μαρκοβιανή προσέγγιση}}{\approx} \frac{m\hbar\omega_0}{2}\Gamma_0\,\delta(t-t').$$