Ανάλυση ρητής συνάρτησης $\frac{p(x)}{q(x)}$ σε μερικά κλάσματα

Υποθέτουμε ότι ο βαθμός του πολυωνύμου $p(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου $q(x)$. Επίσης, υποθέτουμε, για απλότητα, ότι οι συντελεστές των μεγιστοβαθμίων όρων των $p(x)$, $q(x)$ είναι 1, δηλαδή $p(x)=x^n+\dots$, $q(x)=x^m+\dots$ και $n<m$.

Τώρα, το $q(x)$ μπορεί να γραφεί

$$q(x)=(x-\alpha_1)^{r_1}\dots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}\dots(x^2+\beta_e x+\gamma_e)^{s_e},$$

όπου $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ είναι πραγματικές ρίζες με πολλαπλότητες $r_1,\dots,r_k$ αντίστοιχα, ενώ οι παράγοντες $x^2+\beta_1x+\gamma_1,\dots,x^2+\beta_e x+\gamma_e$ δεν έχουν πραγματικές ρίζες, δηλαδή οι διακρίνουσες των τριωνύμων είναι αρνητικές.

Γράφουμε

$$\frac{x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0}{(x-\alpha_1)^{r_1}\dots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}\dots(x^2+\beta_e x+\gamma_e)^{s_e}}$$

$$=\frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\dots+\frac{A_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\dots+\frac{A_{k1}}{x-\alpha_k}+\frac{A_{k2}}{(x-\alpha_k)^2}+\dots+\frac{A_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}$$

$$+\frac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+\beta_1x+\gamma_1}+\frac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^2}+\dots+\frac{B_{1,s_1}x+\Gamma_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}}$$

$$+\dots+\frac{B_{e1}x+\Gamma_{e1}}{x^2+\beta_e x+\gamma_e}+\frac{B_{e2}x+\Gamma_{e2}}{(x^2+\beta_e x+\gamma_e)^2}+\dots+\frac{B_{e,s_e}x+\Gamma_{e,s_e}}{(x^2+\beta_e x+\gamma_e)^{s_e}}.$$

Προσθέτουμε τα κλάσματα στο δεξιό μέλος, οπότε, τα τελικά κλάσματα αριστερά και δεξιά έχουν τον ίδιο παρανομαστή. Εξισώνουμε τους αριθμητές και υπολογίζουμε τις σταθερές του δεξιού μέλους.

(Απλό) παράδειγμα: Για το κλάσμα $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$, γράφουμε

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+\Gamma)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

συνεπώς,

$$x+1 = (A+B)x^2 + (A-B+\Gamma)x + A-\Gamma,$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ A-B+\Gamma&=1 \\ A-\Gamma&=1 \end{aligned} \iff \begin{aligned} A&=\frac{2}{3} \\ B&=-\frac{2}{3} \\ \Gamma&=-\frac{1}{3} \end{aligned}.$$

Άρα

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right).$$

Με βάση αυτό, μπορείτε εύκολα να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx.$$