## 3.2.1 Κριτήρια σύγκλισης

Πρόταση 3.6 (Κριτήριο άμεσης σύγκρισης) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά με $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(α) Αν υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $a_n \leq M b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει επίσης.

(β) Αν υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $M a_n \geq b_n$, με $b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Απόδειξη: Έστω $(s_n)$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Κατ' αρχάς, εφόσον $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, η $(s_n)$ είναι αύξουσα.

(α) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$, τότε $s_n \leq Mt$ $\forall n \in \mathbb{N}$, (?) οπότε, η $(s_n)$ είναι άνω φραγμένη και από το Θεώρημα 3.4(α) είναι συγκλίνουσα.

(β) Εδώ, η $(s_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη, γιατί αν ήταν, από το Θεώρημα 3.4(α), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Οπότε, αν $(t_n)$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, τότε $t_n \leq Ms$ $\forall n \in \mathbb{N}$, (?) δηλαδή η $(t_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, το οποίο δεν ισχύει.

Πρόταση 3.7 (Κριτήριο οριακής σύγκρισης) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ δύο σειρές με $a_n > 0$ και $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \rho > 0,$$

τότε είτε και οι δύο σειρές συγκλίνουν ή και οι δύο αποκλίνουν.

Απόδειξη: Εφόσον η ακολουθία $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ συγκλίνει, από το Θεώρημα 2.3, η $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ είναι φραγμένη, δηλαδή $\exists M>0$:

$$a_n \leq M b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν τώρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε, από την Πρόταση 3.6(α), και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Επίσης, εφόσον $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \rho > 0$, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\rho} > 0$$

(βλέπε Πρόταση 2.11), οπότε, όπως προηγουμένως, $\exists M>0$:

$$M a_n \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \; (?)$$

Αν τώρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει, τότε, από την Πρόταση 3.6(β), και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 3.3 (α) Θέλουμε να μελετήσουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2n+1}$.

Έχουμε $a_n = \frac{n}{n^3+2n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Αναζητούμε "απλούστερη" σειρά με "γνωστή συμπεριφορά". Κρατάω τους όρους που "κυριαρχούν" σε αριθμητή και παρονομαστή. Επομένως, θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Δεδομένου ότι

$$\frac{n}{n^3+2n+1} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από την Πρόταση 3.6(α), με $M=1$,
$(p=2>1)$
και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2n+1}$ συγκλίνει επίσης.

(β) Θέλουμε να μελετήσουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$.

Έχουμε $\frac{2n}{n^2+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Με το προηγούμενο σκεπτικό, θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Τώρα, $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = 2$, (?) και εφόσον η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει,

από την Πρόταση 3.7, και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ αποκλίνει.

Δύο σημαντικά κριτήρια είναι τα ακόλουθα.

<u>Πρόταση 3.8</u> (Κριτήριο λόγου ή κριτήριο του d'Alembert)

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά με $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

(α) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β) Αν $\rho > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη: (α) Εφόσον $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$, $0\le\rho<1$, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon>0$: $\rho<\rho+\varepsilon=r<1$. Όπως στην Πρόταση 2.17(α), μπορούμε να βρούμε $N\in\mathbb{N}$: Για κάθε $n\ge N$ να ισχύει

$$a_n<r^{n-N}a_N.$$

Συνεπώς,

συγκλίνει ?

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_{N-1}+\sum_{n=N}^{\infty}a_n$$

Ενώ,

$$\sum_{n=N}^{\infty}a_n<\sum_{n=N}^{\infty}r^{n-N}a_N=a_N\sum_{n-N=0}^{\infty}r^{n-N}=a_N\sum_{n=0}^{\infty}r^n.$$

συγκλίνει συγκλίνει

?

(β) Άσκηση.

Πρόταση 3.9 (Κριτήριο ρίζας ή κριτήριο του Cauchy)

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ μια σειρά με $a_n\ge 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho.$$

(α) Αν $\rho<1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

(β) Αν $\rho>1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη: (α) Εφόσον $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$, $0\le\rho<1$, τότε $\exists\varepsilon>0$: $\rho<\rho+\varepsilon=r<1$, και, όπως στην Πρόταση 2.18(α), $\exists N\in\mathbb{N}$: Για $n\ge N$ να ισχύει: $a_n<r^n$.

Συνεπώς,

συγκλίνει ?

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_{N-1}+\sum_{n=N}^{\infty}a_n$$

με

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \sum_{n=N}^{\infty} r^n = \sum_{n=N}^{\infty} r^N r^{n-N} = r^N \sum_{n-N=0}^{\infty} r^{n-N}$$

$$= r^N \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

συγκλίνει ? συγκλίνει

(β) Άσκηση

Παράδειγμα 3.4: (α) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$.

Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}} = \ldots = \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1,\ n \to \infty.$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$ συγκλίνει.

(β) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

Έχουμε $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \longrightarrow \frac{2}{1^2} = 2 > 1,\ n \to \infty.$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ αποκλίνει.

(γ) Θέλουμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{2^n}$.

Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}+5}{2^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{2^n}} = \ldots \longrightarrow 1,\ n \to \infty.$$

Επομένως, δεν μπορούμε να αποφασίσουμε με το κριτήριο λόγου (και αντίστοιχα ρίζας) και πρέπει να αποφασίσουμε με κάποιο άλλο τρόπο για τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς. (Μπορείτε να σκεφθείτε πώς;)

<u>Παρατήρηση</u>: Από τις Προτάσεις 3.8–3.9 και το Παράδειγμα 3.4(γ) φαίνεται ότι τα κριτήρια λόγου και ρίζας δεν αποδίδουν όταν $\rho=1$.