Test εξάσκησης

1. (α) Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και a ένα άνω φράγμα του A. Τότε, $a = \sup A$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ έτσι ώστε $x > a - \varepsilon$.

   (β) Βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων:

   (i) $A = \left\{ \dfrac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

   (ii) $B = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

2. (α) Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών:

   (i) $a_n = \dfrac{n + \sin n}{n + \cos n}$.

   (ii) $b_n = \dfrac{n^n}{3^n n!}$.

   (iii) $c_n = \left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

   (β) Εξετάστε τη σύγκλιση της ακολουθίας που ορίζεται μέσω του αναδρομικού τύπου

$$a_1 = 1, \;\; a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n^2, \; n = 1, 2, \ldots.$$

3. (α) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι ακόλουθες σειρές. Για αυτές που συγκλίνουν υπολογίστε το άθροισμά τους, ενώ για αυτές που αποκλίνουν αποδείξτε το.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2 + 4n + 1}$.

   (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n}}{2}$.

   (β) Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση ή δώστε αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι δεν ισχύει: Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{a_n}$ συγκλίνει.

4. (α) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(x) = (x-1)g(x)$ είναι συνεχής στο 1.

   (β) Έστω $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[1,3]$ και για την οποία ισχύει $f(1) = f(3)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [1,2]$ έτσι ώστε $f(x_0 + 1) = f(x_0)$.

5. (α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x + \cos x, \; x \in [-\pi, \pi]$.

   (β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = xe^{x+1} + 1, \; x \in \mathbb{R}$, και δείξτε ότι δεν λαμβάνει αρνητικές τιμές.

   (γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 1 και $f(1) = f'(1) = 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0.$$

6. (α) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Taylor δείξτε ότι

$$\frac{1}{2+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{2^{k+1}} \quad \text{για κάθε } |x| < 2.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor του (α) για τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$, προσεγγίστε το $f(1)$ με κάθε ένα από τα $T_2(f,0;1), T_3(f,0;1)$ και $T_4(f,0;1)$. Εξηγήστε τη συμπεριφορά των προσεγγίσεων.

7. (α) Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor $T_3(f,0;x)$ για τη συνάρτηση $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$.

(β) Έστω $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[0,1]$ και για την οποία ισχύει $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δώστε παράδειγμα μη συνεχούς ολοκληρώσιμης συνάρτησης για την οποία δεν ισχύει η παραπάνω πρόταση.

(γ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x} dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+1} dx.$