$\boxed{I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\, dx}$ Άσκηση 6

(1)

μετασχηματισμός $\Rightarrow$ $x' = \frac{\pi}{2} - x$.

$$I = \int_{\pi/2}^{0} \log\left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x'\right)\right)(-dx') = \int_0^{\pi/2} \log(\cos x')\, dx'$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} dx \left[\log(\sin x) + \log(\cos x)\right]$$ οπότε:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dx \left[\log(\sin x \cdot \cos x)\right] \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dx \log\left(\tfrac{1}{2}\sin 2x\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dx \log(\sin 2x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot \log\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$y = 2x$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{dy}{2} \log(\sin y) - \frac{\pi}{4}\log 2 \Rightarrow I = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} dy \log(\sin y) - \frac{\pi}{4}\log 2$$

Υπολογισμός του $\int_0^{\pi} dy \log(\sin y)$

$$\tilde{I} = \int_0^{\pi} dy \log(\sin y) = \int_0^{\pi} \log\left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\right) dy = \underbrace{\int_0^{\pi} \log\left|\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\right| dy}_{\text{λόγω πεδίου ολοκλήρωσης}}$$

(στο $[0,\pi]$ $\sin y \geq 0$)

$$\Rightarrow \tilde{I} = \int_0^{\pi} \log\left|e^{2iy} - 1\right| dy - \pi \log 2$$

Θέτουμε $\xi = 2y \Rightarrow$

$$\tilde{I} = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\xi \, \log|e^{i\xi} - 1|}_{\text{από άσκηση 3 είναι μηδέν αφού } |a|=1} - \pi \log 2$$

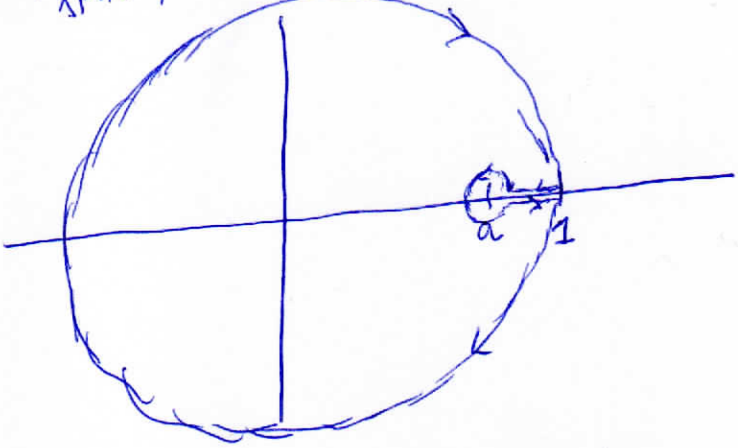
Οπότε: $I = \frac{1}{4}\tilde{I} - \frac{\pi}{4}\log 2 = -\frac{\pi}{4}\log 2 - \frac{\pi}{4}\log 2 = -\frac{\pi}{2}\log 2$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I = \int_0^{\pi/2} dx \, \log(\sin x) = -\frac{\pi}{2}\log 2}$$

<u>Σημείωση:</u>

Για τον υπολογισμό του $\int_0^{2\pi} dx \, \log|e^{ix} + a|$ για $|a| < 1$ χρησιμοποιούμε τη διαδρομή



από την οποία προκύπτει ο μηδενισμός του ολοκληρώματος

Για $|a| > 1$ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η $\log|e^{ix} + a|$ μπορεί να γραφτεί ως $\log|z + a|$ και η ολοκλήρωση γίνεται στον κύκλο με ακτίνα 1. Μπορούμε λοιπόν να γράφουμε:

$$\int_0^{2\pi} dx \, \log|e^{ix} + a| = \frac{1}{i}\oint_{K(0,1)} dz \, \frac{\log|z + a|}{z} \Rightarrow \underbrace{\oint_{K(0,1)} dz \, \frac{\log|z+a|}{z} = 2\pi i \log|a|}_{\text{από Cauchy αφού η } f(z) = \log|z+a| \text{ αναλυτική}}$$

③

Οπότε: $\int_0^{2\pi} dx \, \log|e^{ix}+a| = 2\pi \log|a|$

Για $|a|=1$ ισχύει: $\left.\begin{aligned} \lim_{|a|\to 1^+} \int_0^{2\pi} dx \, \log|e^{ix}+a| = \emptyset \\ \lim_{|a|\to 1^-} \int_0^{2\pi} dx \, \log|e^{ix}+a| = \emptyset \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^{2\pi} dx \, \log|e^{ix}+a| = \emptyset$ για $|a|=1$

<u>Άσκηση 4, φυλλάδιο γεωμετρικής άλγεβρας</u>

$$\alpha \mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{a}$$

εσωτερικό γινόμενο

διανύσματα

διδιάνυσμα

Πολλαπλασιάζουμε εξωτερικά με $\mathbf{B}$

$$\alpha \mathbf{x} \wedge \mathbf{B} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{B}$$

Αφού $\mathbf{B}$ διδιάνυσμα ισχύει: $\mathbf{B} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$

με $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ διανύσματα

Έτσι: $\alpha \mathbf{x} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$

Επικεντρωνόμαστε σε αυτόν τον όρο:

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}\, \mathbf{d} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d}\, \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = 0$$

αφού $\mathbf{d} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} = 0$

Προκύπτει λοιπόν (από την αρχική εξίσωση) η σχέση:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{B} = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{B}}{\alpha}$$

Προσθέτουμε τη σχέση αυτή στην αρχική εξίσωση:

$$\alpha \mathbf{x} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{x}\wedge\mathbf{B} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{B}}{\alpha}$$

οπότε:

$$\mathbf{x} \underset{\uparrow}{*} (\alpha+\mathbf{B}) = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{B}}{\alpha}$$ και

γεωμετρικό γινόμενο

πολλαπλασιάζοντας με $(\alpha+\mathbf{B})^{-1}$ (αν $\alpha+\mathbf{B}\neq 0$) από δεξιά (γεωμετρικό γινόμενο) τότε παίρνουμε:

$$\boxed{\mathbf{x} = \left(\mathbf{a} + \frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{B}}{\alpha}\right) * (\alpha+\mathbf{B})^{-1}}$$

<u>Άσκηση 15</u>: $$H_\nu(a) = \sqrt{\frac{2}{a\pi}}\, e^{i(a - \nu\pi/2 - \pi/4)}$$

<u>Άσκηση 16</u>: $$B(x,y) = \sqrt{2\pi}\,\frac{x^{x-1/2}\, y^{y-1/2}}{(x+y)^{x+y-1/2}}$$

<u>Άσκηση 17</u>: $$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\left(\frac{ez}{2\nu}\right)^{\nu}$$