ΑΘΡΟΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ (Φ.Κ. Διάκονος)

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ θεωρώντας ότι η γενίκευση της συνάρτησης f στο μιγαδικό επίπεδο z, δηλ. η $f(z)$ δεν έχει πόλους στον πραγματικό άξονα. Μπορείτε να σκεφτόσαστε σαν τυπικό παράδειγμα την $f(n) = \frac{1}{n^2+1}$. Η αντίστοιχη $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ έχει πόλους στο $\pm i$. Μία μέθοδος υπολογισμού του αθροίσματος αυτού είναι μέσω της χρήσης του λογισμού ολοκληρωτικών υπολοίπων. Παρατηρούμε ότι:

1. Η συνάρτηση $\cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ έχει πόλους στον πραγματικό άξονα για $z_n = n$ με $n = .., -2, -1, 0, 1, 2, ...$

2. Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης $\cot \pi z$ είναι ίδιο και ίσο με $\frac{1}{\pi}$ για κάθε z_n:

$$\mathrm{Res}(\cot \pi z, z_n) = \lim_{z \to n} (z-n) \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \lim_{z \to n} (z-n) \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z - \sin \pi n} = \frac{1}{\pi}$$

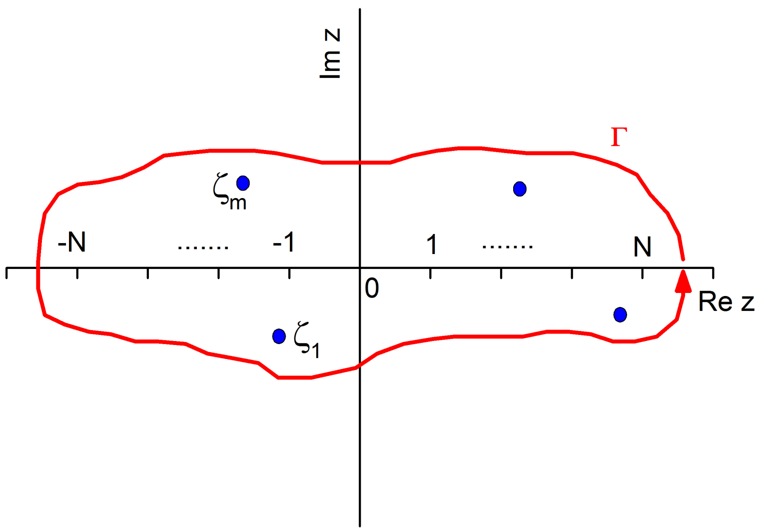
3. Βασισμένοι στο 2) παρατηρούμε ότι για την συνάρτηση $f(z)$ που δεν έχει πόλους στο πραγματικό άξονα, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) \cot \pi z$ στα z_n θα είναι:

$$\mathrm{Res}(f(z) \cot \pi z, z_n) = \frac{f(n)}{\pi} \qquad (1)$$

4. Η ιδιότητα 3) θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του αθροίσματος $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$. Για να υλοποιηθεί αυτό, αρκεί να ορίσουμε απλό περίγραμμα

στο επίπεδο z που να οριοθετεί χωρίο, στο εσωτερικό του οποίου θα βρίσκονται οι πόλοι z_n της $\cot \pi z$. Προφανώς κύκλος με κέντρο το μηδέν και ακτίνα R ($R \to \infty$) δεν εξυπηρετεί τον στόχο μας αφού θα περιέχει πόλους στο $|z| \to \infty$. Επομένως η προσπάθειά μας εστιάζεται στην εύρεση κατάλληλου περιγράμματος.

- Τι σημαίνει όμως κατάλληλο περίγραμμα; Για να δώσουμε απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα θεωρήσουμε αρχικά ότι έχουμε βρει το κατάλληλο περίγραμμα Γ το οποίο εσωκλείει τους πόλους της $\cot \pi z$ από $-N$ έως N. Ένα σκίτσο του περιγράμματος αυτού φαίνεται στο Σχήμα 1:



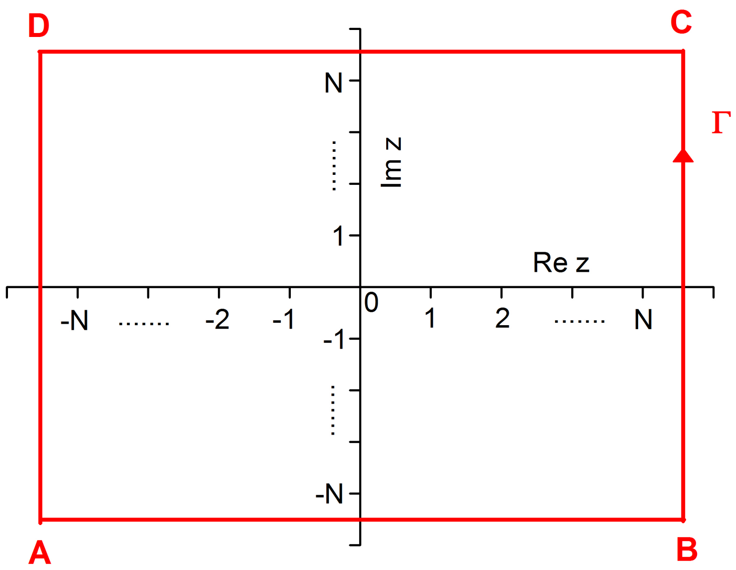
ΣΧΗΜΑ 1

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων (ΘΟΥ) για το $\oint_\Gamma dz\ f(z) \cot \pi z$, υποθέτοντας ότι η $f(z)$ δεν περιέχει πόλους στα z_n αλλά μόνο στα σημεία ζ_m ($m = 1, .., M$). Για παράδειγμα στην περίπτωση της $f(z) =$

$\frac{1}{z^2+1}$ έχουμε $M = 2$ και $\zeta_1 = -i$, $\zeta_2 = i$ εφόσον η Γ περικλείει τα ζ_1, ζ_2. Παίρνουμε λοιπόν:

$$\oint_\Gamma dz\ f(z)\cot\pi z = 2\pi i[\sum_{n=-N}^{N}\frac{f(n)}{\pi} + \sum_{m=1}^{M}\text{Res}(f(z)\cot\pi z,\ z_m)] \qquad (2)$$

Για να αξιοποιήσουμε την εξίσωση (2) χρειάζεται να επιλεγεί το περίγραμμα Γ έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί το αριστερό της μέρος $\oint_\Gamma dz\ f(z)\cot\pi z$. Μπορούμε να δείξουμε ότι η κατάλληλη διαδρομή είναι αυτή του σχήματος 2:



ΣΧΗΜΑ 2

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB τέμνει τον άξονα $\Im z$ στο $-N-\frac{1}{2}$ και το CD στο $N+\frac{1}{2}$. Αντίστοιχα, το BC τέμνει τον άξονα $\Re z$ στο $N+\frac{1}{2}$ ενώ το DA στο $-N-\frac{1}{2}$.

$$\oint_\Gamma dz\ f(z)\cot\pi z =$$
$$\int_{AB} dz\ f(z)\cot\pi z + \int_{BC} dz\ f(z)\cot\pi z + \int_{CD} dz\ f(z)\cot\pi z + \int_{DA} dz\ f(z)\cot\pi z \qquad (3)$$

Για τις οριζόντιες διαδρομές AB και CD ισχύει:

$$z_{AB} = x + i(-N - \frac{1}{2}), \quad dz_{AB} = dx, \quad ; \quad z_{CD} = x + i(N + \frac{1}{2}), \quad dz_{CD} = dx$$

Ενώ για τις κάθετες διαδρομές BC και DA ισχύει:

$$z_{BC} = N + \frac{1}{2} + iy, \quad dz_{BC} = idy, \quad ; \quad z_{DA} = -N - \frac{1}{2} + iy, \quad dz_{DA} = idy$$

Θα δείξουμε ότι:

- Η $\cot \pi z$ είναι φραγμένη στο περίγραμμα Γ.
- Το $\oint_\Gamma dz\ f(z) \cot \pi z$ μηδενίζεται (ως συνέπεια του ότι η $\cot \pi z$ είναι φραγμένη και η $f(z)$ τείνει επαρκώς γρήγορα στο μηδέν για $|z| \to \infty$).

Πρώτα θα δείξουμε ότι η $\cot \pi z$ είναι φραγμένη στο Γ. Θα χρειαστούμε το $|\cot \pi z|$ που γράφεται ως:

$$|\cot \pi z| = \frac{|e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}|}{|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}|}$$

Θα μελετήσουμε πρώτα τις οριζόντιες διαδρομές AB και CD. Για την AB ισχύει:

$$|\cot \pi(x + i(-N - \frac{1}{2}))| = \frac{|e^{i\pi(x+i(-N-\frac{1}{2}))} + e^{-i\pi(x+i(-N-\frac{1}{2}))}|}{|e^{i\pi(x+i(-N-\frac{1}{2}))} - e^{-i\pi(x+i(-N-\frac{1}{2}))}|} \qquad (4)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα:

$$\frac{|P+S|}{|P-S|} \leq \frac{|P| + |S|}{||P| - |S||} \quad , \quad P,\ S \in \mathcal{C}$$

για να φράξουμε το δεξί μέρος της (4):

$$\frac{|e^{i\pi(x+i(-N-\frac{1}{2}))} + e^{-i\pi(x+i(-N-\frac{1}{2}))}|}{|e^{i\pi(x+i(-N-\frac{1}{2}))} - e^{-i\pi(x+i(-N-\frac{1}{2}))}|} \leq \frac{|e^{i\pi x} e^{\pi(N+\frac{1}{2})}| + |e^{-i\pi x} e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}|}{||e^{i\pi x} e^{\pi(N+\frac{1}{2}))}| - |e^{-i\pi x} e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}||} \qquad (5)$$

Από τις (4) και (5) προκύπτει:

$$|\cot \pi(x + i(-N - \frac{1}{2}))| \leq \frac{|e^{\pi(N+\frac{1}{2})}| + |e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}|}{||e^{\pi(N+\frac{1}{2}))}| - |e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}||} \qquad (6)$$

Χρησιμοποιώντας ότι $e^{\pm\pi(N+\frac{1}{2})} > 0$, $\forall N \in \mathcal{R}$ η ανισότητα (6) μπορεί να γραφτεί σε πιο απλοποιημένη μορφή ως:

$$|\cot\pi(x+i(-N-\frac{1}{2}))| \leq \frac{|e^{\pi(N+\frac{1}{2})}+e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}|}{|e^{\pi(N+\frac{1}{2}))}-e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}|}$$

δηλαδή:

$$|\cot\pi(x+i(-N-\frac{1}{2}))| \leq |\coth\pi(N+\frac{1}{2})|$$

και επειδή $\coth x > 0$ για $x > 0$ θα ισχύει (θυμηθείτε ότι $N > 0$):

$$|\cot\pi(x+i(-N-\frac{1}{2}))| \leq \coth\pi(N+\frac{1}{2}) \qquad (7)$$

Η συνάρτηση $\coth x$ είναι φθίνουσα οπότε $\coth\pi(N+\frac{1}{2}) < \coth\frac{\pi}{2}$ και η ανισότητα (7) απλοποιείται σε:

$$|\cot\pi(x+i(-N-\frac{1}{2}))| < \coth\frac{\pi}{2} \qquad (8)$$

Με πανομοιότυπη διαδικασία δείχνουμε ότι η ανισότητα (8) ικανοποιείται και για την διαδρομή CD. Η διαδικασία που ακολουθούμε για τις κάθετες διαδρομές είναι παρόμοια. Ας δούμε την περίπτωση της διαδρομής BC:

$$|\cot\pi(N+\frac{1}{2}+iy)| = \frac{|e^{i\pi(N+\frac{1}{2})}e^{-\pi y}+e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})}e^{\pi y}|}{|e^{i\pi(N+\frac{1}{2})}e^{-\pi y}-e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})}e^{\pi y}|} \qquad (9)$$

Ο αριθμητής του κλάσματος στο δεξιό μέρος της εξίσωσης (9) γράφεται:

$$|e^{i\pi(N+\frac{1}{2})}e^{-\pi y}+e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})}e^{\pi y}| = |e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})}||e^{i\pi(2N+1)}e^{-\pi y}+e^{\pi y}| \quad \Rightarrow$$

$$|e^{i\pi(N+\frac{1}{2})}e^{-\pi y}+e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})}e^{\pi y}| = |-e^{-\pi y}+e^{\pi y}| = |e^{-\pi y}-e^{\pi y}| \qquad (10)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα:

$$|P-S| \geq ||P|-|S|| \quad , \quad P,\ S \in \mathcal{C}$$

για τον παρονομαστή του κλάσματος στο δεξί μέρος της εξίσωσης (9) καθώς και την (10) βρίσκουμε ότι:

$$|\cot\pi(N+\frac{1}{2}+iy)| \leq \frac{|e^{-\pi y}-e^{\pi y}|}{||e^{i\pi(N+\frac{1}{2})}||e^{-\pi y}|-|e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})}||e^{\pi y}||} \qquad (11)$$

και επειδή $|e^{\pm\pi y}| = e^{\pm\pi y}$ η (11) απλοποιείται σε:

$$|\cot\pi(N+\frac{1}{2}+iy)| \leq \frac{|e^{-\pi y}-e^{\pi y}|}{|e^{-\pi y}-e^{\pi y}|} \Rightarrow |\cot\pi(N+\frac{1}{2}+iy)| \leq 1 \qquad (12)$$

Με πανομοιότυπη διαδικασία αποδεικνύουμε ότι η $\cot\pi z$ είναι φραγμένη από την μονάδα και στην διαδρομή DA. Επομένως η $\cot\pi z$ φράσσεται στο περίγραμμα Γ από την συνθήκη:

$$|\cot\pi z| \leq \max(\coth\frac{\pi}{2}, 1) \qquad \forall z \in \Gamma \qquad (13)$$

Στην συνέχεια θα θέσουμε:

$$K = \max(\coth\frac{\pi}{2}, 1)$$

Επανερχόμαστε τώρα στο ολοκλήρωμα $I_\Gamma = \oint_\Gamma dz\ f(z)\cot\pi z$. Προφανώς θα ισχύει (τριγωνική ανισότητα):

$$|I_\Gamma| = |\oint_\Gamma dz\ f(z)\cot\pi z| \leq K\oint_\Gamma |dz||f(z)| \qquad (14)$$

Για το περίγραμμα Γ ισχύει ότι:

$$\oint_\Gamma |dz| = 4(2N+1)$$

δηλαδή το $\oint_\Gamma\ |dz|$ είναι η περίμετρος του τετραγώνου ABCD. Αν υποθέσουμε ότι η $f(z)$ φράσσεται στο Γ από $\frac{1}{N^s}$ με $s > 1$ τότε η (14) δίνει:

$$|I_\Gamma| \leq 4K\frac{2N+1}{N^s}$$

με:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2N+1}{N^s} = 0 \qquad , \qquad s > 1$$

που σημαίνει ότι:

$$\lim_{N\to\infty}\oint_\Gamma dz\ f(z)\cot\pi z = 0$$

και επομένως από την σχέση (2) μπορούμε να υπολογίσουμε το ζητούμενο άθροισμα $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ παίρνοντας το όριο $N \to \infty$. Καταλήγουμε λοιπόν στη κεντρική σχέση της παρούσας ανάλυσης:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{M(N)} \mathrm{Res}(f(z)\cot\pi z,\ \zeta_m) \qquad (15)$$

Συνήθως το M στο άθροισμα του δεξιού μέρους της (15) που αφορά τους πόλους της $f(z)$ δεν εξαρτάται από το N οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{m=1}^{M} \mathrm{Res}(f(z)\cot\pi z,\ \zeta_m) \qquad (16)$$

Για την επίλυση ασκήσεων το περίγραμμα Γ θεωρείται ως δεδομένο και αυτό που απαιτείται είναι η απόδειξη ότι η $f(z)$ φράσσεται στο Γ από άνω φράγμα της μορφής $\frac{1}{N^s}$ με $s > 1$ και η εφαρμογή της σχέσης (16) που προϋποθέτει την εύρεση των ολοκληρωτικών υπολοίπων της συνάρτησης $f(z)\cot\pi z$ στους πόλους της $f(z)$ που εσωκλείονται στο Γ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα υπολογιστεί το άθροισμα $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

- Η $f(z)$ είναι $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$.
- Η $f(z)$ έχει δύο απλούς πόλους στα $z_1 = -i$ και $z_2 = i$.
- Πρέπει να προσδιορίσουμε πως φράσσεται η $f(z)$ στο περίγραμμα Γ. Για την οριζόντια διαδρομή AB ισχύει:

$$|f(z_{AB})| = \frac{1}{|x + i(-N - \frac{1}{2})|^2} = \frac{1}{x^2 + (N + \frac{1}{2})^2} < \frac{1}{N^2}$$

και παρόμοιες σχέσεις προκύπτουν για τις υπόλοιπες διαδρομές BC, CD, DA. Επομένως εδώ έχουμε $s = 2$ και ικανοποιούνται οι συνθήκες για την χρήση της σχέσης (16).

- Το ζητούμενο άθροισμα βρίσκεται ως:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = -\pi \left(\mathrm{Res}(\frac{\cot \pi z}{z^2+1}, -i) + \mathrm{Res}(\frac{\cot \pi z}{z^2+1}, i) \right)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Θέλει προσοχή η περίπτωση που $f(z)$ και $\cot \pi z$ έχουν κοινούς πόλους, δηλαδή η $f(z)$ έχει πόλους σε ακέραια τιμή του πραγματικού άξονα. Τότε πρέπει να υπολογιστεί ξεχωριστά το ολοκληρωτικό υπόλοιπο του πόλου αυτού και αναγκαστικά το ζητούμενο άθροισμα θα περιέχει τους υπόλοιπους όρους. Αυτό συμβαίνει για παράδειγμα όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ οπότε $f(z) = \frac{1}{z^2}$ με μοναδικό πόλο τάξης 2 στο $z = 0$. Τότε λόγω της συμμετρίας $f(z) = f(-z)$ μπορούμε να γράψουμε:

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\pi \mathrm{Res}(\frac{\cot \pi z}{z^2}, 0)$$

όπου ο πόλος στο $z = 0$ είναι τάξης 3 για την συνάρτηση $\frac{\cot \pi z}{z^2}$ αφού και η $\cot \pi z$ έχει απλό πόλο εκεί. Επομένως σε αυτή τη περίπτωση ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου γίνεται μέσω της γενικής σχέσης για πόλο τάξης n:

$$\mathrm{Res}(G(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}\left((z-z_0)^n G(z)\right)}{dz^{n-1}}$$