Η Εξίσωση Helmholtz

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα ασχοληθούμε με την (μη ομογενή) εξίσωση Helmholtz σε D χωρικές διαστάσεις :

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)\Psi(\vec{r}) = -f(\vec{r}) \qquad (k \in \mathbb{R}) \tag{60}$$

Η εξίσωση αυτή συνοδεύεται (συνήθως) από συνοριακές συνθήκες (εν γένει μη ομογενείς) τύπου Dirichlet οι οποίες καθορίζουν τη λύση επάνω σε μια επιφάνεια S : $\Psi(\vec{r})\big|_S \equiv \psi(\vec{r}_S) \neq 0$, ή τύπου Neumann οπότε καθορίζεται η (κάθετη στην επιφάνεια S) παράγωγος της λύσης : $\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\Psi(\vec{r})\big|_S \equiv \partial_n \psi(\vec{r}_S) \neq 0$.
Η αντίστοιχη εξίσωση Green είναι

$$(\vec{\nabla}_r^{\,2} + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{61}$$

και υπόκειται, ως συνήθως, στις αντίστοιχες ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Η εξ. (60) προφανώς δεν μεταβάλλεται αν κάνουμε την αλλαγή

$$\Psi \to \tilde{\Psi} = \Psi + \varphi \tag{62}$$

με $$\varphi(\vec{r}) = \int d^D p C(\vec{p}) \exp(i\vec{p} \cdot \vec{r})\delta(\vec{p}^{\,2} - k^2)$$

τη γενική λύση της ομεγενούς

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)\varphi(\vec{r}) = 0$$

Αν οι συνοριακές συνθήκες μένουν κι αυτές αναλλοίωτες τότε η αλλαγή (62)είναι μια συμμετρία του προβλήματός μας, η συνάρτηση Green δεν υπάρχει και πρέπει να περάσουμε στη γενικευμένη συνάρτηση Green**.** Ειδικά όταν $k^2 = 0$ (οπότε η εξίσωση (60) γίνεται η εξίσωση Poisson) η αλλαγή

$$\Psi \to \tilde{\Psi} = \Psi + C \tag{63}$$

παραβιάζει τις συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet αλλά όχι τις Neumann. Επομένως στην πρώτη περίπτωση η λύση είναι μοναδική και η συνάρτηση Green υπάρχει ενώ στη δεύτερη η λύση μπορεί να προσδιορισθεί έως κάποια αυθαίρετη σταθερά και πρέπει να αναφερόμαστε στη γενικευμένη συνάρτηση Green .

- Η τεχνική που θα ακολουθήσουμε εδώ για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων Green που αφορούν στην εξ. Helmholtz είναι η εξής: Πρώτα **θα αφαιρέσουμε τα σύνορα που επιβάλουν τις όποιες συνοριακές συνθήκες και θα κάνουμε τον υπολογισμό σε απεριόριστο χώρο.**

Αυτή η επιλογή, όπως θα δούμε, μπορεί να κάνει πολύ εύκολο τον προσδιορισμό των ιδιοσυναρτήσεων του διαφορικού μας τελεστή και επομένως τον υπολογισμό της αντίστοιχης συνάρτησης Green G_0 . Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να βρούμε λύση της ομογενούς εξίσωσης, λύση η οποία αν προστεθεί στην G_0 να μας δώσει την όποια συνάρτηση Green μας ενδιαφέρει. Αυτή μας η επιλογή καθόλου δεν αποκλείει τη δυνατότητα ενός ευθύ υπολογισμού που θα στηρίζεται στον προσδιορισμό των ιδιοσυναρτήσεων του διαφορικού μας τελεστή οι οποίες θα ικανοποιούν τις συνοριακές απαιτήσεις που θέτει το πρόβλημά μας.

Η μεγάλη διευκόλυνση στον απεριόριστο χώρο είναι ότι έχουμε στη διάθεσή μας τα επίπεδα κύματα τα οποία είναι ιδιοσυναρτήσεις του διαφορικού μας τελεστή και συγκροτούν μια πλήρη βάση :
Πράγματι οι συναρτήσεις

$$\varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \exp(i\vec{p}\cdot\vec{r}) \tag{64}$$

είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή μας

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)\varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) = (-\vec{p}^2 + k^2)\varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) \equiv \lambda_p \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) \tag{65}$$

και ταυτόχρονα είναι ένα πλήρες

$$\int d^D p \varphi_{\vec{p}}(\vec{r})\varphi^*_{\vec{p}}(\vec{r}\,') = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \exp[i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')] = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{66}$$

και ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων

$$\int d^D r \varphi_{\vec{p}}(\vec{r})\varphi^*_{\vec{p}\,'}(\vec{r}) = \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \exp[i\vec{r}\cdot(\vec{p}-\vec{p}\,')] = \delta(\vec{p}-\vec{p}\,') \tag{67}$$

Μπορούμε επομένως –σύμφωνα με τη σχέση (25)- να γράψουμε για τη συνάρτηση Green

$$G_0(\vec{r},\vec{r}\,') = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\exp[i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')]}{\vec{p}^2 - k^2} \tag{68}$$

Ορισμένες παρατηρήσεις είναι εδώ απολύτως απαραίτητες.

(α) Τα επίπεδα κύματα (64) ως βάση είναι διαθέσιμα ακόμα κι αν ο χώρος μας είναι περιορισμένος. Εν τούτοις η συνάρτηση Green που θα κατακευασθεί με τη βοήθεια τους δεν θα ικανοποιεί, εν γένει, τις συνοριακές απαιτήσεις που θέτει το πρόβλημά μας.

(β) Όπως φαίνεται από το αποτέλεσμα (68) η συνάρτηση G_0 εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$. Αυτό ξεκινάει από την εξ. (61) όπου αν κάνουμε τις μεταθέσεις

$$\vec{r} \to \vec{r} + \vec{a} \ , \ \ \vec{r}' \to \vec{r}' + \vec{a} \tag{69}$$

δεν αλλάζει ούτε ο διαφορικός τελεστής ούτε η συνάρτηση δ. Καθώς ο χώρος είναι απεριόριστος οι χωρικές μεταθέσεις δεν προσκρούουν σε κάποιες συνοριακές απαιτήσεις και επομένως περιμένουμε η λύση στο πρόβλημά μας να είναι κι αυτή αναλλοίωτη σε χωρικές μεταθέσεις. Ο μόνος τρόπος να γίνει αυτό είναι να εξαρτάται από τη διαφορά $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$.

Όπως θα διαπιστώσουμε όταν θα κάνουμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος αλλά και όπως μπορούμε να συνάγουμε από τη μορφή του, η συνάρτηση G_0 θα εξαρτάται τελικά μόνο από την απόσταση $\left|\vec{R}\right| \equiv R$. Η αφετηρία αυτού του αποτελέσματος βρίσκεται στον διαφορικό μας τελεστή ο οποίος είναι αναλλοίωτος σε στροφές όπως και ο απεριόριστος χώρος μας ο οποίος θεωρείται ομογενής και ισότροπος.

(γ) Το αναλλοίωτο σε χωρικές μεταθέσεις –δηλαδή ο ομογενής απεριόριστος χώρος- είναι που επιτρέπει τα επίπεδα κύματα (64) ως ιδιοσυναρτήσεις του διαφορικού μας τελεστή : Οι μεταθέσεις (69) το μόνο που κάνουν είναι να προσθέτουν μια φάση στα επίπεδα κύματα- μεταθέτουν, δηλαδή ,την ισοφασική επιφάνεια - η οποία στην εξίσωση ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων (65) δεν έχει καμμιά σημασία.
Λόγω της συμμετρίας ως προς τις στροφές οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές είναι (απείρως) εκφυλισμένες αφού όλες οι διευθύνσεις του διανύσματος $\vec{p}$ αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή η οποία εξαρτάται μόνο από το μέτρο $\left|\vec{p}\right|$

(δ) **Όπως είναι προφανές το αποτέλεσμα (68) δεν είναι καλά ορισμένο: Καθώς ολοκληρώνουμε θα υπάρχει μηδενισμός του παρονομαστή όταν $\vec{p}^2 = k^2$.**
Το πρόβλημα αυτό είναι αντανάκλαση του γεγονότος ότι ο χώρος μας δεν έχει σύνορα. Αυτό σημαίνει, όπως είπαμε, αναλλοιώτητα σε χωρικές μεταθέσεις και αποδοχή των επιπέδων κυμάτων ως ιδιοσυναρτήσεων του διαφορικού τελεστή. Έτσι όμως και καθώς η $\vec{p}$ είναι συνεχής μεταβλητή **πάντα θα έχουμε πρόβλημα μηδενικών ιδιοτιμών** όπως αμέσως φαίνεται από την εξ.(65). **Με άλλα λόγια σε χώρο χωρίς σύνορα η αλλαγή (62) είναι συμμετρία του προβλήματός μας. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η συνάρτηση Green (68) δεν υπάρχει.**

Η αντιμετώπιση του προβλήματος θα γίνει με τον τρόπο που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.
Ορίζουμε τη **γενικευμένη συνάρτηση Green** (αυτή, δηλαδή, που αποφεύγει τους πόλους) όπως φαίνεται παρακάτω (βλέπε και τη σχέση (52) του προηγουμένου εδαφίου):

$$\tilde{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') = P\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\exp[i\vec{p}\cdot(\vec{r} - \vec{r}')]}{\vec{p}^2 - k^2} \tag{70}$$

(Το σύμβολο P σημαίνει την κύρια τιμή του ολοκληρώματος).

Η συνάρτηση $\tilde{G}_0$ ικανοποιεί την εξ. (61) :

$$(\vec{\nabla}_r^{\,2} + k^2)\tilde{G}_0(\vec{r},\vec{r}\,') = P\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}(-\vec{p}^{\,2}+k^2)\frac{\exp[i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')]}{\vec{p}^{\,2}-k^2} = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad (71)$$

Ο λόγος που η γενικευμένη εξίσωση Green στην περίπτωση που συζητάμε συμπίπτει με τη συνήθη οφείλεται στο ότι το φάσμα του διαφορικού τελεστή είναι συνεχές και επομένως η συνεισφορά των ιδιοσυναρτήσεων με μηδενικές ιδιοτιμές έχει μηδενικό βάρος.
Η συνάρτηση (70) υπόκειται στον γενικό περιορισμό (45) :

$$\int d^D r \varphi^*_{\vec{k}}(\vec{r})\tilde{G}_0(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} P\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}\,'}}{\vec{p}^{\,2}-k^2}\int d^D r e^{i\vec{r}\cdot(\vec{p}-\vec{k})} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} P\int d^D p \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}\,'}}{\vec{p}^{\,2}-k^2}\delta(\vec{p}-\vec{k}) = 0 \qquad (72)$$

(Γράψαμε $\vec{k}$ ένα διάνυσμα το οποίο έχει μέτρο $\vec{k}^2 = k^2$)

Όπως μπορεί εύκολα να δει κανείς η απαίτηση (46) στην περίπτωσή μας έχει μια πολύ απλή μετάφραση .
Ξεκινάμε αναλύοντας τη λύση της εξ. (60) στη βάση (64) ή, με άλλα λόγια, θεωρώντας τον μετασχηματισμό Fourier:

$$\Psi(\vec{r}) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}\Phi(\vec{p})$$

Από την εξ. (60) αμέσως προκύπτει ότι

$$f(\vec{r}) = -(\vec{\nabla}^2 + k^2)\int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}\Phi(\vec{p}) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}(\vec{p}^{\,2}-k^2)\Phi(\vec{p})$$

και επομένως

$$\int d^D r \varphi^*_{\vec{k}}(\vec{r}) f(\vec{r}) = g(\vec{k}) = \int d^D p(\vec{p}^{\,2}-k^2)\Phi(\vec{p})\delta(\vec{p}-\vec{k}).$$

Η τελευταία σχέση δεν επιβάλλει κάποιον ιδιαίτερο περιορισμό στον όρο της μη ομογένειας. Μας λέει όμως ότι καθώς $\vec{p} \to \vec{k}$, η λύση στο πρόβλημά μας πρέπει να είναι τέτοια ώστε :

$$(\vec{p}^{\,2}-k^2)\Phi(\vec{p}) \sim g(\vec{k}) \qquad (73)$$

Μετά τη ανάλυση αυτή και σύμφωνα με όσα είπαμε στο προηγούμενο εδάφιο η λύση της εξίσωσης Helmholtz θα είναι :

$$\Psi(\vec{r}) = F_k(\vec{r}) + \int d^D r' \tilde{G}_0(\vec{r},\vec{r}\,') f(\vec{r}\,') \qquad (74)$$

Με

$$F_k(\vec r)=\int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D/2}} C(\vec p) e^{i\vec p\cdot\vec r}\delta(\vec p^2-k^2)$$

και $C(\vec p)$ απροσδιόριστες συναρτήσεις. Μπορεί κανείς πολύ εύκολα να διαπιστώσει ότι η λύση (74) ικανοποιεί την απαίτηση (73).
Όπως είπαμε και στο προηγούμενο εδάφιο αλλά και όπως προκύπτει και από τη συζήτηση που κάνουμε εδώ, η γενικευμένη συνάρτηση Green δεν είναι τίποτα παραπάνω από έναν τρόπο ομαλοποίησης του ολοκληρώματος (68).
Μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει και τις συναρτήσεις Green $G^{\pm}$ οι οποίες ορίζονται όπως φαίνεται παρακάτω:

$$G_0^{\pm}(\vec r,\vec r')\equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{\exp[i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')]}{\vec p^2-(k^2\pm i\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{\exp[i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')]}{\vec p^2-(k\pm i\varepsilon)^2} \qquad (75)$$

(Για το τελευταίο βήμα υποθέσαμε ότι $k\geq 0$. Σε αντίθετη περίπτωση θα γράφαμε $|k|\pm i\varepsilon$).
Οι συναρτήσεις ικανοποιούν την εξ. Green και σχετίζονται με την γενικευμένη συνάρτηση Green με τον τρόπο που υποδείξαμε στο προηγούμενο εδάφιο:

$$G_0^{\pm}=\tilde G_0\pm\Lambda \qquad (76)$$

όπου η συνάρτηση

$$\Lambda(\vec r,\vec r')=i\pi\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\exp[i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')]\delta(\vec p^2-k^2) \qquad (77)$$

είναι, προφανώς , λύση της ομογενούς εξίσωσης :

$$(\vec\nabla^2+k^2)\Lambda(\vec r,\vec r')=i\pi\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\exp[i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')](\vec p^2-k^2)\delta(\vec p^2-k^2)=0$$

.
Οι συναρτήσεις (76) διαφέρουν από τη γενικευμένη συνάρτηση στον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρονται στο άπειρο.
Από τη σκοπιά των μαθηματικών και οι τρείς συναρτήσεις είναι εξίσου αποδεκτοί τρόποι ομαλοποίησης του ολοκληρώματος (68) και οποιαδήποτε από αυτές μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση επάνω στην οποία –προσθέτοντας την κατάλληλη λύση της ομογενούς- μπορούμε να κτίσουμε την όποια συνάρτηση Green μας ενδιαφέρει.
Συμβαίνει πολλές φορές το φυσικό μας πρόβλημα να αναφέρεται σε χώρο χωρίς σύνορα. Στην περίπτωση αυτή συνήθως χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις $G_0^{\pm}$ γιατί στο άπειρο,όπως θα δούμε, συμπεριφέρονται ως τρέχοντα κύματα ενώ η $\tilde G_0$ ως στάσιμο κύμα.
Πριν προχωρήσουμε με τους συγκεκριμένους υπολογισμούς ειναι πολύ εύκολο να δείξει κανείς ότι αν στο αποτέλεσμα (74) κάνουμε την αντικατάσταση (76) θα γράψουμε τη λύση στο πρόβλημά μας :

$$\Psi(\vec{r}) = F_k(\vec{r}) + \int d^D r' G_0^{\pm}(\vec{r},\vec{r}') f(\vec{r}') \qquad (78)$$

Το τρισδιάστατο πρόβλημα.

Επειδή οι συναρτήσεις $G_0^{\pm}$ έχουν περισσότερο φυσικό ενδιαφέρον (λόγω της συμπεριφοράς τους στο άπειρο) θα ξεκινήσουμε τον υπολογισμό μας από αυτές.

Σε τρείς διαστάσεις τα ολοκληρώματα (75) γράφονται:

$$G_0^{\pm}(R) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{R}}}{\vec{p}^2-(k\pm i\varepsilon)^2} = \frac{1}{4\pi^2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty} dp\frac{p^2}{p^2-(k\pm i\varepsilon)^2}\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\exp(ipR\cos\theta) \qquad (79)$$

Για να φθάσουμε στην τελευταία σχέση, πήγαμε σε σφαιρικές συντεταγμένες και χρησιμοποιήσαμε το αναλλοίωτο στις στροφές για να διαλέξουμε το διάνυσμα $\vec{R}$ στην κατεύθυνση του άξονα z.
Το ολοκλήρωμα της πολικής γωνίας γίνεται εύκολα και η σχ.(79) διαβάζεται:

$$G_0^{\pm}(R) = \frac{1}{4\pi^2 iR}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty} dp\frac{p}{p^2-(k\pm i\varepsilon)^2}(e^{ipR}-e^{-ipR}) = \frac{1}{4\pi^2 iR}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dp\frac{p}{p^2-(k\pm i\varepsilon)^2}e^{ipR} \qquad (80)$$

Τα ολοκληρώματα (80) μπορούν εύκολα να γίνουν αν περάσουμε στο μιγαδικό επίπεδο και χρησιμοποιήσουμε τον λογισμό των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Το αποτέλεσμα είναι :

$$G_0^{\pm}(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\exp\left[\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|\right] \qquad (81)$$

Όπως βλέπουμε η συνάρτηση G_0^{+} συμπεριφέρεται ως εξερχόμενο και η G_0^{-} ως εισερχόμενο σφαιρικό κύμα . Σε κάθε περίπτωση και καθώς $R=|\vec{r}-\vec{r}'|\to\infty$ οι συναρτήσεις αυτές μηδενίζονται.
Η γενικευμένη συνάρτηση μπορεί είτε να υπολογισθεί κατευθείαν από το ολοκλήρωμα (70) το οποίο παίρνει τη μορφή

$$\tilde{G}_0 = \frac{1}{4\pi^2 iR}P\int_{-\infty}^{\infty} dp\frac{p}{p^2-k^2}e^{ipR} = \frac{1}{2}(G_0^{+}+G_0^{-}) = \frac{\cos\left[k|\vec{r}-\vec{r}'|\right]}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (82)$$

είτε από τη σχέση (76) αν παρατηρήσουμε πρώτα ότι

$$\Lambda(R) = \frac{i}{2\pi R}\int_0^{\infty} dpp\sin(pR)\delta(p^2-k^2) = \frac{i}{4\pi R}\sin(kR) \quad . \qquad (83)$$

Είναι πολύ σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι όταν $k \to 0$ όταν, δηλαδή, πάμε στην εξίσωση Poisson θα πάρουμε :

$$\tilde{G}_0 = G_0^+ = G_0^- = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{84}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι, βέβαια, το δυναμικό Coulomb :
Η συνάρτηση Green ,όπως έχουμε πει, είναι το αποτέλεσμα (εδώ το δυναμικό) το οποίο παράγεται στη θέση $\vec{r}$ από ένα αίτιο (εδώ το φορτίο $q = 1/4\pi$) εντοπισμένο στη θέση $\vec{r}'$.

Το διδιάστατο πρόβλημα.

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος (75) σε δύο διαστάσεις είναι λιγώτερο εύκολος από αυτόν στις τρείς διαστάσεις. Όπως εκεί έτσι και εδώ θα πάμε σε πολικές συντεταγμένες και θα γράψουμε

$$G_0^{\pm}(L) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{\mathrm{e}^{i\vec{p}\cdot\vec{L}}}{\vec{p}^2-(k\pm i\varepsilon)^2} = \frac{1}{4\pi^2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty dp\frac{p}{p^2-(k\pm i\varepsilon)^2}\int_0^{2\pi} d\theta \exp(ipL\cos\theta) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty dp\frac{p}{p^2-(k\pm i\varepsilon)^2}J_0(pL) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{K}_0(\pm ikL) \tag{85}$$

(Στην τελευταία σχέση οι συναρτήσεις J_0 και K_0 είναι οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και τρίτου είδους και μηδενικής τάξης αντίστοιχα ενώ γράψαμε $L = |\vec{L}| = |\vec{r}-\vec{r}'|$ την απόσταση σε δύο διαστάσεις.)
Ενδιαφέρον παρουσιάζει το αποτέλεσμα (85) στο όριο $k \to 0$ όπου αναπαριστά το δυναμικό Coulomb σε δύο διαστάσεις. Από τη συμπεριφορά της συνάρτησης K_0 μπορούμε να δούμε ότι καθώς $k \to 0$:

$$G_0^{\pm}(L) \sim -\frac{1}{2\pi}\ln(\pm ikL) \tag{86}$$

Είναι προφανές ότι η έκφραση αυτή αποκλίνει. Επειδή όμως αυτό που έχει σημασία είναι οι μεταβολές του δυναμικού και όχι η απόλυτη τιμή του μπορούμε (χωρίς επιπτώσεις για το φυσικό πρόβλημα που μας ενδιαφέρει) να ορίσουμε ως δυναμικό τη διαφορά της (86) από την τιμή της σε μια αυθαίρετη απόσταση L_0:

$$G_0(L) \equiv G_0^{\pm}(L) - G_0^{\pm}(L_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln(\frac{L}{L_0}) \tag{87}$$

Όπως βλέπουμε από τη σχέση αυτή L_0 είναι η αυθαίρετη απόσταση στην οποία ορίζουμε το μηδέν του δυναμικού. Το αποτέλεσμα (87) είναι το δυναμικό Coulomb σε δύο διαστάσεις. Μπορούμε αμέσως να παρατηρήσουμε ότι καθώς πηγαίνουμε