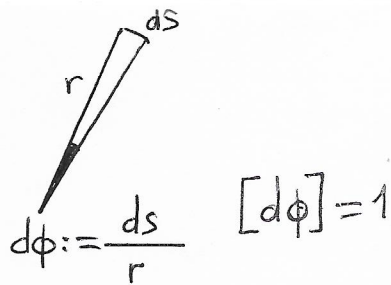


στοιχειώδης  
έπιπεδο γωνία  
 $d\phi$



$r$ : επιβατική (μετακινούμενη, "περιορφερόμενη") ακτίνα  
 $ds$ : στοιχειώδης μήκος τόξου

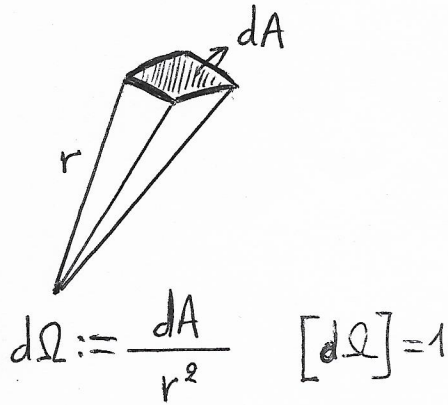
$$\Rightarrow ds = r d\phi \Rightarrow$$

$$\int_{\text{κύκλος}} ds = \int_{\text{κύκλος}} r d\phi \Rightarrow$$

$$2\pi r = r \int_{\text{κύκλος}} d\phi \Rightarrow$$

$$\phi_{ολ} = \text{ολική έπιπεδο γωνία} = 2\pi$$

στοιχειώδης  
στερεά γωνία  
 $d\Omega$



$r$ : επιβατική ακτίνα  
 $dA$ : στοιχειώδης επιφάνεια

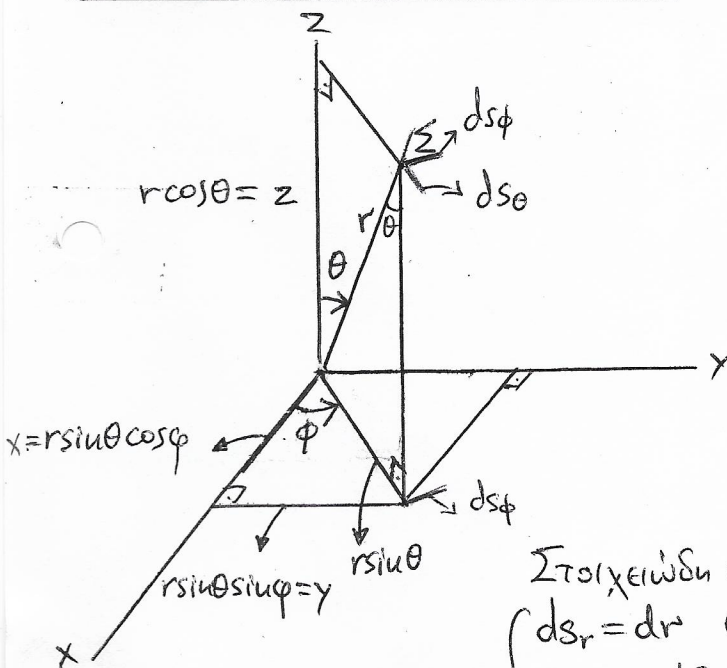
$$\Rightarrow dA = r^2 d\Omega \Rightarrow$$

$$\int_{\text{σφαίρα}} dA = \int_{\text{σφαίρα}} r^2 d\Omega \Rightarrow$$

$$4\pi r^2 = r^2 \int_{\text{σφαίρα}} d\Omega \Rightarrow$$

$$\Omega_{ολ} = \text{ολική στερεά γωνία} = 4\pi$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ  $(r, \theta, \phi)$



$r$ : ακτινική απόσταση (radial distance)  
 $\theta$ : πολική γωνία (polar angle)  
 $\phi$ : άξονοδιακή γωνία (azimuthal angle) or azimuth

Ή σχέση μεταξύ καρτεσιανών συντεταγμένων  $x, y, z$  σφαιρικών συντεταγμένων είναι

- $x = r \sin \theta \cos \phi$  (1)  $r \in [0, \infty)$  (4)
- $y = r \sin \theta \sin \phi$  (2)  $\theta \in [0, \pi]$  (5)
- $z = r \cos \theta$  (3)  $\phi \in [0, 2\pi)$  (6)

Στοιχειώδη μήκη σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\left\{ \begin{array}{l} ds_r = dr \quad (7) \\ ds_\theta = r d\theta \quad (8) \\ ds_\phi = r \sin \theta d\phi \quad (9) \end{array} \right\} \Rightarrow dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (13)$$

στοιχειώδης όγκος

$$dA_{r\theta} = r dr d\theta \quad (10)$$

$$dA_{r\phi} = r \sin \theta dr d\phi \quad (11)$$

$$dA_{\theta\phi} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (12)$$

στοιχειώδεις επιφάνειες

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:  $d\Omega_{\theta\phi} = \frac{dA_{\theta\phi}}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi \Rightarrow$

$$\int d\Omega_{\theta\phi} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2\pi [-\cos \theta]_0^\pi = 2\pi \cdot 2$$

$$\Rightarrow \text{ολική στερεά γωνία } \Omega_{ολ} = 4\pi$$

I) Να αποδείξετε ότι η <sup>ΑΞΚΗΛΗ</sup> αντίστροφή ενός άξονατος διόσεως  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  ισοδυναμεί  
 στις σφαιρικές συστήματα με τις  $r \rightarrow r$   
 $\theta \rightarrow \pi - \theta$   
 $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε σημείο  $\Sigma$  στο 1ο όκταονόριο (ΣΧΗΜΑ), οπότε  
 $\theta \in [0, \pi/2]$  ή  $\varphi \in [0, \pi/2]$

Η αντίστροφή  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r} \equiv \vec{r}' \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x' = -x &\Leftrightarrow r' \sin \theta' \cos \varphi' = -r \sin \theta \cos \varphi & (15) \\ y' = -y &\Leftrightarrow r' \sin \theta' \sin \varphi' = -r \sin \theta \sin \varphi & (16) \\ z' = -z &\Leftrightarrow r' \cos \theta' = -r \cos \theta & (17) \end{aligned}$$

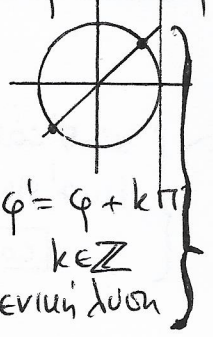
(14)  $\Downarrow$   
 $r' = r$  (18)

ή (17)/(18)  $\cos \theta' = -\cos \theta$   
 $\theta', \theta \in [0, \pi]$   
 $\theta' = \pi - \theta$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (15) ή (16)  $\Rightarrow \tan \varphi' = \tan \varphi$

$\theta' = \pi - \theta$

$\star \sin \theta' \cos \varphi' = -\sin \theta \cos \varphi$   
 $\cos \varphi' = -\cos \varphi$   
 $\sin \theta' \sin \varphi' = -\sin \theta \sin \varphi$   
 $\sin \varphi' = -\sin \varphi$   
 $\varphi' = \varphi + \pi$



ή  $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi)$   
 $\Rightarrow k = 1$  ή  $0$

$\Rightarrow \varphi' = \varphi$  ή  $\varphi + \pi$   
 αν ομως  $\varphi' = \varphi$  (19')  
 (15)  $\Rightarrow \sin \theta' = -\sin \theta$   
 ή (16)  
 (17)  $\Rightarrow \cos \theta' = -\cos \theta$   
 $\tan \theta' = \tan \theta$   
 $\theta' = \theta + k\pi$   
 $\theta', \theta \in [0, \pi]$   $\Rightarrow k = 0$   
 ή  $\theta' = \theta$

Αρα  $\varphi' = \varphi + \pi$  (19)

η.χ. (15)  $\Rightarrow r' \sin \theta' \cos(\varphi + \pi) = -r \sin \theta \cos \varphi$   
 $\xrightarrow{(19)}$   
 $\xrightarrow{(18)}$   $\sin \theta' = \sin \theta$   
 $\theta', \theta \in [0, \pi]$   $\Rightarrow \theta' = \pi - \theta$  (20)

ή (18)  $\Rightarrow \vec{r} = -\vec{r} \Rightarrow \vec{r} = \vec{0}$

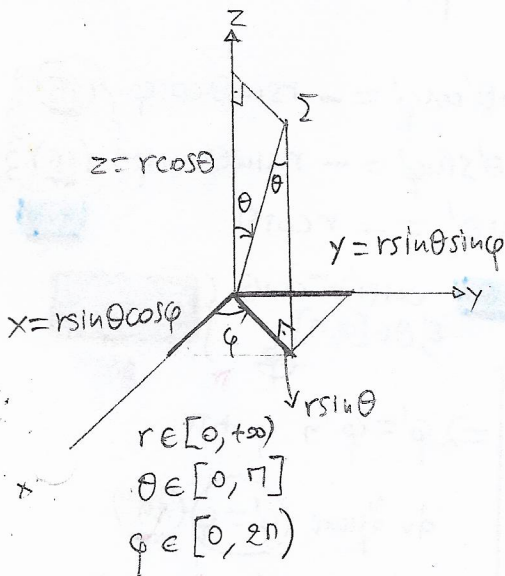
$\varphi' = \varphi \Rightarrow \sin \theta' = -\sin \theta$   
 $\theta', \theta \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \theta' = \theta = 0$   
 $\theta' = \pi - \theta$   
 $n = 0$   
 Ατομο

ΑΣΚΗΣΗ 5

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r} \Rightarrow \begin{aligned} r' &= r \\ \theta' &= \pi - \theta \\ \varphi' &= \pi + \varphi \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ



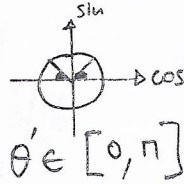
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε σημείο  $\Sigma$  στο 1ο οξυγωνίο, οπότε  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\vec{r}' = -\vec{r} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' \sin \theta' \cos \varphi' = -r \sin \theta \cos \varphi \\ r' \sin \theta' \sin \varphi' = -r \sin \theta \sin \varphi \\ r' \cos \theta' = -r \cos \theta \end{cases}$$

$$\boxed{r' = r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta' \cos \varphi' = -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta' \sin \varphi' = -\sin \theta \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \varphi' = +\tan \varphi \\ \varphi' \in [0, \pi) \end{cases}$$

$$\boxed{\cos \theta' = -\cos \theta}$$



$$\Rightarrow \boxed{\theta' = \pi - \theta}$$

αν  $\varphi' = \varphi$ , από τις δύο πρώτες προκύπτει  $\frac{\sin \theta'}{\cos \theta'} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

$\theta' \in [0, \pi]$

$\Rightarrow$  ΑΤΟΠΟ

"Άρα  $\boxed{\varphi' = \pi + \varphi}$

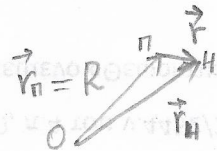
ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΕΣ και ΑΠΑΓΟΡΕΥΜΕΝΕΣ ΟΠΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΕΙΣ

καρβυλάκις

επίσης τω ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΣ ΔΙΠΟΛΟΥ

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r}_H - \omega t + \phi)] \Rightarrow \vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{r}_H \approx \vec{R}$$



↓ ομογενείς, χρονικώς μεταβαλλόμενο

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} V \\ dV &= \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} \end{aligned} \right\} dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V = -\vec{E} \cdot \vec{r} \Rightarrow$$

$$U = e \vec{E} \cdot \vec{r} = -\vec{\Phi} \cdot \vec{E}$$

δυναμική ενέργεια της διαταραχής

$$U_{\vec{k}'\vec{k}}(t) = \int d^3r \Phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}) U_{\vec{E}}(\vec{r}, t) \Phi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

$$= -\vec{E} \cdot \int d^3r \Phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}) \vec{\Phi} \Phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = -\vec{E} \cdot \vec{\Phi}_{\vec{k}'\vec{k}}$$

$$= e \vec{E} \cdot \int d^3r \Phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}) \vec{r} \Phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e \vec{E} \cdot \vec{r}_{\vec{k}'\vec{k}}$$

$$\vec{\Phi}_{\vec{k}'\vec{k}} = -e \vec{r}_{\vec{k}'\vec{k}} \Rightarrow \vec{\Phi}_{\vec{k}'\vec{k}} = -e \vec{r}_{\vec{k}'\vec{k}}$$

Έν τούτοις ελέγχονται στη συμπεριφορά των ιδιοσυναρτήσεων του αδιατάρακτου προβλήματος:

$\vec{r}$  περιττή συνάρτηση

ποιές  $\Phi_{\vec{k}}(\vec{r})$  άρτιες ή περιττές;

→ καθορίζει το αν θα γινόντουσαν το  $\vec{r}_{\vec{k}'\vec{k}}$  και άρα το  $U_{\vec{k}'\vec{k}}(t)$

Αν  $U_{\vec{k}'\vec{k}}(t) = 0 \Rightarrow$  η διαταραχή δεν αλλάζει τις καταστάσεις  $\vec{k}'$  και  $\vec{k}$

οπότε αν το ηλεκτρόνιο ήταν στην  $\vec{k}$  δεν θα μεταβεί στην  $\vec{k}'$  και αντίστροφα.

Τότε λέμε ότι "απαγορεύεται" η μετάβαση  $\vec{k} \leftrightarrow \vec{k}'$



ΚΑΤΑ ΜΕΣΟ ΟΡΟ ΟΙ ΙΔΙΟΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΤΩΣ ΔΙΣΤΕΡΑΜΩΣ ΕΝΟΣΤΗΤΑΤΟΣ ΔΕΝ ΕΠΗΡΕΑΖΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗ

$$\begin{cases} \hat{H} \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \\ \hat{H} = \hat{H}_0 + U_{\varepsilon}(\vec{r}, t) \\ \Psi(\vec{r}) = \sum_k g_k \Phi_k(\vec{r}) \end{cases} \Rightarrow \left[ \hat{H}_0 + U_{\varepsilon}(\vec{r}, t) \right] \left[ \sum_k g_k \Phi_k(\vec{r}) \right] = E \sum_k g_k \Phi_k(\vec{r})$$

Στι  $\int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \dots$

$$\int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \hat{H}_0 \sum_k g_k \Phi_k(\vec{r}) + \int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) U_{\varepsilon}(\vec{r}, t) \sum_k g_k \Phi_k(\vec{r}) = \int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) E \sum_k g_k \Phi_k(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$\sum_k g_k \int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \hat{H}_0 \Phi_k(\vec{r}) + \sum_k g_k \int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) U_{\varepsilon}(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r}) = E \sum_k g_k \int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \Phi_k(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$\sum_k g_k E_k \delta_{k'k} + \sum_k g_k U_{\varepsilon k'k}(t) = E \sum_k g_k \delta_{k'k} \Rightarrow$$

$$g_{k'} E_{k'} + \sum_k g_k U_{\varepsilon k'k}(t) = E g_{k'}$$

Εάν έχουμε προσέγγιση διαφόρων  $U = -\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon} = +e\vec{r} \cdot \vec{\varepsilon} e^{-i\omega t} = U_{\varepsilon}(\vec{r}, t)$

$$U_{\varepsilon k'k}(t) = e e^{-i\omega t} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}_{k'k}$$

Αν λάβουμε τη μέση χρονική τιμή τωσ  $\langle U_{\varepsilon k'k}(t) \rangle = 0$   
 διότι  $\langle e^{-i\omega t} \rangle = 0$

$$\langle g_{k'} E_{k'} \rangle + \sum_k g_k \langle U_{\varepsilon k'k}(t) \rangle = \langle E g_{k'} \rangle$$

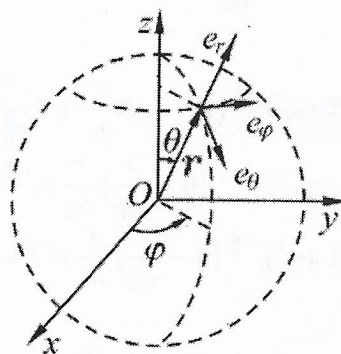
$$g_{k'} \langle E_{k'} \rangle = g_{k'} \langle E \rangle$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = E_{k'} \quad \text{Substit} \Rightarrow$$



### 3.10 Άτομο Υδρογόνου: Μορφή ατομικών τροχιακών.

Στο Σχήμα 3.8 φαίνονται οι σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \varphi)$  όπως συνήθως χρησιμοποιούνται στη φυσική: η απόσταση  $r$  από την αρχή των αξόνων  $O$ , η πολική γωνία  $\theta$ , η αζιμουθιακή γωνία  $\varphi$ . Σημειώνονται και τα μοναδιαία ανύσματα  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$ .



Σχήμα 3.8: Οι σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \varphi)$ : η απόσταση από το κέντρο  $r$ , η πολική γωνία  $\theta$ , η αζιμουθιακή γωνία  $\varphi$ . Σημειώνονται και τα μοναδιαία ανύσματα  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$ .

Οι ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του Υδρογόνου σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουν τη μορφή

$$\Psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r)\Theta_{\ell m}(\theta)\Phi_m(\varphi)$$

οι οποίες είναι δηλαδή τα  $\Phi_k(\vec{r})$  του γενικού συμβολισμού, όπου  $k = \{n, \ell, m\}$  είναι ο συλλογικός κβαντικός αριθμός. Αναλυτικότερα

- $n = 1, 2, 3, \dots$  είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός
- $\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  είναι ο τροχιακός κβαντικός αριθμός, και
- $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$  είναι ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός

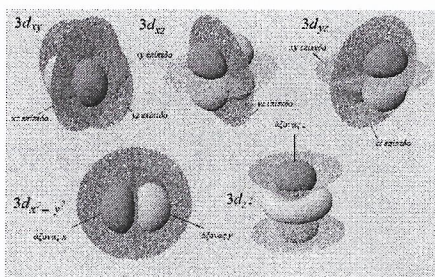
Συγκεκριμένα παρατίθενται παρακάτω τα ατομικά τροχιακά  $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d$  [30].

$$\begin{aligned}
 \Psi_{100}(r, \theta, \varphi) &= (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} & \Psi_{100} &:= 1s \\
 \Psi_{200}(r, \theta, \varphi) &= (32 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} & \Psi_{200} &:= 2s \\
 \Psi_{210}(r, \theta, \varphi) &= (32 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{a_0} \cos \theta e^{-\frac{r}{2a_0}} & \Psi_{210} &:= 2p_z \\
 \Psi_{21\pm 1}(r, \theta, \varphi) &= (64 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{a_0} \sin \theta e^{\pm i\varphi} e^{-\frac{r}{2a_0}} & (\Psi_{21+1} + \Psi_{21-1})/\sqrt{2} &:= 2p_x \\
 & & (\Psi_{21+1} - \Psi_{21-1})/(i\sqrt{2}) &:= 2p_y \\
 \Psi_{300}(r, \theta, \varphi) &= (19683 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(27 - 18 \frac{r}{a_0} + 2 \frac{r^2}{a_0^2}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}} & \Psi_{300} &:= 3s \\
 \Psi_{310}(r, \theta, \varphi) &= (6561 \pi a_0^3/2)^{-\frac{1}{2}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} \cos \theta & \Psi_{310} &:= 3p_z \\
 \Psi_{31\pm 1}(r, \theta, \varphi) &= (6561 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} & (\Psi_{31+1} + \Psi_{31-1})/\sqrt{2} &:= 3p_x \\
 & & (\Psi_{31+1} - \Psi_{31-1})/(i\sqrt{2}) &:= 3p_y \\
 \Psi_{320}(r, \theta, \varphi) &= (39366 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} (3 \cos^2 \theta - 1) & \Psi_{320} &:= 3d_z^2 \\
 \Psi_{32\pm 1}(r, \theta, \varphi) &= (6561 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi} & (\Psi_{32+1} + \Psi_{32-1})/\sqrt{2} &:= 3d_{xz} \\
 & & (\Psi_{32+1} - \Psi_{32-1})/(i\sqrt{2}) &:= 3d_{yz} \\
 \Psi_{32\pm 2}(r, \theta, \varphi) &= (26244 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi} & (\Psi_{32+2} + \Psi_{32-2})/\sqrt{2} &:= 3d_{x^2-y^2} \\
 & & (\Psi_{32+2} - \Psi_{32-2})/(i\sqrt{2}) &:= 3d_{xy}
 \end{aligned}$$

Εννοείται ότι οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να πολλαπλασιαστούν με ένα παράγοντα  $e^{ia}$ , όπου  $a$  μια αυθαίρετη φάση, παραμένοντας ιδιοσυναρτήσεις. Οι αντίστοιχες ιδιοενέργειες είναι  $E_k = \hbar\Omega_k = -\frac{R_E}{n^2} = E_n$ , δηλαδή υπάρχει εκφυλισμός ως προς  $\ell, m$ .  $R_E = 13.6$  eV είναι η ενέργεια Rydberg και  $a_0$  είναι η ακτίνα Bohr. Τα πέντε πρώτα ατομικά τροχιακά  $1s, 2s, 2p_x, 2p_y, 2p_z$  απεικονίζονται στο Σχήμα 3.9, τα πέντε ατομικά τροχιακά  $3d$  στο Σχήμα 3.10, ενώ όλα τα ατομικά τροχιακά υδρογονοειδών κυματοσυναρτήσεων έως το  $7s$ , απεικονίζονται στο Σχήμα 3.11.



Σχήμα 3.9: Τα πέντε πρώτα ατομικά τροχιακά  $1s, 2s, 2p_x, 2p_y, 2p_z$  [31]. Τα χρώματα (πορτοκαλί, γαλανό) αντιστοιχούν σε διαφορετικά πρόσημα, αν π.χ. η πορτοκαλί περιοχή είναι θετική, η γαλανή είναι αρνητική. Θεωρούμε τον παράγοντα  $e^{ia} = 1$ .



Σχήμα 3.10: Τα πέντε ατομικά τροχιακά  $3d$  [31]. Τα χρώματα (πορτοκαλί, γαλανό) αντιστοιχούν σε διαφορετικά πρόσημα, αν π.χ. η πορτοκαλί περιοχή είναι θετική, η γαλανή είναι αρνητική. Θεωρούμε τον παράγοντα  $e^{ia} = 1$ .

	$s (l=0)$			$p (l=1)$			$d (l=2)$				$f (l=3)$				
	$m=0$	$m=0$	$m=\pm 1$	$m=0$	$m=\pm 1$	$m=\pm 2$	$m=0$	$m=\pm 1$	$m=\pm 2$	$m=\pm 3$	$m=0$	$m=\pm 1$	$m=\pm 2$	$m=\pm 3$	
	$s$	$p_z$	$p_x$	$p_y$	$d_{z^2}$	$d_{xz}$	$d_{yz}$	$d_{x^2-y^2}$	$d_{xy}$	$f_z$	$f_{xz}$	$f_{yz}$	$f_{x^2-y^2}$	$f_{xy}$	$f_{z^3}$
$n=1$	•														
$n=2$	•	••	••	••											
$n=3$	•	••	••	••	••	••	••	••	••						
$n=4$	•	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••
$n=5$	•	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••
$n=6$	•	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••
$n=7$	•	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••

Σχήμα 3.11: Όλα τα ατομικά τροχιακά υδρογονοειδών κυματοσυναρτήσεων έως το  $7s$ . Τα χρώματα (κόκκινο, μπλε) αντιστοιχούν σε διαφορετικά πρόσημα, αν π.χ. η κόκκινη περιοχή είναι θετική, η μπλε είναι αρνητική. Θεωρούμε τον παράγοντα  $e^{ia} = 1$ . Εικόνα από wikipedia [32].



$$\begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\phi & \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix}$$

**ΑΣΚΗΣΗ**

Γνωρίζω για εφέτασεις... Δίνεται  $\int_0^\infty e^{-\alpha r} r^n dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$   $n=1,2,3,\dots$   $\alpha > 0$

Δίνονται τα στοιμια τροχιακά του ατόμου H, στη σελ. 112

- ① Να αποδειχθεί ότι η αλλαγή  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r} \Rightarrow$ 

$$\begin{aligned} r' &= r \\ \theta' &= \pi - \theta \\ \phi' &= \pi + \phi \end{aligned}$$

$r$  ακτινική απόσταση  $r \in [0, +\infty)$   
 $\theta$  πολική γωνία  $\theta \in [0, \pi]$   
 $\phi$  φιλμοδριακή γωνία  $\phi \in [0, 2\pi)$
- ② Να αποδειχθεί ότι  $\vec{r} = \frac{r}{2} \sin\theta [(\hat{x} - i\hat{y})e^{i\phi} + (\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\phi}] + r \cos\theta \hat{z}$
- ③ Να ελεχθούν ως προς την σύμμετρία (άρτια ή περιττή). Δικαιολόγηση
- ④ Να βρουν πόσες και ποιές κομβικές επιφάνειες έχει το κάθε στοιμια τροχιακό. Δικαιολόγηση.
- ⑤ Να γραφτεί πιθανως όπως αδώς στη σελ. 117 και να ελεχθεί αν ισχύουν οι κανόνες επιλογής  $\Delta l = \pm 1, \Delta m = 0, \pm 1$ .
- ⑥ π.χ. Να συζητηθούν οι ισοχεί των όπτιμων μεταβάσεων σε ηλίουσα τη, προσεγγιστικά διόλου  $1s \rightarrow 2p_z$   $1s \rightarrow 3p_z$

Διαφορετική ακτινική εξάρτηση

$$\begin{aligned} \Psi_{100}(r, \theta, \phi) &= (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} \\ \Psi_{210}(r, \theta, \phi) &= (32\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{a_0} \cos\theta e^{-\frac{r}{2a_0}} \\ \Psi_{310}(r, \theta, \phi) &= (6561\pi a_0^3/2)^{-\frac{1}{2}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^3r &= r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ \vec{r} &= r \hat{e}_r \end{aligned}$$

$$\vec{r}_{1s2pz} = (32\pi^2 a_0^6)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{r}{a_0} \cos\theta e^{-\frac{r}{2a_0}} \hat{e}_r$$

$$= (32\pi^2 a_0^6)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\varphi \hat{e}_r \cos\theta \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} r$$

$$= (32\pi^2 a_0^6)^{-\frac{1}{2}} K a_0^4 \int_0^{\infty} d\left(\frac{r}{a_0}\right) \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \frac{r}{a_0}$$

$$\mu = \frac{r}{a_0}$$

Διαφορετική  
ακτινική εξίσωση

$$\vec{r}_{1s2pz} = (32\pi^2 a_0^6)^{-\frac{1}{2}} K a_0^4 \int_0^{\infty} d\mu \mu^4 e^{-\frac{3}{2}\mu}$$

$$I_1 = \frac{256}{81} \approx 3.16$$

το  $\hat{e}_r$  εξαρτάται  
από τα  $\theta, \varphi$

$$\vec{r}_{1s3pz} = \left(\frac{6561\pi^2 a_0^6}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \cos\theta \hat{e}_r e^{-\frac{r}{a_0}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} r$$

$$= \left(\frac{6561\pi^2 a_0^6}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\varphi \cos\theta \hat{e}_r \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} r$$

$$= \left(\frac{6561\pi^2 a_0^6}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} K a_0^4 \int_0^{\infty} d\left(\frac{r}{a_0}\right) \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} \frac{r}{a_0}$$

$$= \left(\frac{6561\pi^2 a_0^6}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} K a_0^4 \int_0^{\infty} d\mu \mu^4 (6 - \mu) e^{-\frac{4}{3}\mu}$$

$$I_2 = \frac{2187}{64} - \frac{10935}{512} \approx 34.17 - 21.36 \approx 12.81$$

$$\text{Άρα, } \frac{|\vec{r}_{1s2pz}|}{|\vec{r}_{1s3pz}|} = \left(\frac{6561\pi^2 a_0^6}{32\pi^2 a_0^6 \cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{I_1}{I_2} \approx \left(\frac{6561}{64}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3.16}{12.81} \approx 2.5$$

$$\int d^3r \psi_{100}^* \vec{r} \psi_{210} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-\frac{r}{a_0}} r \hat{e}_r (32\pi a_0^3)^{-1/2} \frac{r}{a_0} \cos\theta e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$= (32\pi^2 a_0^6)^{-1/2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\varphi \hat{e}_r \cos\theta a_0^4 \int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right) \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{r}{a_0} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$= \frac{a_0^4}{4\sqrt{2}\pi a_0^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\varphi \hat{e}_r \cos\theta}_{K_A(\theta, \varphi)} \underbrace{\int_0^\infty d\mu \mu^4 e^{-\frac{3\mu}{2}}}_{I(\mu)} \quad \mu = \frac{r}{a_0}$$

ΣΥΓΚΡΙΣΗ  
 $1s \leftrightarrow 2p_z$   
 $1s \leftrightarrow 2p_x$   
 $1s \leftrightarrow 2p_y$

$$\int d^3r \psi_{100}^* \vec{r} \psi_{21\pm 1} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-\frac{r}{a_0}} r \hat{e}_r (64\pi a_0^3)^{-1/2} \frac{r}{a_0} \sin\theta e^{\pm i\varphi} e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$= (64\pi^2 a_0^6)^{-1/2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\varphi \hat{e}_r \sin\theta e^{\pm i\varphi} a_0^4 \int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right) \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \left(\frac{r}{a_0}\right) \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$= \frac{a_0^4}{8\pi a_0^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\varphi \hat{e}_r \sin\theta e^{\pm i\varphi}}_{K_B(\theta, \varphi)} \underbrace{\int_0^\infty d\mu \mu^4 e^{-\frac{3\mu}{2}}}_{I(\mu)}$$

Διαφορετική  
 χωρική εξάρτηση

Άλλα  $I_A(\mu) = I_B(\mu) = I(\mu)$

$$\hat{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \hat{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \hat{e}_y + \cos\theta \hat{e}_z$$

$$K_A(\theta, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta d\varphi \cos\theta \cos\varphi \hat{e}_x + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta d\varphi \cos\theta \sin\varphi \hat{e}_y + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\varphi \cos^2\theta \hat{e}_z$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \cos\theta \hat{e}_x + \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \cos\theta \hat{e}_y + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^2\theta \hat{e}_z \Rightarrow$$

$$K_A(\theta, \varphi) = 2\pi \left[ -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{1^3}{3} \right] \hat{e}_z = \frac{4\pi}{3} \hat{e}_z$$

$$K_B(\theta, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta d\varphi e^{\pm i\varphi} \cos\varphi \hat{e}_x + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta d\varphi e^{\pm i\varphi} \sin\varphi \hat{e}_y + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\varphi e^{\pm i\varphi} \cos\theta \hat{e}_z$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi e^{\pm i\varphi} \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \hat{e}_x + \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi e^{\pm i\varphi} \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \hat{e}_y + \int_0^{2\pi} d\varphi e^{\pm i\varphi} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos\theta \hat{e}_z$$

$$\left[ \frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta \right]_0^\pi$$

$$= \frac{(-1)^3}{3} - (-1) - \frac{1}{3} + 1 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$K_B(\theta, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi e^{\pm i\varphi} \frac{4}{3} \hat{e}_x + \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi e^{\pm i\varphi} \frac{4}{3} \hat{e}_y = \frac{4}{3} \pi (\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y) \quad \text{δίσκ ...}$$

$$\dots \rightarrow \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \cos\varphi \cos\varphi \pm i \cos\varphi \sin\varphi \right\} \hat{e}_x$$

$$+ \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \sin\varphi \cos\varphi \pm i \sin\varphi \sin\varphi \right\} \hat{e}_y = \frac{4}{3} \cdot \pi (\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y)$$

$$\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi \hat{e}_x \pm \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(2\varphi) \hat{e}_x + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(2\varphi) \hat{e}_y \pm i \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi \hat{e}_y$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} = \pi$$

1) Αρα

$$\frac{\left| \vec{r}_{100, 210} \right|}{\left| \vec{r}_{100, 21\pm 1} \right|} = \frac{\left| \frac{a_0}{4\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{4\pi}{3} \hat{e}_z I(\mu) \right|}{\left| \frac{a_0}{8\pi} \cdot \frac{4\pi}{3} (\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y) I(\mu) \right|} = \frac{2 |\hat{e}_z|}{\sqrt{2} |\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y|} = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 1$$

$$|\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y|^2 = (\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y) \cdot (\hat{e}_x \mp i \hat{e}_y)$$

$$1 \mp i \hat{e}_x \hat{e}_y \pm i \hat{e}_x \hat{e}_y + 1 = 2$$

2) Αρα

$$\frac{\left| \vec{P}_{100, 210} \right|}{\left| \vec{P}_{100, 21\pm 1} \right|} = 1$$

δηλαδή οι μεταβάσεις  $100 (1s) \leftrightarrow 210 (2p_z)$   
 $100 (1s) \leftrightarrow 21\pm 1 (\sim 2p_x, 2p_y)$   
 είναι εξίσου επιτρεπόμενες

$$2p_x = \frac{\psi_{21+1} + \psi_{21-1}}{\sqrt{2}}$$

$$2p_y = \frac{\psi_{21+1} - \psi_{21-1}}{i\sqrt{2}}$$

$$I(\mu) = \int_0^{\infty} d\mu \mu^4 e^{-\frac{3\mu}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \frac{4!}{3^5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^5}{3^5} = \frac{2^8}{3^4}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma r} r^n dr = \frac{n!}{\gamma^{n+1}} \quad n=1,2,3,\dots$$

$$\vec{P}_{100, 210} = -e \vec{r}_{100, 210} = -e \frac{a_0}{4\sqrt{2}\pi} \frac{4\pi}{3} \hat{e}_z \cdot \frac{2^8}{3^4} = -e a_0 \frac{2^7}{3^5} \hat{e}_z$$

$$\vec{P}_{100, 21\pm 1} = -e \vec{r}_{100, 21\pm 1} = -e \frac{a_0}{8\pi} \frac{4\pi}{3} (\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y) \frac{2^8}{3^4} = -e a_0 \frac{2^7}{3^5} (\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y)$$

**Θέμα Α.**

1. Να ελεγχθούν οι  $2s, 2p_z, 3d_{xz}$  ως προς την ομοτιμία.
2. Να βρείτε πόσες και ποιες κομβικές επιφάνειες έχει κάθε μία από τις  $2s, 2p_z, 3d_{xz}$ .
3. Να ελεγχθεί αν μεταβάσεις  $1s \leftrightarrow 2p_z, 1s \leftrightarrow 3p_z, 2s \leftrightarrow 3p_z$  είναι επιτρεπόμενες ή απαγορευμένες στα πλαίσια της προσεγγίσεως διπόλου κι αν ισχύουν οι κανόνες επιλογής  $\Delta l = \pm 1, \Delta m = 0, \pm 1$ .
4. Να συγκριθούν οι ισχύες των οπτικών μεταβάσεων, στα πλαίσια της προσεγγίσεως διπόλου,  $1s \leftrightarrow 2p_z, 1s \leftrightarrow 3p_z$ .
5.  $p_{k_1 k_2} := \int_{\text{παντού}} dV \Phi_{k_1}^*(\mathbf{r})(-e)\mathbf{r}\Phi_{k_2}(\mathbf{r})$  είναι τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής. Εξηγήστε γιατί εάν το στοιχείο πίνακα της διπολικής ροπής μηδενίζεται, δεν υπάρχει τέτοια οπτική μετάβαση.

**Θέμα Β.**

1. Βρείτε σε τι ενέργεια, συχνότητα, μήκος κύματος αντιστοιχούν οι μεταβάσεις  $1s \leftrightarrow 2p_z, 1s \leftrightarrow 3p_z, 2s \leftrightarrow 3p_z$ . Ποιά από αυτές τις μεταβάσεις θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για LASER στο ορατό; Ονομάστε τη συχνότητά της  $\nu_0$ .
2. Έστω ότι το Πλήρες Εύρος στο Ήμισυ του Μείστου (Full Width at Half Maximum, FWHM) της μεταβάσεως αυτής είναι  $\Delta\nu_0^{FWHM} = 2$  GHz. Έστω ότι έχουμε συλλογή ατόμων Υδρογόνου, σε τετραγωνική κοιλότητα με διαστάσεις  $a_x = h = 4$  mm,  $a_y = w = 4$  mm,  $a_z = L = 0.15$  m. Υπάρχουν υποστηριζόμενοι από την κοιλότητα διαμήκεις ΗΜ τρόποι,  $\nu_m$ , οι οποίοι να εμπίπτουν στη συχνοτική περιοχή  $\nu_0$ , η οποία έχει εύρος  $\Delta\nu_0^{FWHM}$ ; Τι τάξεως μεγέθους είναι το  $m$ , ώστε διαμήκεις τρόποι  $\nu_m$  να βρίσκονται εντός της γραμμής εκπομπής  $\nu_0$ , η οποία έχει εύρος  $\Delta\nu_0^{FWHM}$ ; Θέλουμε δηλαδή  $\nu_m \approx \nu_0$ .
3. Δίνονται οι συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου εντός ορθογώνιας παραλληλεπίπεδης κοιλότητας

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ E_y &= E_{y0} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ E_z &= E_{z0} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \\ B_x &= \frac{i}{\omega} (E_{y0} k_z - E_{z0} k_y) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \\ B_y &= \frac{i}{\omega} (E_{z0} k_x - E_{x0} k_z) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \\ B_z &= \frac{i}{\omega} (E_{x0} k_y - E_{y0} k_x) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \end{aligned}$$

όπου  $k_x = \frac{m_x \pi}{a_x}$ , κ.ο.κ., καθώς και οι συχνότητες των τρόπων του ΗΜ πεδίου,

$$\nu_{p q m} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{q}{w}\right)^2 + \left(\frac{m}{L}\right)^2}$$

Βρείτε τους τρεις κατώτερης τάξεως τρόπους με μη μηδενικό ΗΜ πεδίο σε κυβική κοιλότητα.

4. Σε τετραγωνική κοιλότητα  $a_x = a_y = a$ , δείξτε ότι  $\nu_{p q m} = \frac{c}{2L} \sqrt{1+x}$ , όπου  $x = \frac{p^2+q^2}{m^2} \left(\frac{L}{a}\right)^2$ . Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ , δείξτε ότι οι συχνότητες των εγκαρσίων τρόπων στο 3Δ πρόβλημα είναι

$$\nu_{p q m} = \frac{mc}{2L} + \frac{cL}{4a^2} \frac{p^2 + q^2}{m^2}$$

$\frac{mc}{2L} = \nu_m = \nu_{00m}$  είναι οι συχνότητες των διαμηκών τρόπων στο 1Δ πρόβλημα.

5. Βρείτε τη συχνοτική απόσταση  $\Delta\nu_{p,p+1}$  δύο διαδοχικών εγκαρσίων τρόπων, μεταβάλλοντας δηλαδή μόνο το  $p$  και κρατώντας τα  $q, m$  σταθερά. Τι τιμή έχει η  $\Delta\nu_{p,p+1}$  για  $p = 1$  και  $m$  όσο βρήκατε στο ερώτημα 2;

**Κβαντική Οπτική και Lasers.**

Εξέταση της 13ης Ιουνίου 2018. Διδάσκων Κ. Σμμερίδης

Θεωρήστε τις ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του Υδρογόνου  $\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)\Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\varphi) = \Phi_k(\mathbf{r})$ , όπου  $k = \{n, l, m\}$  ο συλλογικός κβαντικός αριθμός. Δηλαδή  $n = 1, 2, 3, \dots$  είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός,  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$  είναι ο τροχιακός κβαντικός αριθμός και  $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$  είναι ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός. Συγκεκριμένα δίνονται οι εξής:

$$\Psi_{100}(r, \theta, \varphi) = (\pi\alpha_0^3)^{-1/2} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$\Psi_{100} \equiv 1s$$

$$\Psi_{200}(r, \theta, \varphi) = (32\pi\alpha_0^3)^{-1/2} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\Psi_{200} \equiv 2s$$

$$\Psi_{210}(r, \theta, \varphi) = (32\pi\alpha_0^3)^{-1/2} \frac{r}{a_0} \cos\theta e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\Psi_{210} \equiv 2p_z$$

$$\Psi_{21\pm 1}(r, \theta, \varphi) = (64\pi\alpha_0^3)^{-1/2} \frac{r}{a_0} \sin\theta e^{\pm i\varphi} e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$(\Psi_{21+1} + \Psi_{21-1})/\sqrt{2} \equiv 2p_x$$

$$(\Psi_{21+1} - \Psi_{21-1})/i\sqrt{2} \equiv 2p_y$$

$$\Psi_{300}(r, \theta, \varphi) = (19683\pi\alpha_0^3)^{-1/2} \left(27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\frac{r^2}{a_0^2}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\Psi_{300} \equiv 3s$$

$$\Psi_{310}(r, \theta, \varphi) = (6561\pi\alpha_0^3/2)^{-1/2} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} \cos\theta$$

$$\Psi_{310} \equiv 3p_z$$

$$\Psi_{31\pm 1}(r, \theta, \varphi) = (6561\pi\alpha_0^3)^{-1/2} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}$$

$$(\Psi_{31+1} + \Psi_{31-1})/\sqrt{2} \equiv 3p_x$$

$$(\Psi_{31+1} - \Psi_{31-1})/i\sqrt{2} \equiv 3p_y$$

$$\Psi_{320}(r, \theta, \varphi) = (39366\pi\alpha_0^3)^{-1/2} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$\Psi_{320} \equiv 3d_{z^2}$$

$$\Psi_{32\pm 1}(r, \theta, \varphi) = (6561\pi\alpha_0^3)^{-1/2} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\varphi}$$

$$(\Psi_{32+1} + \Psi_{32-1})/\sqrt{2} \equiv 3d_{xz}$$

$$(\Psi_{32+1} - \Psi_{32-1})/i\sqrt{2} \equiv 3d_{yz}$$

$$\Psi_{32\pm 2}(r, \theta, \varphi) = (26244\pi\alpha_0^3)^{-1/2} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}$$

$$(\Psi_{32+2} + \Psi_{32-2})/\sqrt{2} \equiv 3d_{x^2-y^2}$$

$$(\Psi_{32+2} - \Psi_{32-2})/i\sqrt{2} \equiv 3d_{xy}$$

Οι αντίστοιχες ιδιοενέργειες είναι  $E_k = \hbar\Omega_k = -\frac{R_E}{n^2} = E_n$ , δηλαδή υπάρχει εκφυλισμός ως προς  $l, m$ .

$R_E = 13.6$  eV είναι η ενέργεια Rydberg και  $a_0$  είναι η ακτίνα Bohr. Θεωρήστε επίσης δεδομένα:

A)  $\int_0^\infty e^{-\gamma r} r^n dr = \gamma^{-(n+1)} n!$  όπου  $n = 1, 2, 3, \dots$  και  $\gamma > 0$ .

B) Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \varphi)$ , η αντιστροφή ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς δηλαδή η πράξη  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$  αντιστοιχεί στις αλλαγές  $r' = r, \theta' = \pi - \theta, \varphi' = \varphi + \pi$ .

Γ) Ισχύει η παρακάτω έκφραση για το διάνυσμα θέσεως:

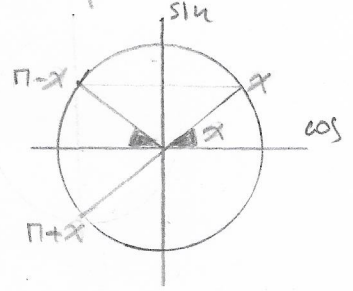
$$\mathbf{r} = \frac{r}{2} \sin\theta [(\hat{x} - i\hat{y}) e^{i\varphi} + (\hat{x} + i\hat{y}) e^{-i\varphi}] + r\cos\theta \hat{z}.$$

Δ)  $\hbar \approx 4.1 \times 10^{-15}$  eV s και  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s.

η σχέση για την ομοζωπία  $\hat{P} Y_e^m = (-1)^l Y_e^m$

① Ομοιότητα  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r} \Leftrightarrow r' = r, \theta' = \pi - \theta, \varphi' = \pi + \varphi$  ΘΕΜΑ Α

$1s = \Psi_{100}$  ΑΡΤΙΑ δίνει έφάρταιται μόνο από το r



$2s = \Psi_{200}$  ΑΡΤΙΑ δίνει έφάρταιται μόνο από το r

$2p_z = \Psi_{210}$  ΠΕΡΙΤΤΗ δίνει  $\cos \theta' = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$

$2p_x = \frac{\Psi_{21+1} + \Psi_{21-1}}{\sqrt{2}} \propto \sin \theta \cos \varphi$  ΠΕΡΙΤΤΗ δίνει...  $\begin{cases} \sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \\ \cos \varphi' = \cos(\pi + \varphi) = -\cos \varphi \end{cases}$

$2p_y = \frac{\Psi_{21+1} - \Psi_{21-1}}{i\sqrt{2}} \propto \sin \theta \sin \varphi$  ΠΕΡΙΤΤΗ δίνει  $\begin{cases} \sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \\ \sin \varphi' = \sin(\pi + \varphi) = -\sin \varphi \end{cases}$

$3s = \Psi_{300}$  ΑΡΤΙΑ δίνει έφάρταιται μόνο από το r

$3p_z = \Psi_{310}$  ΠΕΡΙΤΤΗ δίνει  $\cos \theta' = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$

$3p_x = \frac{\Psi_{31+1} + \Psi_{31-1}}{\sqrt{2}} \propto \sin \theta \cos \varphi$  ΠΕΡΙΤΤΗ δίνει  $\begin{cases} \sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \\ \cos \varphi' = \cos(\pi + \varphi) = -\cos \varphi \end{cases}$

$3p_y = \frac{\Psi_{31+1} - \Psi_{31-1}}{i\sqrt{2}} \propto \sin \theta \sin \varphi$  ΠΕΡΙΤΤΗ δίνει  $\begin{cases} \sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \\ \sin \varphi' = \sin(\pi + \varphi) = -\sin \varphi \end{cases}$

$3d_z^2 = \Psi_{320}$  ΑΡΤΙΑ δίνει έφάρταιται από r και  $\cos^2 \theta$   
 $r' = r \quad \cos \theta' = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \Rightarrow \cos^2 \theta' = \cos^2 \theta$

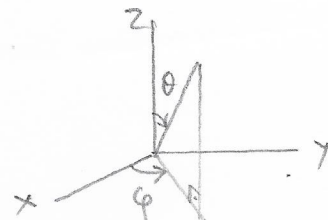
$3d_{xz} = \frac{\Psi_{32+1} + \Psi_{32-1}}{\sqrt{2}} \propto \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$  ΑΡΤΙΑ δίνει...  $\begin{cases} \sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \\ \cos \theta' = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \\ \cos \varphi' = \cos(\pi + \varphi) = -\cos \varphi \end{cases}$

$3d_{yz} = \frac{\Psi_{32+1} - \Psi_{32-1}}{i\sqrt{2}} \propto \sin \theta \cos \theta \sin \varphi$  ΑΡΤΙΑ δίνει...  $\begin{cases} \sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \\ \cos \theta' = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \\ \sin \varphi' = \sin(\pi + \varphi) = -\sin \varphi \end{cases}$

$3d_{x^2-y^2} = \frac{\Psi_{32+2} + \Psi_{32-2}}{\sqrt{2}} \propto \sin^2 \theta \cos 2\varphi$  ΑΡΤΙΑ δίνει...  $\begin{cases} \sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \Rightarrow \sin^2 \theta' = \sin^2 \theta \\ \varphi' = \pi + \varphi \Rightarrow 2\varphi' = 2\pi + 2\varphi \Rightarrow \cos 2\varphi' = \cos 2\varphi \end{cases}$

$3d_{xy} = \frac{\Psi_{32+2} - \Psi_{32-2}}{i\sqrt{2}} \propto \sin^2 \theta \sin 2\varphi$  ΑΡΤΙΑ δίνει...  $\begin{cases} \sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \Rightarrow \sin^2 \theta' = \sin^2 \theta \\ \varphi' = \pi + \varphi \Rightarrow 2\varphi' = 2\pi + 2\varphi \Rightarrow \sin 2\varphi' = \sin 2\varphi \end{cases}$

② Κομβικές επιφάνειες (ΟΛΩΝ)  $n' = \# \text{nodal surfaces} = n-1$   
 $\# \text{κομβικών επιφανειών}$



$1s = \Psi_{100}$  δεν μηδενίζεται ποτέ  $\Rightarrow n' = 0$

$2s = \Psi_{200}$  μηδενίζεται για  $2 - \frac{r}{a_0} = 0 \Rightarrow r = 2a_0$   $n' = 1$   
 μία, σφαιρική

$2p_z = \Psi_{210}$  μηδενίζεται για  $r=0$  (συμείο) κ  $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$   
 $n' = 1$  μία, επίπεδη xy επίπεδο

$2p_x = \frac{\Psi_{21+1} + \Psi_{21-1}}{\sqrt{2}} \propto \sin\theta \cos\phi \frac{r}{a_0}$  μηδενίζεται για  $r=0$  (συμείο)  
 $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$  ή  $\theta = \pi \Rightarrow$  άξονας z  
 $\cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$  ή  $\phi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$  επίπεδο yz  $n' = 1$  (μία, επίπεδη)

$2p_y = \frac{\Psi_{21+1} - \Psi_{21-1}}{i\sqrt{2}} \propto \sin\theta \sin\phi \frac{r}{a_0}$  μηδενίζεται για  $r=0$  (συμείο)  
 $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$  ή  $\theta = \pi \Rightarrow$  άξονας z  
 $\sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$  ή  $\phi = \pi \Rightarrow$  επίπεδο xz  $n' = 1$  (μία, επίπεδη)

$3s = \Psi_{300}$  μηδενίζεται για  $27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\frac{r^2}{a_0^2} = 0$

$$\Delta = 18^2 - 4 \cdot 2 \cdot 27 = 108 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3$$

$$\frac{r}{a_0} = \frac{18 \pm 2 \cdot 3\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{3}}{2} \quad n' = 2 \text{ (δύο, σφαιρικές)}$$

$$\approx 7.098 \text{ ή } \approx 1.902$$

$3p_z = \Psi_{310} \propto \frac{r}{a_0} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \cos\theta$  μηδενίζεται για  $r=0$  (συμείο)

$r = 6a_0$  (σφαιρική επιφάνεια)

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  επίπεδο xy

$n' = 2$  (μία σφαιρική, μία επίπεδη)

$3p_x = \frac{\Psi_{31+1} + \Psi_{31-1}}{\sqrt{2}} \propto \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} \sin\theta \cos\phi$  μηδενίζεται για  $r=0$  (συμείο)

$r = 6a_0$  σφαιρική επιφάνεια

$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$  ή  $\pi \Rightarrow$  άξονας z

$\cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$  ή  $\frac{3\pi}{2} \Rightarrow$  επίπεδο yz

$n' = 2$  μία σφαιρική, μία επίπεδη



$$3p_y = \frac{\psi_{3l+1} - \psi_{3l-1}}{i\sqrt{2}} \propto \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} \sin\theta \sin\varphi$$

μνδνίτναι γναι  $r=0$  (σνυτνίτν)

$r=6a_0$  σφνίρννν νίτνίτννν

$\sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0 \text{ ή } \pi \Rightarrow \text{ήξννν } z$

$\sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0 \text{ ή } \pi \Rightarrow \text{ήτνννδν } \underline{xz}$

$n'=2$  (μνί σφνίρννν, μνί ήτνννδν)

$$3d_{z^2} = \psi_{3z^2} \propto \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 (3\cos^2\theta - 1)$$

μνδνίτναι γναι  $r=0$  (σνυτνίτν)

$\cos^2\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$n'=2$  (2 κωννίτν νίτνίτννν)

$\theta = 54.73^\circ \text{ ή } \theta \approx 125.26^\circ = 180^\circ - 54.73^\circ$

$$3d_{xz} = \frac{\psi_{3z^2+1} + \psi_{3z^2-1}}{\sqrt{2}} \propto \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi$$

μνδνίτναι γναι  $r=0$  (σνυτνίτν)

$\sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0 \text{ ή } \pi \Rightarrow \text{ήξννν } z$

$\cos\theta=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{ήτνννδν } \underline{xy}$

$\cos\varphi=0 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2} \text{ ή } \varphi=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \text{ήτνννδν } \underline{yz}$

$n'=2$  (δύτν ήτνννδνν)

$$3d_{yz} = \frac{\psi_{3z^2+1} - \psi_{3z^2-1}}{i\sqrt{2}} \propto \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi$$

μνδνίτναι γναι  $r=0$  (σνυτνίτν)

$\sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0 \text{ ή } \pi \Rightarrow \text{ήξννν } z$

$\cos\theta=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{ήτνννδν } \underline{xy}$

$\sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0 \text{ ή } \pi \Rightarrow \text{ήτνννδν } \underline{xz}$

$n'=2$  (ήτνννδνν)

$$3d_{x^2-y^2} = \frac{\psi_{3z^2+2} + \psi_{3z^2-2}}{\sqrt{2}} \propto \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \sin^2\theta \cos(2\varphi)$$

μνδνίτναι γναι  $r=0$  (σνυτνίτν)

$\sin^2\theta=0 \Rightarrow \sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0 \text{ ή } \pi \Rightarrow \text{ήξννν } z$

$0 \leq \varphi < 2\pi$

$0 \leq 2\varphi < 4\pi$

$\cos(2\varphi)=0 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ ή } \frac{3\pi}{2} \text{ ή } \frac{5\pi}{2} \text{ ή } \frac{7\pi}{2}$

$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ ή } \varphi = \frac{3\pi}{4} \text{ ή } \varphi = \frac{5\pi}{4} \text{ ή } \varphi = \frac{7\pi}{4}$

$n'=2$  (2 ήτνννδνν)

→ ήτνννδνν ήτνννννννν → ήτνννδνν ήτνννννννν



④  $\vec{r}_{kk'} = \int d^3r \Phi_k^*(\vec{r}) \vec{r} \Phi_{k'}(\vec{r})$

$\vec{r}_{1s 2p_z} = \int d^3r (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} \vec{r} (32\pi a_0^3)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{a_0} \cos\theta e^{-\frac{r}{2a_0}}$   
 $= (32\pi^2 a_0^6)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi e^{-\frac{r}{a_0}} r \hat{e}_r \frac{r}{a_0} \cos\theta e^{-\frac{r}{2a_0}}$   
 $= \frac{1}{4\sqrt{2} \pi a_0^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta \hat{e}_r \int_0^\infty \frac{dr}{a_0} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{r}{a_0} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \cdot a_0^3 \cdot a_0$   
 $= \frac{a_0}{4\sqrt{2} \pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta \hat{e}_r \int_0^\infty d\mu \mu^4 e^{-\mu} e^{-\frac{\mu}{2}} \quad \mu := \frac{r}{a_0}$

$I_1 = \int_0^\infty d\mu \mu^4 e^{-\frac{3\mu}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-(4+1)} 4! = \frac{2^5}{3^5} (2 \cdot 3 \cdot 2^2) = \frac{2^8}{3^4} = \frac{256}{81} \approx 3.16$

$\vec{r}_{1s 3p_z} = \int d^3r (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} \vec{r} \left(\frac{6561\pi a_0^3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} \cos\theta$   
 $= \left(\frac{6561\pi^2 a_0^6}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi r \hat{e}_r e^{-\frac{r}{a_0}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} \cos\theta$   
 $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6561} \pi a_0^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta \hat{e}_r \int_0^\infty \frac{dr}{a_0^4} r^3 e^{-\frac{r}{a_0}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} a_0^4$   
 $= \frac{\sqrt{2} a_0}{\sqrt{6561} \pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta \hat{e}_r \int_0^\infty d\mu \mu^4 e^{-\mu} (6 - \mu) e^{-\frac{\mu}{3}}$

$I_2 = 6 \int_0^\infty d\mu \mu^4 e^{-\frac{4\mu}{3}} - \int_0^\infty d\mu \mu^5 e^{-\frac{4\mu}{3}} = \frac{3^6 (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)}{4^6}$   
 $6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-(4+1)} 4! - \left(\frac{4}{3}\right)^{-(5+1)} 5! = 6 \frac{3^5}{4^5} 4! - \left(\frac{3}{4}\right)^6 5! = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4^5}$   
 $= \frac{3^7}{4^3} - \frac{2 \cdot 3^7 \cdot 5}{4^5} = \frac{2187}{64} - \frac{10935}{512} \approx 34.17 - 21.36 \approx 12.81$

$$\frac{|\vec{\Gamma}_{152P2}|}{|\vec{\Gamma}_{153P2}|} = \frac{\frac{\sigma_0}{4\sqrt{2}\pi} \cdot 3.16}{\frac{\sqrt{2}\sigma_0}{\sqrt{6561}\pi} \cdot 12.81} = \sqrt{\frac{6561}{4 \cdot 16}} \cdot \frac{3.16}{12.81} = \frac{81}{8} \cdot \frac{3.16}{12.81} \approx 2.5$$

⑤ Η δυναμική ενέργεια της διαταραχής γράφεται  $V_E = e E_0 z \cos \omega t$ , άρα, τα στοιχεία πίνακά της είναι  $V_{E k' k}(t) = e E_0 \cos \omega t z_{k' k} = -\mathcal{J}_{z k k} E_0 \cos \omega t$  για  $\vec{E} \parallel \hat{z}$

Όποτε, αν  $z_{k' k} = 0$  η διαταραχή δεν εμπεριέχει τις καταστάσεις  $k'$  και  $k$  τότε, η μετάβαση  $k' \leftrightarrow k$  είναι απαγορευμένη, με την έννοια ότι αν το ηλεκτρόνιο βρισκόταν στην  $k'$ , η διαταραχή δεν θα το εμπεριέχει με την  $k$  και αντίστροφα.

ΘΕΜΑ Β

1.  $E_n = \frac{-13.6 \text{ eV}}{n^2}$      $E_1 = -13.6 \text{ eV}$      $E_2 = -3.4 \text{ eV}$      $E_3 = -1.5 \text{ eV}$

$E_2 - E_1 = -3.4 \text{ eV} + 13.6 \text{ eV} = 10.2 \text{ eV}$      $\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{10.2 \text{ eV}}{4.1 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}} \approx 2.5 \text{ PHz}$

$2p_z \ 1s$   
 $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m}}{2.5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}} = \frac{6}{5} \cdot 10^{-7} \text{ m} = 120 \text{ nm}$

$E_3 - E_1 = -1.5 \text{ eV} + 13.6 \text{ eV} = 12.1 \text{ eV}$      $\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{12.1 \text{ eV}}{4.1 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}} = 3 \text{ PHz}$

$3p_z \ 1s$   
 $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m}}{3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}} = 10^{-7} \text{ m} = 100 \text{ nm}$

$E_3 - E_2 = -1.5 \text{ eV} + 3.4 \text{ eV} = 1.9 \text{ eV}$      $\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1.9 \text{ eV}}{4.1 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}} = 0.5 \text{ PHz}$

$3p_z \ 2s$   
 $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m}}{0.5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm}$

600nm είναι στο φάτος

2.  $\frac{\Delta \nu_0^{FWHM}}{\nu_0} = \frac{2 \text{ GHz}}{0.5 \text{ PHz}} = 4 \cdot 10^{-6}$  άμεσα ξεχωρίζει...

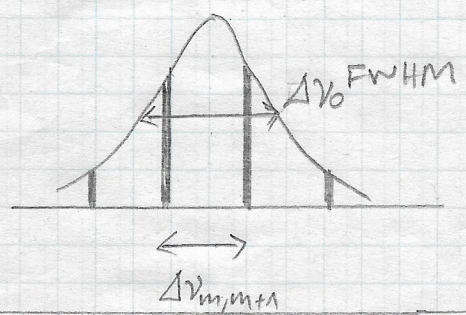
$\omega_m = \frac{m\pi c}{L} \Rightarrow 2\pi \nu_m = \frac{m\pi c}{L} \Rightarrow \nu_m = \frac{m c}{2L}, m \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \Delta \nu_{m,m+1} = \frac{c}{2L} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m}}{2 \cdot 0.15 \text{ m}} = 10^9 \text{ Hz} = 1 \text{ GHz}$

Αρα μέσα στο FWHM του  $\nu_0$ ,  $\Delta \nu_0^{FWHM}$ , χωράνε

$\left[ \frac{\Delta \nu_0^{FWHM}}{\Delta \nu_{m,m+1}} \right] = \frac{2 \text{ GHz}}{1 \text{ GHz}} = 2 \Rightarrow$  χωράνε 2 διακριτές γραμμές

↑ άκραιο μέρος



$\nu_m = \nu_0 \Rightarrow \frac{m c}{2L} = \nu_0 \Rightarrow$   
 $m = \frac{2L \nu_0}{c} = \frac{2 \cdot 0.15 \text{ m} \cdot 0.5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$

$\Rightarrow m = 0.5 \cdot 10^6$

3.

p	q	m	HM περιό	2Δν/c
φ	φ	φ	φ	φ
φ	φ	1	φ	1
φ	1	1	≠ φ	√2
1	1	1	≠ φ	√3
2	φ	φ	φ	2
2	1	φ	≠ φ	√5

$$\textcircled{4} \quad v_{pgm} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{p^2+q^2}{a^2} + \frac{m^2}{L^2}} = \frac{c}{2} \frac{m}{L} \sqrt{1 + \frac{p^2+q^2}{a^2} \frac{L^2}{m^2}} = \frac{c}{2} \frac{m}{L} \sqrt{1+x}$$

12.  $\gamma_{1,2} = \gamma_0 \Rightarrow \dots = 0,5 \text{ Hz} = \dots$   
 $\Rightarrow m = \dots \Rightarrow m = 0,5 \cdot 10^3$

$$13. \quad v_{pgm} = \frac{c}{2} \frac{m}{L} \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{c}{2} \frac{m}{L} \left(1 + \frac{p^2+q^2}{a^2} \frac{L^2}{m^2} \frac{1}{2}\right)$$

$$v_{pgm} = \frac{mc}{2L} + \frac{cL}{4a^2} \frac{p^2+q^2}{m}$$

$$\textcircled{5} \quad \Delta v_{p,p+1} = \frac{cL}{4a^2} \frac{2p+1}{m}$$

$$\Delta v_{1,2} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 0,15}{4 \cdot 4^2 \cdot 10^6} \cdot \frac{3}{0,5 \cdot 10^6} = \frac{3^2}{4^3} \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 10} \cdot 10^8 \text{ Hz} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 10^7 \text{ Hz}$$

$$\Delta v_{1,2} = 0,421875 \cdot 10^7 \text{ Hz} = 4,21875 \text{ MHz}$$