Ακριβής επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

Στο μάθημα καταλήξαμε στο ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = i\Omega_R e^{-i\Omega t}\cos(\omega t)\, c_2 \\ \dot{c}_2 = i\Omega_R e^{i\Omega t}\cos(\omega t)\, c_1 \end{cases} \quad \text{Θεωρώ } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \text{ Τότε:}$$

$$\boxed{\dot{c} = A(t)\, c}, \quad \text{όπου} \quad A(t) = i\Omega_R \cos(\omega t)\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\Omega t} \\ e^{i\Omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

Αν το πρόβλημα ήταν μονοδιάστατο, θα είχαμε:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x \Rightarrow \int_0^t A(t')\,dt' = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \ln\frac{x(t)}{x_0} \Rightarrow$$

$x(t) = x_0 e^{\int_0^t A(t')dt'}$. Επομένως έχουμε λύση: $\boxed{c(t) = e^{B(t)} c(0)}$, όπου

$$B(t) = \int_0^t A(t')\,dt' = i\Omega_R \begin{pmatrix} 0 & \int_0^t \cos(\omega t') e^{-i\Omega t'} dt' \\ \int_0^{t'} \cos(\omega t') e^{i\Omega t'} dt' & 0 \end{pmatrix}$$

$$i\Omega_R \int_0^t \cos(\omega t') e^{i\Omega t'} dt' = \frac{i\Omega_R}{2}\int_0^t e^{i(\omega+\Omega)t'} dt' + \frac{i\Omega_R}{2}\int_0^t e^{i(-\omega+\Omega)t'} dt'$$

$$= \frac{\Omega_R}{2}\left[\frac{e^{i(\omega+\Omega)t} - 1}{\omega+\Omega} - \frac{e^{-i(\omega-\Omega)t} - 1}{\omega-\Omega}\right] =: B_1(t)$$

$$i\Omega_R \int_0^t \cos(\omega t') e^{-i\Omega t'} dt' = \frac{i\Omega_R}{2}\int_0^t e^{i(\omega-\Omega)t'} dt' + \frac{i\Omega_R}{2}\int_0^t e^{-i(\omega+\Omega)t'} dt'$$

$$= \frac{\Omega_R}{2}\left[\frac{e^{i(\omega-\Omega)t} - 1}{\omega-\Omega} - \frac{e^{-i(\omega+\Omega)t} - 1}{\omega+\Omega}\right] =: B_2(t)$$

Άρα: $B = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_1 & 0 \end{pmatrix}$. Αρκεί να υπολογίσουμε το e^B.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1B_2 & 0 \\ 0 & B_1B_2 \end{pmatrix} = B_1B_2\,\mathbb{1}. \text{ Άρα:}$$

$$B^3 = B_1B_2 B, \quad B^4 = (B_1B_2)^2\,\mathbb{1}, \ldots$$

$$B^{2k+1} = (B_1B_2)^k B, \quad B^{2k} = (B_1B_2)^k\,\mathbb{1}. \text{ Άρα:}$$

$$e^{B(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B_1B_2)^k}{(2k)!}\,\mathbb{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B_1B_2)^k}{(2k+1)!}\, B$$

Τότε: $e^{B(t)} = \mathbb{1}\, f(B_1B_2(t)) + B(t)\, g(B_1B_2(t))$. Δυστυχώς οι συναρτήσεις $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$, $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!}$ δεν είναι γνωστές.

<u>Νέα απόπειρα εύρεσης του $e^{B(t)}$ μέσω διαγωνοποίησης του B</u>

$$Bv=bv \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b & B_2 \\ B_1 & -b \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -b & B_2 \\ B_1 & -b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$b_\pm = \pm\sqrt{B_1B_2}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{B_1B_2} & B_2 \\ B_1 & -\sqrt{B_1B_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{+1} \\ v_{+2} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow v_{+2} = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}\, v_{+1} \rightsquigarrow v_+ = \frac{1}{\sqrt{1+B_1/B_2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{B_1/B_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{B_1B_2} & B_2 \\ B_1 & \sqrt{B_1B_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{-1} \\ v_{-2} \end{pmatrix} = 0 \rightsquigarrow v_- = \frac{1}{\sqrt{1+B_1/B_2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{B_1/B_2} \end{pmatrix}$$

Άρα ο πίνακας $\tilde{B} = P^{-1}BP$ είναι διαγώνιος, με

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+B_1/B_2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{B_1/B_2} & -\sqrt{B_1/B_2} \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{\sqrt{1+B_1/B_2}}{2\sqrt{B_1/B_2}}\begin{pmatrix} \sqrt{B_1/B_2} & 1 \\ \sqrt{B_1/B_2} & -1 \end{pmatrix}$$

και $\tilde{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{B_1B_2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{B_1B_2} \end{pmatrix}$. Τότε:

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(P\tilde{B}P^{-1})^n}{n!} = P\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{B}^n}{n!}P^{-1} = Pe^{\tilde{B}}P^{-1},$$ διότι:

$$(P\tilde{B}P^{-1})^n = P\tilde{B}P^{-1}\cdot P\tilde{B}P^{-1}\cdot\ldots = P\tilde{B}^nP^{-1}$$

Όμως: $e^{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{B_1B_2}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{B_1B_2}} \end{pmatrix}$. Άρα:

$$e^B = \frac{1}{2\sqrt{B_1/B_2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{B_1/B_2} & -\sqrt{B_1/B_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\sqrt{B_1B_2}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{B_1B_2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{B_1/B_2} & 1 \\ \sqrt{B_1/B_2} & -1 \end{pmatrix} \qquad \frac{\sqrt{B_1/B_2}=\lambda}{\sqrt{B_1B_2}=\phi}$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} e^{\phi} & e^{-\phi} \\ \lambda e^{\phi} & -\lambda e^{-\phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \lambda(e^{\phi}+e^{-\phi}) & e^{\phi}-e^{-\phi} \\ \lambda^2(e^{\phi}-e^{-\phi}) & \lambda(e^{\phi}+e^{-\phi}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \lambda\cosh\phi & \sinh\phi \\ \lambda^2\sinh\phi & \lambda\cosh\phi \end{pmatrix}$$

Επομένως: $\left\{\boxed{\begin{aligned} C_1(t) &= \cosh\phi(t)\, C_1(0) + \frac{1}{\lambda(t)}\sinh\phi(t)\, C_2(0) \\ C_2(t) &= \lambda(t)\sinh\phi(t)\, C_1(0) + \cosh\phi(t)\, C_2(0) \end{aligned}}\right\}$, όπου:

$$\boxed{\lambda(t)=\sqrt{\frac{B_1(t)}{B_2(t)}}=\sqrt{\frac{\dfrac{e^{i(\omega+\Omega)t}-1}{\omega+\Omega}-\dfrac{e^{-i(\omega-\Omega)t}-1}{\omega-\Omega}}{\dfrac{e^{i(\omega-\Omega)t}-1}{\omega-\Omega}-\dfrac{e^{-i(\omega+\Omega)t}-1}{\omega+\Omega}}}}\quad \text{και}$$

$$\boxed{\phi(t)=\sqrt{B_1B_2}=\frac{\Omega_R}{2}\sqrt{\left[\frac{e^{i(\omega+\Omega)t}-1}{\omega+\Omega}-\frac{e^{-i(\omega-\Omega)t}-1}{\omega-\Omega}\right]\left[\frac{e^{i(\omega-\Omega)t}-1}{\omega-\Omega}-\frac{e^{-i(\omega+\Omega)t}-1}{\omega+\Omega}\right]}}$$

<u>Έλεγχος</u>

Στο μάθημα λύσαμε το πρόβλημα για $\omega=\Omega$.

$$\lim_{\omega\to\Omega}\frac{e^{i(\omega-\Omega)t}-1}{\omega-\Omega}\ \underset{}{\overset{\theta=(\omega-\Omega)t}{=}}\ \lim_{\theta\to 0}\frac{e^{i\theta}-1}{\theta/t}=t\left(e^{i\theta}\right)'_{\theta=0}=it$$

$$\lambda(t)\underset{RWA}{\simeq}\sqrt{\frac{-\frac{1}{\omega-\Omega}\left(e^{-i(\omega-\Omega)t}-1\right)}{\frac{1}{\omega-\Omega}\left(e^{i(\omega-\Omega)t}-1\right)}}\xrightarrow[\omega\to\Omega]{}\sqrt{\frac{-(-it)}{it}}=1$$

$$\phi(t)\underset{RWA}{\simeq}\frac{\Omega_R}{2}\sqrt{-(-it)it}=\frac{\Omega_R}{2}\sqrt{-t^2}=\frac{i}{2}\Omega_R t$$

$$e^{B(t)}\simeq\begin{pmatrix}\cosh(\frac{i}{2}\Omega_R t) & \sinh(\frac{i}{2}\Omega_R t)\\ \sinh(\frac{i}{2}\Omega_R t) & \cosh(\frac{i}{2}\Omega_R t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\frac{1}{2}\Omega_R t) & i\sin(\frac{1}{2}\Omega_R t)\\ i\sin(\frac{1}{2}\Omega_R t) & \cos(\frac{1}{2}\Omega_R t)\end{pmatrix}$$

Έτσι, για $c(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ έχουμε

$$c(t)=e^{B(t)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\frac{1}{2}\Omega_R t)\\ i\sin(\frac{1}{2}\Omega_R t)\end{pmatrix},$$

που είναι ακριβώς η λύση που βρήκαμε στο μάθημα!