

Αποδείξουμε ηδη ότι  $\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$ . Γνωρίζουμε ότι  $\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$

**ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΚΠΟΜΠΩΝ**

$$\frac{dW_{εκπ}^{αυθ}}{dW_{εκπ}^{εξ}} = \frac{A_{21} dt}{B_{21} \rho(\nu, T) dt} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{c^3}{8\pi h\nu^3} (e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1) = e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 > 0$$

μη συνεκτική διεργασία  
 ↓ συνεκτική διεργασία (τα φωτόνια που παράγονται έχουν ίδια φάση)

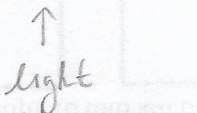
Άρα, αν θέλουμε περισσότερη συχνή, θα πρέπει  $\nu \downarrow$  ( $\lambda \uparrow$ )  
 ή  $T \uparrow$

δηλαδή όσο το δυνατόν μικρότερες συχνότητες (μεγαλύτερα μήκη κύματος)  
 & όσο το δυνατόν μεγαλύτερες θερμοκρασίες

Αυτός είναι ένας από τους λόγους που οι πρώτες προτάσεις για κατασκευή συσκευής που παράγει συνεκτική ΗΜ ακτινοβολία επικεντρώθηκαν στην περιοχή των μικροκυμάτων

$\lambda \sim 1 \text{ cm}$  **MASER** (microwave amplification by stimulated emission of radiation)

$\lambda \sim 500 \text{ nm}$  **LASER** **1ο MASER 1953**



σήμερα επικρατεί η λέξη **LASER** ακόμα & για μήδρα ΗΜ κύματα π.χ. λέμε

x-LASER αντί για xASER

UV-LASER αντί για UVASER

ακόμα και atom-LASER αντί για AASER (για άτομα που είναι μπρόνια)



Αν π.χ. θέλουμε  $\frac{dW_{εκπ}^{αυθ}}{dW_{εκπ}^{εφ}} = 1 \Rightarrow e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 = 1 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 2 \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \frac{h\nu}{k_B T} &= \ln 2 \\ c &= \lambda \nu \end{aligned} \right\} \frac{hc}{\lambda k_B T} = \ln 2 \Rightarrow T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2} \approx T = \frac{h\nu}{k_B \ln 2}$$

$$\frac{hc}{k_B} \approx 14,404 \cdot 10^{-3} \text{ K}\cdot\text{m}$$

για έρυθρο φως (π.χ.  $\lambda = 700 \text{ nm}$ )

$$T = \frac{14,404 \cdot 10^{-3} \text{ K}\cdot\text{m}}{700 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 29687 \text{ K}$$

φωτόσφαιρα Ηλίου  $\sim 6000 \text{ K}$

φωτόσφαιρα αστεριών με μοζα 20η τάση  $\sim 30000 \text{ K}$   
 από ατμή του Ηλίου

δείτε π.χ. ένα διάγραμμα Hertzprung - Russell

Αρα το  $\frac{dW_{εκπ}^{αυθ}}{dW_{εκπ}^{εφ}} = 1$  σε θερμοδυναμική ισορροπία είναι αρέφικτο

για μικροκύματα (π.χ.  $\lambda = 1 \text{ cm}$ )

$$T = \frac{14,404 \cdot 10^{-3} \text{ K}\cdot\text{m}}{10^{-2} \text{ m}} \approx 2,078 \text{ K}$$

\* Ανάγνωση λυστών εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας  
 Αποστροφή Πληθυσμού (population inversion) μέσω διέγερσης (pumping)

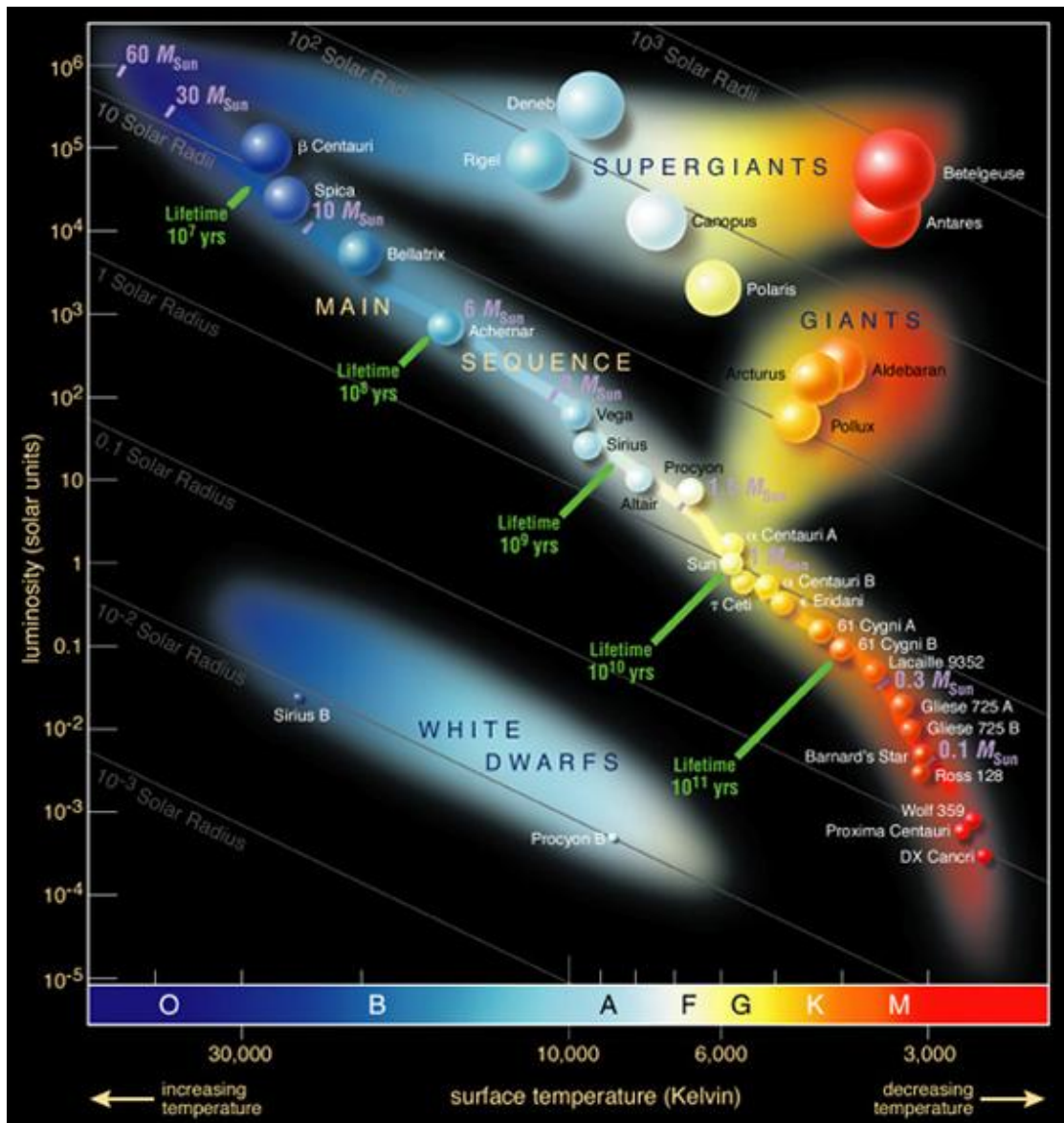
Αρα το  $\frac{dW_{εκπ}^{αυθ}}{dW_{εκπ}^{εφ}} = 1$  μπορεί να επιτευχθεί σε μια πειραματικώς έφικτη θερμοκρασία

για ραδιοκύματα FM π.χ.  $\nu = 100 \text{ MHz}$

$$T = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 100 \cdot 10^6 \text{ Hz}}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}} \approx 6,927 \cdot 10^{-3} \text{ K} \approx 7 \cdot 10^{-3} \text{ K}$$

για UV π.χ με  $\lambda = 200 \text{ nm}$

$$T = \frac{14,404 \cdot 10^{-3} \text{ K}\cdot\text{m}}{200 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 103905 \text{ K}$$



Το διάγραμμα *Hertzsprung-Russell*, η κατανομή της φωτεινότητας έναντι της επιφανειακής θερμοκρασίας των αστέρων .



• Για ποιο  $\lambda$   $\frac{dW_{εκη}^{αυθ}}{dW_{εκη}^{εξ}} = 1$  σε θερμοκρασία δωματίου  $T \approx 300K$ ;

$$T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{T k_B \ln 2}$$

$$T = 300K$$

$$\frac{hc}{k_B} = 14.4 \cdot 10^3 K \cdot m$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{14.404 \cdot 10^3 K \cdot m}{3 \cdot 10^2 K \cdot 0.693} \Rightarrow$$

$$\lambda = 6.928 \cdot 10^{-5} m$$

$\lambda \approx 70 \mu m$  FIR

ISO 20473	NIR	$0.78 \mu m < \lambda < 3 \mu m$
	MIR	$3 \mu m < \lambda < 50 \mu m$
	FIR	$50 \mu m < \lambda < 1000 \mu m = 1 mm$

**ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ**

$$\frac{dW_{αυθ}^{εξ}}{dW_{εκη}^{εξ}} = \frac{B_{12} \rho(\nu, T) dt}{B_{21} \rho(\nu, T) dt} = 1$$

$$= \frac{g_2}{g_1}$$

αν μιλάμε για σύστημα με ίδια στατιστικά βάρη  $(g_1 = g_2)$   
 αν μιλάμε για σύστημα με διαφορ. στατισ. βάρη  $(g_1 \neq g_2)$

• Αλλά σε θερμοδυναμική ισορροπία  $N_2 \ll N_1 (\dots)$

$$\left. \begin{aligned} dN_{2 \rightarrow 1}^{εξ} &= N_2 \cdot dW_{εκη}^{εξ} \\ dN_{1 \rightarrow 2}^{εξ} &= N_1 \cdot dW_{αυθ}^{εξ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dN_{2 \rightarrow 1}^{εξ} \ll dN_{1 \rightarrow 2}^{εξ}$$

• Άρα μέσω των εξαναγκασμένων διεργασιών αυξάνεται ο πληθυσμός της στάθμης 2  
 $\Rightarrow$  μειώνεται η πυκνότητα ακτινοβολίας [όφου όπερτερη ή (εξαναγκασμένη) απορρόφηση].  
 Στη συνέχεια, η αυθόρμητη έκποση, ή οποία συνοδεύεται από μετάβαση του ηλεκτρονίου από τη στάθμη 2 στη στάθμη 1, ενισχύει τη μη συνεκτική ακτινοβολία. \*

ΑΣΚΗΣΗ 5 Συλλογή ατόμων H σε θερμοδυναμική ισορροπία

(...)

$$E_n = \frac{-13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

ιδιοεnergείες

$$13.6 \text{ eV} = R_y \text{ Rydberg ενέργεια}$$

(α')  $T = 4.2 \text{ K}$  (β')  $T = 300 \text{ K}$

$$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \approx 8.617 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}}$$

$$k_B T (4.2 \text{ K}) = 0.000361914 \text{ eV} \approx 0.36 \text{ meV}$$

$$k_B T (300 \text{ K}) = 0.025851 \text{ eV} \approx 26 \text{ meV}$$

(A)  $\frac{N_2}{N_1}, \frac{N_3}{N_2}, \frac{N_4}{N_3}, \frac{N_5}{N_4}$

(B)  $\frac{dN_{2 \rightarrow 1}}{dN_{1 \rightarrow 2}}, \dots$

σύνταξη

$$\begin{aligned} E_1 &= -13.6 \text{ eV} \\ E_2 &= -3.4 \text{ eV} \\ E_3 &= -1.51 \text{ eV} \end{aligned}$$

(A)  $N_j = \frac{N_0}{Z} \cdot e^{-\beta E_j}$   
 $N_i = \frac{N_0}{Z} \cdot e^{-\beta E_i}$

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \Rightarrow \frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{e^{-\beta E_{i+1}}}{e^{-\beta E_i}} = e^{\beta(E_i - E_{i+1})}$$

$$E_i - E_{i+1} = \frac{-R_y}{i^2} + \frac{R_y}{(i+1)^2} = R_y \cdot \frac{i^2 - (i+1)^2}{(i+1)^2 i^2}$$

$$= R_y \frac{(i-i-1)(i+i+1)}{(i+1)^2 i^2} = -R_y \cdot \frac{(2i+1)}{i^2 (i+1)^2}$$

$$E_1 - E_2 = -R_y \frac{3}{4} \quad \beta(E_1 - E_2) \approx -28177 \quad \approx -394.5$$

$$E_2 - E_3 = -R_y \frac{5}{36} \quad \approx -5218 \quad \approx -73$$

$$E_3 - E_4 = -R_y \frac{7}{144} \quad \approx -1826 \quad \approx -25.57$$

$$E_4 - E_5 = -R_y \frac{9}{400} \quad \approx -845.3 \quad \approx -11.83$$



$$\frac{N_2}{N_1}$$

$$e^{\frac{4.2k}{-28177}} \text{ (υπερχείλιση)}$$

$$e^{\frac{300k}{-394.5}} \approx 4.7 \cdot 10^{-172}$$

$$\frac{N_3}{N_2}$$

$$e^{\frac{-5218}{-2267}} \approx 7.1 \cdot 10^{-2267}$$

$$e^{\frac{-73}{-32}} \approx 1.98 \cdot 10^{-32}$$

$$\frac{N_4}{N_3}$$

$$e^{\frac{-1826}{-794}} \approx 9.5 \cdot 10^{-794}$$

$$e^{\frac{-25.57}{-12}} \approx 7.85 \cdot 10^{-12}$$

$$\frac{N_5}{N_4}$$

$$e^{\frac{-845.3}{-368}} \approx 7.78 \cdot 10^{-368}$$

$$e^{\frac{-11.83}{-6}} \approx 7.28 \cdot 10^{-6}$$

δηλαδή σε κατάσταση θερμodynamic ισορροπίας  
 ο πληθυσμός της επόμενης στάθμης είναι συντηρητική μικρότερη  
 των πληθυσμών της προηγούμενης στάθμης

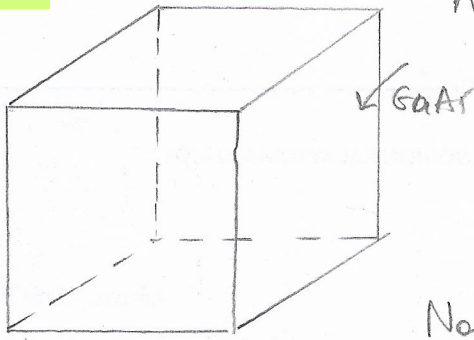
(B)

$$\frac{dN_{2 \rightarrow 1}^{εξ}}{dN_{1 \rightarrow 2}^{εξ}} = \frac{N_2 dW_{εκπ}^{εξ}}{N_1 \cdot dW_{απορ}^{εξ}} = \frac{N_2 B_{21} \rho(\nu T) dt}{N_1 B_{12} \rho(\nu T) dt} = \frac{N_2}{N_1}$$

δηλαδή

$$\frac{dN_{i+1 \rightarrow i}^{εξ}}{dN_{i \rightarrow i+1}^{εξ}} = \frac{N_{i+1}}{N_i} = \dots$$

$$e^{\frac{23000}{9988}} \approx 5.93 \cdot 10^{9988}$$


 $Al_xGa_{1-x}As$ 

Εστω κβαρτισμική σχέση:

$$E_2 = -50 \text{ meV}$$

$$E_1 = -100 \text{ meV}$$

Να προσδιορίσει το  $\frac{N_2}{N_1}$  ως  $\frac{dN_{2 \rightarrow 1}^{e\gamma}}{dN_{1 \rightarrow 2}^{e\gamma}}$  σε  $T = 4.2 \text{ K}$  &  $T = 300 \text{ K}$

ΛΥΣΗ

$$T = 4.2 \text{ K} \Rightarrow k_B T = 0.36 \text{ meV} \Rightarrow \beta(E_1 - E_2) = \frac{-50 \text{ meV}}{0.36 \text{ meV}} = 138.8 \Rightarrow$$

$$T = 300 \text{ K} \Rightarrow k_B T = 26 \text{ meV} \Rightarrow \beta(E_1 - E_2) = \frac{-50 \text{ meV}}{26 \text{ meV}} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\beta(E_1 - E_2)} = 4.8 \cdot 10^{-61}$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\beta(E_1 - E_2)} \approx 0.135 \quad \text{μν ἀμελητέο}$$

$$\frac{dN_{2 \rightarrow 1}^{e\gamma}}{dN_{1 \rightarrow 2}^{e\gamma}} = \frac{B_{21} \rho(\nu, T) dt \cdot N_2}{B_{12} \rho(\nu, T) dt \cdot N_1} = \frac{N_2}{N_1} = \dots$$



ΑΣΚΗΣΗ

$$p = p_0 \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

Εξαρτάται το:

- α)  $\lim_{\nu \rightarrow 0} p$
- β)  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} p$
- γ)  $\nu$  πολύ μικρές  $\Rightarrow p = p_{R}$
- δ)  $\nu$  πολύ μεγάλες  $\Rightarrow p = p_W$

$$\alpha) \lim_{\nu \rightarrow 0} p = \lim_{x \rightarrow 0} p_0 \frac{x^3}{e^x - 1} = p_0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{e^x} = 0$$

$$\beta) \lim_{\nu \rightarrow \infty} p = \lim_{x \rightarrow \infty} p_0 \frac{x^3}{e^x - 1} = p_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} = p_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} = p_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

γ)  $\nu$  πολύ μικρές  $\Rightarrow x$  πολύ μικρές  $e^x = 1 + 1 \cdot \frac{x}{1!} + 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots$$

όποτε  $e^x - 1 \approx x$  (πρώτης τάξης προσέγγιση)

$$\text{Άρα } p = p_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \approx p_0 \frac{x^3}{x} = p_0 x^2 = p_R$$

δ)  $\nu$  πολύ μεγάλες  $\Rightarrow x$  πολύ μεγάλες  $e^x \gg 1$

$$p = p_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \approx p_0 \frac{x^3}{e^x} = p_W$$

ΑΣΚΗΣΗ

$p_W(\nu, T) \neq p_R(\nu, T)$  για μικρές και μεγάλες συχνότητες και για μικρά και μεγάλα  $x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_W = \lim_{x \rightarrow \infty} p_0 \frac{x^3}{e^x} = p_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} p_W \neq \lim_{x \rightarrow \infty} p_R \\ \lim_{x \rightarrow 0} p_W \neq \lim_{x \rightarrow 0} p_R \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} p_R = \lim_{x \rightarrow 0} p_0 x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} p_W = p_0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} p_0 x^2 = 0$$

Άλλα σε μικρά  $x$

$$p_W = p_0 \frac{x^3}{e^x} \approx p_0 \frac{x^3}{1+x} \neq p_R = p_0 x^2$$