

# Κβαντική Οπτική και Lasers



Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

ΑΘΗΝΑ 2015



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά  
Συγγράμματα και Βοηθήματα  
[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

**HEALINK**  
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά  
Συγγράμματα και Βοηθήματα  
www.kallipos.gr

**HEALLINK**  
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
ανάπτυξη στην κοινωνία της γνώσης  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

## ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ και LASERS

Κριτικός Αναγνώστης

Νικόλαος Κονοφάος

Copyright © ΣΕΑΒ, 2015



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά δημιουργού - Μη εμπορική χρήση - Όχι παράγωγα έργα (CC BY-NC-ND) 3.0.

Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/gr/>.

Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών,

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο,

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

<http://www.kallipos.gr>.

ISBN: 978-960-603-073-4 Κβαντική Οπτική και Lasers / Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

<http://users.uoa.gr/~csimseri/>.

Εικόνα εξωφύλλου: Ιβάν Κλιούν (Ivan Kliun), 1923, Κόκκινο Φως - Σφαιρική Σύθεση (Red Light - Spherical Composition), Κρατικό Μουσείο Σύγχρονης Τέχνης, συλλογή Γεωργίου Κωστάκη. Θεσσαλονίκη.



Η θεματολογία του βιβλίου βασίζεται στο περιεχόμενο του υποχρεωτικού μαθήματος *Κβαντική Οπτική και Lasers*, της Κατεύθυνσης Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, του Τμήματος Φυσικής, της Σχολής Θετικών Επιστημών, του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών (ΕΚΠΑ). Εστιάζουμε στην κβαντική οπτική, ενώ περιγράφονται και οι αρχές λειτουργίας των lasers χωρίς όμως να επεκτεινόμαστε σε τεχνικές λεπτομέρειες για τις οποίες υπάρχει και ελληνική βιβλιογραφία.

Για τη βοήθειά τους στην επεξεργασία του κειμένου ευχαριστώ τον κύριο Γεώργιο-Ευρυσθέα Κυριακώδη, πτυχιούχο του Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ και μεταπτυχιακό φοιτητή του ΜΔΕ (Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης) *Φυσική Περιβάλλοντος* του Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ και τον κύριο Κωνσταντίνο Λαμπρόπουλο, πτυχιούχο του Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ, μεταπτυχιακό φοιτητή του ΜΔΕ *Φυσική των Υλικών* του Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κριτικό αναγνώστη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Πληροφορικής της Σχολής Θετικών Επιστημών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης Νικόλαο Κονοφάο για την εποικοδομητική κριτική.

Τέλος, είμαι ευγνώμων στους φοιτητές και στις φοιτήτριες που παρακολούθησαν το μάθημα τα τρία πρώτα χρόνια που το δίδαξα. Συνέβαλαν με το κριτικό τους πνεύμα, τη ζωντάνια και τις παρατηρήσεις τους στη διαμόρφωση του συγγράμματος αλλά και μου έδωσαν τη χαρά της αλληλεπίδρασης. Νομίζω ότι από αυτή την άποψη είμαι τυχερός.

Η βιβλιογραφία παρατίθεται συνολικά πριν από τα Παραρτήματα, αλλά οι αναφορές κάθε Κεφαλαίου παρουσιάζονται, επίσης, στο τέλος του.

# Περιεχόμενα

<b>Πρόλογος</b>	<b>viii</b>
0.1 Συντμήσεις - Λεξικό. . . . .	viii
0.2 Συμβολοθήκη. . . . .	xviii
0.3 Φυσικές σταθερές. . . . .	xix
0.4 Αναφορές Προλόγου. . . . .	xx
<b>1 Εισαγωγή στην κβαντική φύση του φωτός.</b>	<b>1</b>
1.1 Μέλαν σώμα και συναφείς έννοιες. . . . .	1
1.2 Πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία, $\rho(\nu, T)d\nu$ : Νόμος του Planck και σύγκριση με τις προσεγγίσεις των Rayleigh-Jeans και Wien. Υπεριώδης καταστροφή και πρόβλημα μακρινού υπερύθρου. . . . .	7
1.3 Δύο διατυπώσεις του νόμου Stefan-Boltzmann: (1) πυκνότητα ενέργειας $\rho(T)$ , και (2) ένταση ακτινοβολίας $I$ . . . . .	10
1.4 Εξισώσεις Maxwell. Διατύπωση με όρους ολικού φορτίου και ολικού ρεύματος. . . . .	13
1.5 Συνοριακές συνθήκες σε διεπιφάνεια. . . . .	15
1.6 Ύπαρξη ΗΜ κυμάτων όταν $\rho = 0$ , $\vec{J} = \vec{0}$ . . . . .	21
1.7 Πεδία εντός ιδανικού αγωγού. . . . .	22
1.8 Πεδία στο σύνορο ιδανικού αγωγού. . . . .	23
1.9 Πεδία σε κοιλότητες. . . . .	24
1.10 Κανονικοί τρόποι ΗΜ κύματος σε ορθογώνια κοιλότητα. . . . .	25

1.11	Στοιχειώδης αριθμός κανονικών τρόπων ΗΜ πεδίου ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας, $g(\nu) = dN/d\nu$ . . . . .	30
1.11.1	1η περίπτωση: Περιοδικές Συνοριακές Συνθήκες. . . . .	30
1.11.2	2η περίπτωση: Σε ορθογώνια κοιλότητα. . . . .	32
1.12	Απόδειξη του κλασικού νόμου Rayleigh-Jeans από το θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας και το $g(\nu) = dN/d\nu$ . “Υπεριώδης καταστροφή”. . . . .	33
1.13	Απόδειξη του νόμου Planck. . . . .	35
1.14	Απόδειξη νόμου μετατοπίσεως Wien. . . . .	38
1.15	Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. . . . .	44
1.16	Αναφορές 1ου Κεφαλαίου. . . . .	48
<b>2</b>	<b>Μηχανισμοί αλληλεπιδράσεως</b>	
	<b>ΗΜ ακτινοβολίας - ύλης (δισταθμικού συστήματος).</b>	<b>50</b>
2.1	Μηχανισμοί Einstein αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτινοβολίας με δισταθμικό σύστημα: (Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση. Αυθόρμητη Εκπομπή. Εξαναγκασμένη Εκπομπή. Συντελεστές Einstein $A$ και $B$ . . . . .	50
2.1.1	(Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση. . . . .	52
2.1.2	Αυθόρμητη Εκπομπή. . . . .	54
2.1.3	Εξαναγκασμένη Εκπομπή. . . . .	56
2.2	Εξαγωγή του νόμου Planck από τους μηχανισμούς εκπομπής και απορροφήσεως και τη στατιστική Boltzmann. Σχέση συντελεστών Einstein $A$ και $B$ . . . . .	60
2.3	Σύγκριση εκπομπών. Σύγκριση εξαναγκασμένων μηχανισμών. . . . .	63
2.4	Διακριτό φάσμα: άτομα και μόρια, κέντρα χρώματος, τεχνητά άτομα και μόρια. . . . .	66
2.4.1	Κέντρα χρώματος. . . . .	67
2.4.2	Κβαντικές τελείες. . . . .	75
2.5	Αναφορές 2ου Κεφαλαίου. . . . .	76
<b>3</b>	<b>Ημικλασική αντιμετώπιση</b>	
	<b>της αλληλεπιδράσεως</b>	
	<b>ΗΜ ακτινοβολίας - ύλης (δισταθμικού συστήματος).</b>	
	<b>ΗλεκτροΜαγνητικό πεδίο: κλασικά</b>	

<b>Δισταθμικό σύστημα π.χ. άτομο: κβαντικά.</b>	<b>78</b>
3.1 Ημικλασική αντιμετώπιση: HM πεδίο: κλασικά Δισταθμικό σύστημα: κβαντικά. . . . .	78
3.2 Αδιατάρακτο σύστημα (δηλαδή χωρίς HM πεδίο). . . . .	79
3.3 Διαταραγμένο σύστημα (δηλαδή εντός HM πεδίου). Χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών. Διπολική Ροπή. Προσέγγιση Διπόλου. . . . .	83
3.4 Εξισώσεις που περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη δισταθμικού συστήματος. Συχνότητα Rabi. Προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος (RWA, Rotating Wave Approximation). . . . .	91
3.5 Λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν μετά την RWA με την απλοϊκή επαναληπτική μέθοδο Newton. . . . .	104
3.6 Υπολογισμός των συντελεστών Einstein. . . . .	105
3.7 Υπολογισμός των συντελεστών Einstein χρησιμοποιώντας τις λύσεις που προέκυψαν στην Ενότητα 3.4. . . . .	108
3.8 Επιτρεπόμενες και Απαγορευμένες Οπτικές Μεταβάσεις εντός της Προσεγγίσεως Διπόλου. . . . .	109
3.9 “Ίδιοενέργειες” διαταραγμένου δισταθμικού συστήματος (δηλαδή με HM πεδίο). . . . .	110
3.10 Άτομο Υδρογόνου: Μορφή ατομικών τροχιακών. . . . .	111
3.11 Άτομο Υδρογόνου: Υπολογισμός των στοιχείων πίνακα της διπολικής ροπής. Επιτρεπόμενες και απαγορευμένες οπτικές μεταβάσεις. Κανόνες επι- λογής. . . . .	114
3.12 Αναφορές 3ου Κεφαλαίου. . . . .	121
<b>4 Κβαντική αντιμετώπιση της αλληλεπιδράσεως HM πεδίου - Δισταθμικού Συστήματος. Κβάντωση HM πεδίου.</b>	<b>122</b>
4.1 Πλήρης Κβαντική Προσέγγιση έναντι Ημικλασικής Προσεγγίσεως. . . . .	122
4.2 Σχέση μεταξύ κυματανυσμάτων, κυκλικών συχνοτήτων και φάσεων ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. . . . .	124
4.3 Στάσιμο HM κύμα σε κοιλότητα. . . . .	129

4.4	Χαμιλτονιανή ΗΜ πεδίου με τελεστές καταστροφής και δημιουργίας φωτονίων. . . . .	140
4.5	Χαμιλτονιανή δισταθμικού συστήματος με σπίνορες. . . . .	143
4.6	Σχέσεις μεταθέσεως μποζονίων και σχέσεις αντιμεταθέσεως φερμιονίων. . . . .	148
4.6.1	Σχέσεις μεταθέσεως μποζονίων π.χ. φωτονίων. . . . .	148
4.6.2	Σχέσεις αντιμεταθέσεως φερμιονίων π.χ. ηλεκτρονίων. . . . .	148
4.7	Τελεστές κλίμακας. . . . .	149
4.8	Χαμιλτονιανή αλληλεπιδράσεως δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου. . . . .	150
4.9	Σύνοψη Χαμιλτονιανών. . . . .	159
4.10	Μέσες (αναμενόμενες) τιμές μεγεθών για τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings. . . . .	160
4.11	Απορρόφηση φωτονίου. . . . .	164
4.12	Εκπομπή φωτονίου. . . . .	168
4.13	Αναφορές 4ου Κεφαλαίου. . . . .	172
<b>5</b>	<b>Lasers.</b>	<b>173</b>
5.1	Laser He-Ne. . . . .	174
5.2	Εξισώσεις ρυθμών για τους πληθυσμούς των σταθμών που συμμετέχουν στην εκπομπή συνεκτικής ΗΜ ακτινοβολίας και για την πυκνότητα ακτινοβολίας. . . . .	178
5.3	Διαμήκεις τρόποι εντός εύρους γραμμής. . . . .	183
5.4	Εύρεση των πληθυσμών των σταθμών και της πυκνότητας ΗΜ ακτινοβολίας στη στάσιμη κατάσταση. Κρίσιμη άντληση. Αναστροφή πληθυσμού. . . . .	186
5.5	Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων των ρυθμών στη γενική περίπτωση. . . . .	193
5.6	Εργαστήριο προσομοιώσεως: εξάσκηση στην αριθμητική επίλυση των εξισώσεων των ρυθμών στη γενική περίπτωση. . . . .	194
5.7	Στάσιμα ΗΜ κύματα σε 3Δ κοιλότητα: Διαμήκεις τρόποι και εγκάρσιοι τρόποι. . . . .	197
5.8	Μορφή του $TEM_{00}$ και των $TEM_{p,q'}$ ανώτερης τάξεως σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη και σε κυλινδρική κοιλότητα. . . . .	203
5.9	Είδη Laser - ενδεικτικές εφαρμογές. . . . .	205
5.10	Laser επαφής p-n ή αλλιώς laser διόδου. . . . .	207
5.11	Laser χβαντικών τελειών. . . . .	210
5.12	Αναφορές 5ου Κεφαλαίου. . . . .	212

<b>6 Πίνακας πυκνότητας.</b>	<b>214</b>
6.1 Καθαρή κατάσταση και μικτή κατάσταση. . . . .	214
6.2 Πίνακας πυκνότητας και τελεστής πυκνότητας. . . . .	217
6.3 Πίνακας πυκνότητας και τελεστής πυκνότητας σε καθαρή κατάσταση δισταθμικού συστήματος. . . . .	221
6.4 Η χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας: η εξίσωση von Neumann.	223
6.5 Η χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας με μηχανισμούς αποδιεγέρ- σεως. . . . .	225
6.6 Αναφορές 6ου Κεφαλαίου. . . . .	226
<b>7 Διάφορα ακόμα θέματα για τις ιδιότητες και τη λειτουργία των Lasers.</b>	<b>227</b>
7.1 Τεχνικές απομόνωσης των TEM <sub>00</sub> και TEM <sub>p'q'</sub> ανώτερης τάξεως. . .	227
7.2 Εξισώσεις Fresnel. Γωνία Brewster. . . . .	230
7.3 Ολική εσωτερική ανάκλαση. . . . .	242
7.4 Εκπομπή πολωμένης δέσμης. . . . .	244
7.5 Διάνυσμα Roynting. . . . .	245
7.6 Αναφορές 7ου Κεφαλαίου. . . . .	248
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>249</b>
<b>A' Ασκήσεις</b>	<b>α'</b>
A'.1 Ασκήσεις Κεφαλαίου 1: Εισαγωγή στην κβαντική φύση του φωτός. . . . .	α'
A'.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 2: Μηχανισμοί αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτινοβολίας - ύλης (δισταθμικό σύστημα). . . . .	ι'
A'.3 Ασκήσεις Κεφαλαίου 3: Ημικλασική αντιμετώπιση της αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτινοβολίας - ύλης (δισταθμικού συστήματος). Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο κλασικά - Δισταθμικό σύστημα κβαντικά. . . . .	ιγ'
A'.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 4: Κβαντική αντιμετώπιση της αλληλεπιδράσεως ΗΜ πεδίου - Δισταθμι- κού Συστήματος. Κβάντωση ΗΜ πεδίου. . . . .	κα'
A'.5 Ασκήσεις Κεφαλαίου 5: Lasers. . . . .	κε'



A'.6	Ασκήσεις Κεφαλαίου 6:	
	Πίνακας Πυκνότητας. . . . .	κζ'
A'.7	Αναφορές Ασκήσεων. . . . .	κζ'
<b>B'</b>	<b>Βοηθητικά Μαθηματικά και Λεπτομέρειες Πράξεων</b>	<b>κη'</b>
B'.1	Αριθμητική πρόοδος. . . . .	κη'
B'.2	Γεωμετρική πρόοδος. . . . .	κη'
B'.3	Μια αναπαράσταση της συναρτήσεως $\delta$ . . . . .	κθ'
B'.4	Από την Εξ. 3.27 στην Εξ. 3.28. . . . .	λα'
B'.5	Λύση για $\Delta = 0$ . . . . .	λγ'
B'.6	Μερικές τριγωνομετρικές σχέσεις. . . . .	λϛ'
B'.7	Περιστρεφόμενα διανύσματα. . . . .	λϛ'
B'.8	Στοιχεία πίνακα τελεστή. . . . .	λζ'
B'.9	Λύση Συστήματος Διαφορικών Εξισώσεων με τη μέθοδο των Ιδιοτιμών. . . . .	μ'
<b>Γ'</b>	<b>Προγράμματα matlab</b>	<b>μα'</b>
Γ'.1	formu0ofT.m . . . . .	μβ'
Γ'.2	forlambda0ofT.m . . . . .	μγ'
Γ'.3	WienDisplacementANDPlanckofLambda.m . . . . .	μδ'
Γ'.4	WienDisplacementANDPlanckofLambdaMultipleT.m . . . . .	με'
Γ'.5	Oscillations.m . . . . .	μϛ'
Γ'.6	N1N2DNRho.m . . . . .	μζ'

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

## 0.1 Συντμήσεις - Λεξικό.

Πριν από όλα, LASER είναι ένα ακρωνύμιο που σημαίνει Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, δηλαδή Ενίσχυση Φωτός μέσω Εξαναγκασμένης Εκπομπής Ακτινοβολίας. Συχνά το γράφουμε και με μικρά γράμματα, laser. Μερικές γνωστές κατηγορίες διατάξεων είναι: gas lasers (αερίου), chemical lasers (χημικά), dye lasers (βαφής), metal-vapor lasers (ατμών μετάλλου), solid-state lasers (στερεάς καταστάσεως), semiconductor lasers (ημιαγωγών). Ακολουθεί πίνακας με τις κυριότερες συντομογραφίες και τη σημαντικότερη ορολογία.

Πίνακας 1: Συντμήσεις - Λεξικό

σύντμηση	όνομα	abbreviation	name
1Δ	μονοδιάστατος	1D	one-dimensional
3Δ	τριδιάστατος	3D	three-dimensional
ΑΠ	ατόμου - πεδίου	AF	atom - field
ΗΜ	ηλεκτρομαγνητικός	EM	electromagnetic
	Πλήρες Εύρος στο Ήμισυ του Μεγίστου	FWHM	Full Width at Half Maximum
	υψηλότερο κατειλημμένο μοριακό τροχιακό	HOMO	highest occupied molecular orbital
	υπέρυθρο	IR	infrared

Πίνακας 1: Συντμήσεις - Λεξικό (Συνέχεια)

	δίοδος εκπέμπουσα φως	LED	light-emitting diode
	χαμηλότερο άδειο μοριακό τροχιακό	LUMO	lowest unoccupied molecular orbital
	προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος	RWA	rotating wave approximation
	εγκάρσιος ηλεκτρικός	TE	transverse electric
	εγκάρσιος μαγνητικός	TM	transverse magnetic
	εγκάρσιος ηλεκτρομαγνητικός	TEM	transverse electromagnetic
	υπεριώδης	UV	ultraviolet
	αγωγιμότητα ειδική αγωγιμότητα		conductance conductivity
	αγωγός: καλός αγωγός ιδανικός αγωγός		conductor: good conductor ideal conductor
	ακτίνα		radius
	ακτινοβολία		radiation
	ακτινοβολούσα		radiative
	μη ακτινοβολούσα		non-radiative
	αλογονούχο αλκάλιο		alkaline halide
	ανάκλαση, ανακλώμενο		reflection, reflected

Πίνακας 1: Συντμήσεις - Λεξικό (Συνέχεια)

	ανακλαστικότητα ή ανακλασιμότητα		reflectance
	ανάστροφη πόλωση		reverse bias
	αναστροφή πληθυσμού		population inversion
	ανιχνευτής ή αναγνώστης γραμμωτού κώδικα		barcode scanner or reader
	αντιμετάθεση	$AB = -BA$	anticommutation
	αντιμεταθέτης		anticommutator
	άντληση		pumping
	απορρόφηση		absorption
	αποσυντονισμός		detuning
	απώλεια συνοχής		decoherence
	αριθμοί τρόπων		mode numbers
	ασυνέχεια μεταξύ ζωνών αγωγιμότητας δύο υλικών	$\Delta E_C$	conduction band offset
	ασυνέχεια μεταξύ ζωνών σθένους δύο υλικών	$\Delta E_V$	valence band offset
	ατέλεια		defect
	άτομο		atom
	αυθόρμητη εκπομπή		spontaneous emission
	βαφή, χρωστική		dye

Πίνακας 1: Συντημήσεις - Λεξικό (Συνέχεια)

	δεξαμενή		reservoir
	δεύτερη κβάντωση		second quantization
	διάθλαση, διαθλώμενο		refraction, refracted
	διακριτός, συνεχής		discrete, continuous
	διαμήκεις τρόποι		longitudinal modes
	διάταξη		device
	διαφορική μορφή		differential form
	διέγερση		excitation
	διεγερμένη κατάσταση		excited state
	διέλευση, διερχόμενο		transmission, transmitted
	διαπερατότητα ή διελευσιμότητα		transmittance
	διεπιφάνεια		interface
	διεύρυνση ομογενής διεύρυνση ανομοιογενής διεύρυνση		broadening homogeneous broadening inhomogeneous broadening
	δυναμική ενέργεια		potential energy
	εγκάρσιοι τρόποι		transverse modes
	εκπομπή		emission
	ενεργό μέσο		active medium
	ενεργός θερμοκρασία		effective temperature

Πίνακας 1: Συντμήσεις - Λεξικό (Συνέχεια)

	εξαναγκασμένη απορρόφηση		stimulated absorption
	εξαναγκασμένη εκπομπή		stimulated emission
	ετεροδομή		heterostructure
	ζώνης αγωγιμότητας		conduction band
	ζώνη σθένους		valence band
	ηλεκτρική διπολική ροπή		electric dipole moment
	(ηλεκτρική) διπολική ροπή μεταβάσεως		transition (electric) dipole moment
	ηλεκτρική εκκένωση		electrical discharge
	θεμελιώδης κατάσταση		ground state
	θωράκιση		screening
	ιδιοάνυσμα, ιδιοτιμή, ιδιοενέργεια, ιδιοκατάσταση, ιδιοσυνάρτηση		eigenvector, eigenvalue, eigenenergy, eigenstate, eigenfunction
	ίχνος πίνακα		matrix trace
	καθαρή κβαντική κατάσταση		pure quantum state
	κανονικοί τρόποι		normal modes
	καταστατικό διάνυσμα		state vector
	κατευθυντικότητα		directionality

Πίνακας 1: Συντημήσεις - Λεξικό (Συνέχεια)

	κβαντικός περιορισμός κβαντικό φρέαρ κβαντικό σύρμα κβαντική τελεία		quantum confinement quantum well quantum wire quantum dot
	κβάντωση		quantization
	κενό		vacancy, void
	κέντρο χρώματος		color center
	κοιλότητα κυβική κυλινδρική ορθογώνια παραλληλεπίπεδη τετραγωνική		cavity cubic cylindrical orthorhombic or rectangular tetragonal
	κόμβος		node
	κυματόανυσμα		wave vector
	κυματοσυνάρτηση		wave function
	μαγνητική διπολική ροπή		magnetic dipole moment
	μέγεθος κηλίδας		spot size
	μέλαν σώμα		black body
	μετάθεση	$AB = BA$	commutation
	μεταθέτης		commutator
	μετασταθής στάθμη		meta-stable level

Πίνακας 1: Συντημήσεις - Λεξικό (Συνέχεια)

	μετατόπιση προς ερυθρό ή μπλέ		redshift or blueshift
	μετατόπιση Stokes		Stokes shift
	μήκος		length
	μικροκύματα		microwaves
	(μηχανική) ροπή		torque
	μικτή κβαντική κατάσταση		mixed quantum state
	μονοχρωματικότητα		monochromaticity
	μορφή, μοτίβο		pattern
	μποζόνιο		boson
	νανοσωματίδιο		nanoparticle
	ολική εσωτερική ανάκλαση		total internal reflection
	ολοκληρωτική μορφή		integral form
	οπή (άνοιγμα)		aperture
	οπή (έλλειψη ηλεκτρονίου)		hole
	ορθή πόλωση		forward bias
	παράγοντας αποσβέσεως		damping factor
	περίβλημα		enclosure
	περιθλασίμετρο σκόνης		powder diffractometer
	πηνίο Τέσλα		Tesla coil
	πίνακας πυκνότητας		density matrix
	πλάτος		width



Πίνακας 1: Συντμήσεις - Λεξικό (Συνέχεια)

	πλεγματική σταθερά πλεγματική παράμετρος		lattice constant lattice parameter
	πόλωση		polarization
	πρόσμιξη		impurity
	πρόσπτωση, προσπίπτον		incidence, incident
	προσέγγιση διπόλου		dipole approximation
	πυρακτωμένη πηγή φωτός		incandescent light source
	στάσιμη κατάσταση		steady state
	στάσιμα κύματα		standing waves
	συμβολή		interference
$\Gamma$	συνάρτηση Γάμμα	$\Gamma$	Gamma function
$\delta$	συνάρτηση δέλτα	$\delta$	delta function
	συνάρτηση επιμερισμού		partition function
	συνεκτικός, μη συνεκτικός		coherent, incoherent
	συνεχής		continuous
	συνοχή, μη συνοχή		coherence, incoherence
	συντελεστής ανακλάσεως		reflection coefficient
	συντελεστής απορροφήσεως		absorption coefficient
	συντελεστής διελεύσεως		transmission coefficient
	συντελεστής εκπομπής ή εκπεμπότητα		emission coefficient or emissivity

Πίνακας 1: Συντμήσεις - Λεξικό (Συνέχεια)

	συντονισμός		tuning
	γκρίζο σώμα λευκό σώμα μέλαν σώμα αδιαφανές σώμα διαφανές σώμα		gray body white body black body opaque body transparent body
	σπίνορας		spinor
	συχνότητα		frequency
	σύχνοτρο		synchrotron
	τελεστής θέσεως		position operator
	τελεστές κλίμακας:		ladder operators:
	τελεστής αναβιβάσεως τελεστής δημιουργίας		raising operator creation operator
	τελεστής καταβιβάσεως τελεστής καταστροφής		lowering operator annihilation operator
	τελεστής πυκνότητας		density operator
	τεχνητό άτομο		artificial atom
	τεχνητό μόριο		artificial molecule
	τρόπος		mode
	ύψος		height
	φάση		phase

Πίνακας 1: Συντιμήσεις - Λεξικό (Συνέχεια)

	φερμιόνιο		fermion
	φιλοξενών κρύσταλλος		host crystal
	φωτονική		photonics
	φωτόνιο		photon
	χρόνος ζωής		lifetime
	χρόνος πτήσεως		time of flight

## 0.2 Συμβολοθήκη.

σύμβολο	ονομασία στην ελληνική	ονομασία στην αγγλική
$:=$	ορίζεται ως ίσο	defined as equal
$=:$	ίσο από ορισμό	equal by definition
$\equiv$	ταυτίζεται	equivalent
$\mathcal{N}$	το σύνολο των φυσικών αριθμών	the set of natural numbers
$\mathcal{Z}$	το σύνολο των ακεραίων αριθμών	the set of integers
$\mathcal{R}$	το σύνολο των πραγματικών αριθμών	the set of real numbers
$\mathcal{C}$	το σύνολο των μιγαδικών αριθμών	the set of complex numbers
$\exists$	υπάρχει / υπάρχουν	exists, exist
$\nexists$	δεν υπάρχει / δεν υπάρχουν	does not exist, do not exist
$\nearrow$	συμβολίζει αύξηση	denotes increase
$\searrow$	συμβολίζει μείωση	denotes decrease

Πίνακας 2: Συμβολοθήκη. Περιέχονται μερικά γενικά σύμβολα.

Θα συμβολίζουμε τις μονάδες μετρήσεως ενός φυσικού μεγέθους  $M$  με  $[M]$ .

### 0.3 Φυσικές σταθερές.

Σύμβολο	όνομα	τιμή
$e$	στοιχειώδες φορτίο	$1.602176565(35) \times 10^{-19} \text{ C}$
$h$	σταθερά Planck	$6.62606957(29) \times 10^{-34} \text{ J s} =$ $4.135667516(91) \times 10^{-15} \text{ eV s}$
$\hbar$	ανηγμένη σταθερά Planck	$1.054571726(47) \times 10^{-34} \text{ J s}$
$k_B$	σταθερά Boltzmann	$1.3806488(13) \times 10^{-23} \text{ J/K}$ $=8.6173324(78) \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
$c, c_0$ <sup>a'</sup>	ταχύτητα φωτός στο κενό	$2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$
$m_p$	μάζα πρωτονίου	$1.672621777(74) \times 10^{-27} \text{ kg}$
$m_n$	μάζα νετρονίου	$1.674927351(74) \times 10^{-27} \text{ kg}$
$m_e$	μάζα ηλεκτρονίου	$9.10938291(40) \times 10^{-31} \text{ kg}$
$\epsilon_0$	διηλεκτρική σταθερά κενού	$8.854187817... \times 10^{-12} \text{ F/m}$
$\mu_0$	μαγνητική διαπερατότητα κενού	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$

Πίνακας 3: Φυσικές Σταθερές (δεδομένα από το NIST [1]).

<sup>a'</sup>Χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $c_0$  όταν το φως περνά από διαφορετικά υλικά. Τότε, το  $c$  δηλώνει την ταχύτητα του φωτός σε κάποιο υλικό, ενώ το  $c_0$  δηλώνει την ταχύτητα του φωτός στο κενό.

## 0.4 Αναφορές Προλόγου.

Η αρίθμηση αναφέρεται στη βιβλιογραφία όπως αυτή παρατίθεται συνολικά πριν από τα Παραρτήματα.

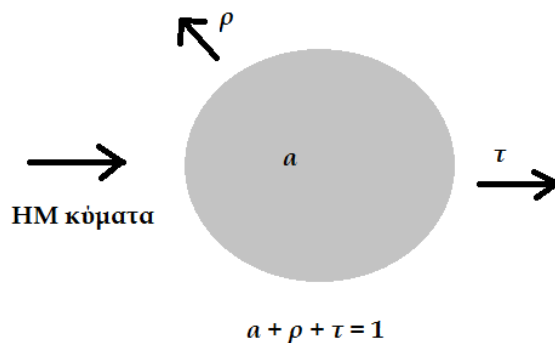
[1] National Institute of Standards and Technology (NIST), USA: CODATA Internationally recommended values of the Fundamental Physical Constants. NIST CODATA.

# Κεφάλαιο 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ.

### 1.1 Μέλαν σώμα και συναφείς έννοιες.

Ας παραθέσουμε μερικούς ορισμούς. Έστω ότι σε κάποιο σώμα προσπίπτουν ηλεκτρομαγνητικά (ΗΜ) κύματα ή όπως λέμε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.



Σχήμα 1.1: Σε κάποιο σώμα προσπίπτουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Σχηματική παρουσίαση των συντελεστών απορρόφησης  $\alpha$ , διελύσεως  $\tau$ , ανακλάσεως  $\rho$ . Ισχύει  $\alpha + \tau + \rho = 1$ .

Ορίζουμε τα ακόλουθα φυσικά μεγέθη:

**Συντελεστής απορρόφησης** (absorption coefficient),  $\alpha$ , είναι το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας που απορροφάται από το σώμα.

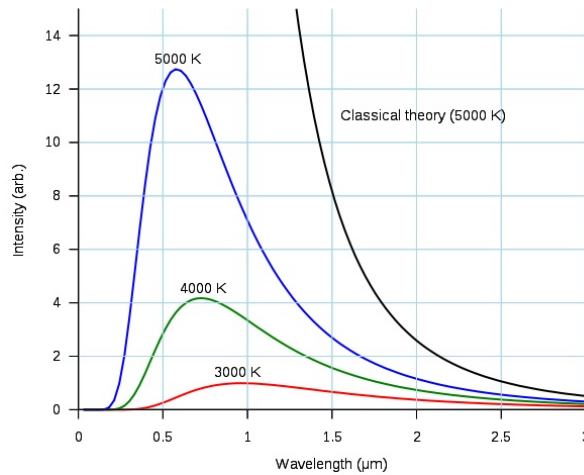
**Συντελεστής διελύσεως** (transmission coefficient),  $\tau$ , είναι το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας που διέρχεται από το σώμα.

**Συντελεστής ανακλάσεως** (reflection coefficient),  $\rho$ , είναι το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας που ανακλάται από το σώμα.

Τα τρία παραπάνω μεγέθη συνδέονται με τη σχέση

$$\alpha + \tau + \rho = 1. \quad (1.1)$$

*Ερώτηση:* Τι θα πει στα απλά ελληνικά “μέλαν”. *Απάντηση:* “μαύρο”. Ο επιστημονικός ορισμός, όμως, είναι αυστηρότερος... **Μέλαν σώμα** (black body) είναι ένα εξιδανικευμένο φυσικό σώμα το οποίο **απορροφά όλη** την προσπίπτουσα σε αυτό ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία **ανεξαρτήτως συχνότητας** και **ανεξαρτήτως γωνίας προσπτώσεως**. Το μέλαν σώμα αφήνει όλη την προσπίπτουσα ακτινοβολία να μπει μέσα του, δηλαδή ανακλά μηδενικό ποσοστό της προσπίπτουσας ακτινοβολίας ( $\rho = 0$ ), εσωτερικά απορροφά όλη αυτή την προσπίπτουσα ακτινοβολία ( $\alpha = 1$ ), χωρίς να αφήνει ακτινοβολία να το διαπεράσει ( $\tau = 0$ ) και αυτό ισχύει **για όλες τις συχνότητες** και **για όλες τις γωνίες προσπτώσεως**. Άρα ένα μέλαν σώμα είναι τέλειος απορροφητής της προσπίπτουσας ΗΜ ακτινοβολίας.



Σχήμα 1.2: Ακτινοβολία μέλανος σώματος σύμφωνα με το νόμο του *Planck* (δείτε §1.2 και §1.13). Εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία και όχι από το σχήμα, τη σύσταση του σώματος, τη γωνία εκπομπής κ.ο.κ..

Βεβαίως, αν συνέβαιναν μόνο τα παραπάνω ( $\alpha = 1$ ,  $\rho = \tau = 0$ ), τότε λόγω της συνεχούς απορρόφησης ενέργειας, η θερμοκρασία του σώματος θα αυξανόταν συνεχώς. Έτσι, **ένα μέλαν σώμα που βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία άρα και σε σταθερή θερμοκρασία** θα πρέπει να **επαν-εκπέμπει** ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία η οποία καλείται **ακτινοβολία μέλανος σώματος** (black-body radiation), έτσι ώστε να διατηρείται το ενεργειακό ισοζύγιο. Η



ακτινοβολία μέλανος σώματος γίνεται σύμφωνα με το νόμο του **Planck** (§1.2, §1.13, Σχήμα 1.2) με τέτοιο τρόπο **ώστε το φάσμα της εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία** ανεξαρτήτως σχήματος, ανεξαρτήτως συστάσεως του μέλανος σώματος, ανεξαρτήτως γωνίας εκπομπής κ.ο.κ. Ένα μέλαν σώμα σε θερμοδυναμική ισορροπία έχει τις αξιοσημείωτες ιδιότητες [2]:

(I1). Είναι ένας **ιδανικός εκπομπός**, δηλαδή εκπέμπει σε κάθε συχνότητα τουλάχιστον όση ενέργεια εκπέμπει οιοδήποτε άλλο σώμα ταυτόσημης θερμοκρασίας.

(I2). Είναι ένας **ισότροπος εκπομπός**, δηλαδή η ακτινοβολία διασπείρεται ισότροπως, ανεξαρτήτως κατευθύνσεως.

Τα πραγματικά σώματα εκπέμπουν κλάσμα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος. **Συντελεστής εκπομπής ή εκπεμπότητα** (emission coefficient or emissivity),  $\epsilon$ , ορίζεται το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας που επαν-εκπέμπεται από το σώμα. Εξ ορισμού, ένα μέλαν σώμα σε θερμοδυναμική ισορροπία έχει  $\epsilon$  ίσο με τη μονάδα

$$\epsilon_{\text{μέλανος σώματος}}^{\text{σε θερμοδυναμική ισορροπία}} := 1 \quad (1.2)$$

Δηλαδή συνοψίζοντας για το μέλαν σώμα

$$\alpha = 1, \rho = \tau = 0, \epsilon = 1 \quad (1.3)$$

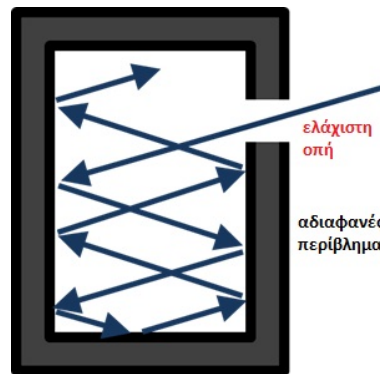
Καλούμε **γκρίζο σώμα** (gray body) ένα σώμα με  $\epsilon < 1$ . Καλούμε **λευκό σώμα** (white body) ένα σώμα που ανακλά όλη την προσπίπτουσα ακτινοβολία ( $\rho = 1$ ) οπότε  $\alpha = \tau = 0$ . Όλα αυτά υποτίθεται ότι ισχύουν ανεξαρτήτως συχνότητας, κατεύθυνσης και θερμοκρασίας. Καλούμε **αδιαφανές σώμα** (opaque body) ένα σώμα που δεν διαπερνάται από την ΗΜ ακτινοβολία ( $\tau = 0$ ) οπότε  $\alpha + \rho = 1$ . Ονομάζουμε **διαφανές σώμα** (transparent body) ένα σώμα που διαπερνάται εντελώς από την ΗΜ ακτινοβολία ( $\tau = 1$ ) οπότε  $\alpha = \rho = 0$ . Οι ορισμοί συνοψίζονται στον Πίνακα 1.1.

Η ακτινοβολία από τους αστέρες, τους πλανήτες και άλλα σώματα χαρακτηρίζεται πολλές φορές από μια **ενεργό θερμοκρασία** (effective temperature), δηλαδή τη θερμοκρασία ενός μέλανος σώματος που θα εξέπεμπε την ίδια συνολική (δηλαδή ολοκληρωμένη σε όλες τις συχνότητες) ένταση ακτινοβολίας  $I$  (μονάδες  $[I] = \text{W}/\text{m}^2$ , §1.3).

**Μία προσεγγιστική πραγμάτωση μέλανος σώματος** φαίνεται στο Σχήμα 1.3. Μπορεί να γίνει ανοίγοντας μια **ελάχιστη οπή** στο τοίχωμα ενός **αδιαφανούς περιβλήματος** (opaque enclosure) π.χ. στο τοίχωμα ενός κοινού κουτιού, δημιουργώντας έτσι μια **κοιλότητα με οπή** (cavity with a hole) [3]. Στη

μέλαν σώμα (black body)	$\alpha = 1, \rho = \tau = 0, \epsilon = 1$
γκρίζο σώμα (gray body)	$\alpha, \rho, \tau, \epsilon < 1$
λευκό σώμα (white body)	$\rho = 1, \alpha = \tau = 0$
αδιαφανές σώμα (opaque body)	$\tau = 0, \alpha + \rho = 1$
διαφανές σώμα (transparent body)	$\tau = 1, \alpha = \rho = 0$

Πίνακας 1.1: Ορισμοί σωμάτων.



Σχήμα 1.3: Κοιλότητα με οπή: προσεγγιστική πραγμάτωση μέλανος σώματος, ανοίγοντας μια ελάχιστη οπή στο τοίχωμα ενός αδιαφανούς περιβλήματος.

φωτονική (photonics), μερικές φορές αναφέρουμε τον όρο κοιλότητα (cavity) εννοώντας ότι υπάρχει και η ελάχιστη οπή. Λόγω της ελαχιστότητας της οπής σε σχέση με την κοιλότητα, το φως που μπαίνει στην κοιλότητα **(σχεδόν) ανακλάται επί άοριστον ή απορροφάται** και δεν είναι πιθανόν να εξέλθει από την κοιλότητα, πράγμα που καθιστά το σύστημά μας **σχεδόν τέλειο απορροφητή**. Το αν το σύστημα αυτό είναι **σε θερμοδυναμική ισορροπία** και επομένως **η ακτινοβολία που εκπέμπει είναι ακτινοβολία μέλανος σώματος που ακολουθεί το νόμο Planck** εξαρτάται από τη φύση των τοιχωμάτων και τα άλλα περιεχόμενα του περιβλήματος. **Η κοιλότητα με οπή δεν είναι βεβαίως τέλειο μέλαν σώμα**. Αν το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερο από τη διάμετρο της οπής, μέρος της θα ανακλαστεί. Ομοίως, ακόμα και σε θερμοδυναμική ισορροπία, το φάσμα της ακτινοβολίας εντός πεπερασμένης κοιλότητας δεν θα υπακούει εντελώς στο νόμο Planck για μήκη κύματος συγκρίσιμα ή μεγαλύτερα

από το μέγεθος της κοιλότητας [4]. **Ας υποθέσουμε τώρα ότι η κοιλότητα διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία  $T$  και η παγιδευμένη ακτινοβολία βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία με το περίβλημα.** Η οπή, θα αφήσει εν γένει, ένα τμήμα της ακτινοβολίας να δραπετεύσει. Εάν η οπή είναι μικρή, η ακτινοβολία που εισέρχεται και εξέρχεται θα έχει αμελητέα επίδραση στην ισορροπία της ακτινοβολίας εντός της κοιλότητας. **Η ακτινοβολία που δραπετεύει θα είναι προσεγγιστικά ακτινοβολία μέλανος σώματος με την κατανομή του νόμου Planck χαρακτηριστική της θερμοκρασίας  $T$  και δεν θα εξαρτάται από τις ιδιότητες της κοιλότητας με την οπή, τουλάχιστον για μήκη κύματος αρκετά μικρότερα από το μέγεθος της οπής.** Η κοιλότητα με οπή χρησιμοποιείται ήδη τουλάχιστον από το 1898 που την περιέγραψαν οι Otto Lummer και Ferdinand Kurlbaum. Το σχέδιό τους ήταν μια οπή σε ένα λευκόχρυσο κουτί, με το εσωτερικό του μαυρισμένο με οξειδίο του σιδήρου [5] ή αργότερα το 1901 μαυρισμένο με μίγμα οξειδίων χρωμίου, νικελίου και κοβαλτίου [6]. Παρακάτω αναφέρουμε μερικές ακόμη προσεγγιστικές πραγματώσεις μέλανος σώματος.

Υπάρχει ενδιαφέρον για **σχεδόν μέλανα** (near-black) σώματα ή υλικά για εφαρμογές όπως η απόκρυψη (ιδίως από ραντάρ), οι συλλέκτες ηλιακής ενέργειας και οι ανιχνευτές υπέρυθρης ακτινοβολίας. Ως τέλειος εκπομπός ακτινοβολίας, ένα θερμό υλικό με συμπεριφορά σχεδόν μέλανος σώματος θα έφτιαχνε μία αποτελεσματική υπέρυθρη θερμάστρα ειδικά στο διάστημα ή στο κενό όπου η θέρμανση με μεταφορά δεν είναι δυνατή. Τα σχεδόν μέλανα σώματα είναι ακόμα χρήσιμα στα τηλεσκόπια και στις κάμερες ως αντι-ανακλαστικές επιφάνειες για τη μείωση του διάχυτου ή αδέσποτου φωτός και για τη συλλογή πληροφοριών περί αντικειμένων σε περιοχές ψηλής οπτικής αντιθέσεως π.χ. για την παρατήρηση πλανητών σε τροχιά γύρω από τους αστέρες τους όπου και τα σχεδόν μέλανα σώματα απορροφούν φως που έρχεται από άσχετες πηγές. Μια πρώτη προσέγγιση μέλανος σώματος είναι η αιθάλη. Τα τελευταία χρόνια έχει δειχθεί ότι σχεδόν τέλεια μέλανα σώματα ( $\alpha \approx 0.99$ ) μπορούν να κατασκευαστούν με νανοσωλήνες άνθρακα [7, 8], ενώ ένα απλό μαύρο χρώμα έχει  $\alpha < 0.975$ . Το υλικό “super black” έχει  $\alpha \approx 0.996$  και  $\rho \approx 0.004$ . Πρόσφατα ανακοινώθηκε από την Surrey NanoSystems η κατασκευή από νανοσωλήνες άνθρακα του υλικού Vantablack το οποίο κατά τους κατασκευαστές απορροφά 99.96% του προσπίπτοντος σε αυτό φωτός. Μια εικόνα του Vantablack πάνω σε φύλλο αργιλίου φαίνεται στο Σχήμα 1.4. Ο νόμος του Planck που διατυπώθηκε το 1900 περιγράφει την πυκνότητα ενέργειας  $HM$  ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας,



Σχήμα 1.4: Το υλικό *Vantablack* κατασκευασμένο από νανοσωλήνες άνθρακα (*Surrey NanoSystems*) το οποίο κατά τους κατασκευαστές απορροφά 99.96% του προσπίπτοντος σε αυτό φωτός. Εδώ επάνω σε φύλλο αργιλίου.

μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία,  $\rho(\nu, T)d\nu$ . Συγκεκριμένα:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu \quad (1.4)$$

Οι μονάδες του  $\rho(\nu, T)$  είναι  $\frac{\text{J}}{\text{m}^3\text{Hz}}$ . Αυτή είναι μια διατύπωση του νόμου του Planck συναρτήσει της συχνότητας,  $\nu$ . Υπάρχουν κι άλλες διατυπώσεις που θα δούμε αργότερα, π.χ. συναρτήσει του μήκους κύματος,  $\lambda$ , της κυκλικής συχνότητας,  $\omega$ , του κυματιδίου  $k$ .

## 1.2 Πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία, $\rho(\nu, T)d\nu$ : **Νόμος του Planck** και σύγκριση με τις προσεγγίσεις των **Rayleigh-Jeans** και **Wien**. Υπεριώδης καταστροφή και πρόβλημα μακρινού υπερύθρου.

Η πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία,  $\rho(\nu, T)d\nu$ , έμελε να γίνει **ένα από τα ζητήματα που αποκάλυψε τη κβάντωση της ΗΜ ακτινοβολίας**. Παραθέτουμε παρακάτω τρεις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στην προσπάθεια να εξηγηθεί η πειραματική συμπεριφορά, συγκεκριμένα: την έκφραση Rayleigh-Jeans (κλασική φυσική, 1900), την έκφραση Wien (πειραματικό ταίριασμα στις υψηλές συχνότητες, 1896) και εν τέλει την έκφραση Planck (παλαιά κβαντική μηχανική, 1900) η οποία ταυτίζεται με την πειραματική συμπεριφορά σε όλη την περιοχή συχνοτήτων. Έχουμε λοιπόν το νόμο Rayleigh-Jeans (κλασική φυσική, 1900)

$$\rho_{RJ}(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3} = \rho_{RJ}, \quad (1.5)$$

το νόμο Wien (πειραματικό ταίριασμα στις υψηλές συχνότητες, 1896)

$$\rho_W(\nu, T) = \frac{\alpha\nu^3}{e^{b\nu/T}} \underset{\text{σταθερές από Planck}}{\overset{\text{σταθερές}}{}} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T}} = \rho_W, \quad (1.6)$$

όπου οι σημειώσεις επάνω και κάτω από το “=” σημαίνουν ότι πριν το “=” είναι η μορφή που πρότεινε ο Wien ενώ μετά το “=” χρησιμοποιούνται οι σταθερές που προβλέπονται από το νόμο Planck στο ασυμπτωτικό όριο υψηλών συχνοτήτων όπου ο νόμος Wien προσεγγίζει το νόμο Planck. Τέλος, παραθέτουμε το νόμο Planck (παλαιά κβαντική μηχανική, 1900) που ταυτίζεται με τα πειραματικά δεδομένα για οποιαδήποτε συχνότητα.

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} = \rho \quad (1.7)$$

Ας κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$x := \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{k_B T}{h} x \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dx \quad (1.8)$$

Τότε εμφανίζεται η ουσιαστική διαφοροποίηση των παραπάνω νόμων

$$\boxed{\rho_{RJ} = \rho_0 x^2} \quad (1.9)$$

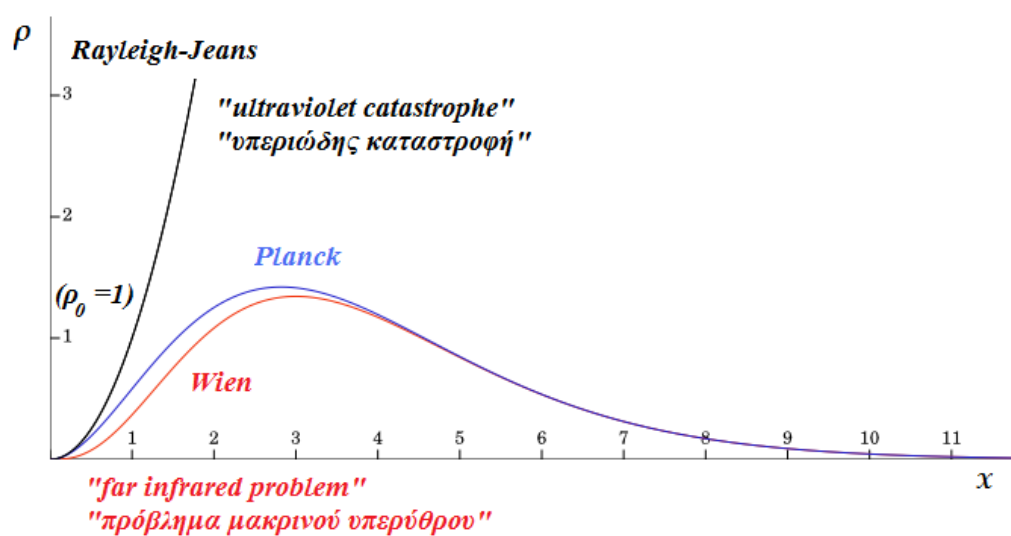
$$\boxed{\rho_W = \rho_0 \frac{x^3}{e^x}} \quad (1.10)$$

$$\boxed{\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1}} \quad (1.11)$$

$$\rho_0 := \frac{8\pi}{h^2} \left( \frac{k_B T}{c} \right)^3 \quad (1.12)$$

με μονάδες  $[\rho_0] = \frac{\text{Js}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}}$ . Εννοείται ότι στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως της Εξ. 1.11 δεν ανήκει το 0, δηλαδή δεν μιλάμε για μηδενική συχνότητα ή άπειρη θερμοκρασία. Ένας εναλλακτικός συμβολισμός που απαντάται στη βιβλιογραφία για το  $\rho(\nu, T)$  είναι το  $u(\nu, T)$ .

Οι τρεις παραπάνω προσεγγίσεις συγκρίνονται στο Σχήμα 1.5. Διακρίνεται εκεί η λεγόμενη **υπεριώδης καταστροφή** (ultraviolet catastrophe), δηλαδή ο απειρισμός της κλασικής προσεγγίσεως Rayleigh-Jeans σε μεγάλες συχνότητες. Δηλαδή η κλασική προσέγγιση είναι ικανοποιητική μόνο σε πολύ χαμηλές συχνότητες, αλλά μετά, καθώς αυξάνεται η συχνότητα, προβλέπει απειρισμό της  $\rho$  σε καταστροφική αντίθεση με τα πειραματικά δεδομένα. Η προσέγγιση Wien παρουσιάζει πρόβλημα στο αντίθετο όριο, δηλαδή σε χαμηλές συχνότητες όπου απομακρύνεται από την πειραματική συμπεριφορά, πράγμα που συχνά καλείται **πρόβλημα μακρινού υπε-ρύθρου** (far-infrared problem). Οι ονομασίες αυτές έχουν σχέση με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα γύρω στο 1900. Όμως, η περιοχή όπου αρχίζουν οι αποκλίσεις, εξαρτάται (προφανώς) από τη θερμοκρασία του μέλανος σώματος: Οι εκφράσεις 1.9, 1.10, 1.11 διαφέρουν μόνο στη συνάρτηση του  $x$  το οποίο εξαρτάται κατά την Εξ. 1.8 από τη θερμοκρασία  $T$ .



Σχήμα 1.5: Σύγκριση των νόμων Rayleigh-Jeans (Εξ. 1.9), Wien (Εξ. 1.10), Planck (Εξ.1.11). Έχουμε θέσει  $\rho_0 = 1$  (Εξ. 1.12). Διακρίνεται η “υπεριώδης καταστροφή”, δηλαδή η απόκλιση της μαύρης (Rayleigh-Jeans) από τη γαλάζια (Planck) γραμμή και το “πρόβλημα μακρινού υπερώθρου”, δηλαδή η απόκλιση της ερυθρής (Wien) από τη γαλάζια (Planck) γραμμή.

### 1.3 Δύο διατυπώσεις του νόμου Stefan-Boltzmann:

- (1) πυκνότητα ενέργειας  $\rho(T)$ , και
- (2) ένταση ακτινοβολίας  $I$ .

Παραθέτουμε δύο συνήθεις διατυπώσεις του νόμου των Stefan-Boltzmann ο οποίος αναφέρεται σε μέλαν σώμα με θερμοκρασία  $T$ .

Ο νόμος Stefan-Boltzmann στην 1η μορφή αφορά **την πυκνότητα ενέργειας** (μονάδες  $\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$ ) **εντός μέλανος σώματος** θερμοκρασίας  $T$ . Για να την υπολογίσουμε, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την Εξ. 1.7, δηλαδή το  $\rho(\nu, T)$  σε όλες τις συχνότητες. Ας χρησιμοποιήσουμε και την Εξ. 1.8. Συνοπτικά

$$\rho(T) := \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu \stackrel{\text{Eq. 1.8}}{=} \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \frac{k_B T}{h} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{\pi^4/15} \Rightarrow$$

$$\rho(T) = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3} T^4 \quad (1.13)$$

δηλαδή

$$\boxed{\rho(T) = aT^4} \quad (1.14)$$

πράγμα που αποτελεί το νόμο των Stefan-Boltzmann στην 1η μορφή. Εδώ

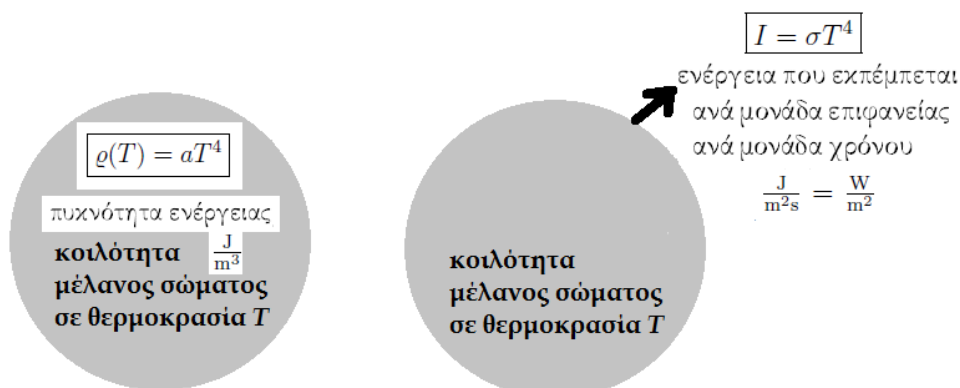
$$a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3} \approx 7.5657 \times 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{K}^4}. \quad (1.15)$$

Βεβαίως οι μονάδες του  $\rho(T)$  είναι  $[\rho(T)] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$  (πυκνότητα ενέργειας). Ο νόμος των Stefan-Boltzmann στην 1η μορφή αποδίδεται στο Σχήμα 1.6 αριστερά. Άλλο εναλλακτικό σύμβολο για το  $\rho(T)$  είναι  $\check{u}(T)$ .

Ο νόμος Stefan-Boltzmann στην 2η μορφή αφορά την **ενέργεια που εκπέμπεται από το μέλαν σώμα ανά μονάδα επιφανείας ανά μονάδα χρόνου**, δηλαδή την εκπεμπόμενη ισχύ ανά μονάδα επιφανείας ή αλλιώς την ένταση της ακτινοβολίας  $I$  (μονάδες  $\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ). Ας θεωρήσουμε δεδομένο [9] από την κινητική θεωρία των αερίων ότι ο αριθμός κρούσεων των σωματιδίων (εδώ φωτονίων) στα τοιχώματα ανά μονάδα επιφανείας και ανά μονάδα χρόνου (μονάδες  $\frac{1}{\text{m}^2 \text{s}}$ ) ή αλλιώς η ροή σωματιδίων (εδώ φωτονίων) είναι

$$\Phi_\sigma = \frac{n}{4} \langle v \rangle, \quad (1.16)$$





Ο νόμος των Stefan-Boltzmann στην 1η μορφή    Ο νόμος των Stefan-Boltzmann στην 2η μορφή

Σχήμα 1.6: [Αριστερά] Ο νόμος των Stefan-Boltzmann στην 1η μορφή αφορά την πυκνότητα ενέργειας  $\rho$  (μονάδες  $\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$ ) εντός μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία θερμοκρασίας  $T$  και διατυπώνεται ως  $\rho(T) = aT^4$ .  $a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3} \approx 7.5657 \times 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{K}^4}$ . [Δεξιά] Ο νόμος των Stefan-Boltzmann στην 2η μορφή αφορά την ενέργεια που εκπέμπεται ανά μονάδα επιφανείας ή αλλιώς την ένταση της ακτινοβολίας  $I$  (μονάδες  $\frac{\text{J}}{\text{m}^2\text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ) και διατυπώνεται ως  $I = \sigma T^4$ .  $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \approx 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$ .

όπου  $n$  είναι η πυκνότητα σωματιδίων (μονάδες  $1/\text{m}^3$ ) και  $\langle v \rangle$  η μέση ταχύτητα των σωματιδίων (εδώ φωτονίων). Άρα για τα φωτόνια

$$\Phi_\gamma = \frac{n}{4}c, \quad (1.17)$$

Αλλά

$$I = \langle h\nu \rangle \Phi_\gamma \quad (1.18)$$

όπου

$$\langle h\nu \rangle = \frac{\rho}{n} \quad (1.19)$$

είναι η μέση τιμή της ενέργειας που μεταφέρει κάθε φωτόνιο. Από τις εξισώσεις 1.17, 1.18, 1.19 έπεται ότι

$$I = \frac{c}{4}\rho. \quad (1.20)$$

Οπότε λόγω της Εξ. 1.14

$$I = \left( \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \right) T^4 \quad (1.21)$$

ή

$$\boxed{I = \sigma T^4} \quad (1.22)$$

πράγμα που αποτελεί το νόμο Stefan-Boltzmann στη 2η και συνηθέστερη μορφή. Εδώ

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \approx 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}. \quad (1.23)$$

Ο νόμος των Stefan-Boltzmann στην 2η μορφή αποδίδεται στο Σχήμα 1.6 δεξιά. Δηλαδή, στη 2η μορφή, ο νόμος Stefan-Boltzmann λέει ότι η ολική εκπεμπόμενη ένταση ακτινοβολίας από ένα μέλαν σώμα σε θερμοκρασία  $T$  είναι ανάλογη προς την 4η δύναμη της θερμοκρασίας.

## Ηλεκτρομαγνητικά ζητήματα ...

Για να αποδείξουμε το νόμο του Planck, αλλά και για να αποδείξουμε τον κλασικό νόμο των Rayleigh-Jeans, χρειάζεται να γνωρίζουμε, μεταξύ άλλων, τους κανονικούς τρόπους ΗΜ πεδίου σε μια κοιλότητα και ειδικότερα τον στοιχειώδη αριθμό κανονικών τρόπων ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας,  $g(\nu) = dN/d\nu$ . Οπότε, θα χρειαστεί να εξετάσουμε μερικά ηλεκτρομαγνητικά ζητήματα ...

## 1.4 Εξισώσεις Maxwell. Διατύπωση με όρους ολικού φορτίου και ολικού ρεύματος.

Γνωρίζουμε το θεώρημα Gauss

$$\oint_{S=\partial V} \vec{\Delta} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\Delta} dV, \quad (1.24)$$

και το θεώρημα Stokes

$$\oint_{L=\partial S} \vec{\Delta} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{\Delta} \cdot d\vec{a}. \quad (1.25)$$

Το  $\vec{\Delta}$  δηλώνει κάποιο διανυσματικό πεδίο όπως π.χ. το ηλεκτρικό πεδίο ή τη μαγνητική επαγωγή κ.ο.κ.,  $S = \partial V$  δηλώνει μια επιφάνεια  $S$  που αποτελεί το σύνορο ενός όγκου  $V$ ,  $L = \partial S$  δηλώνει μια καμπύλη  $L$  που αποτελεί το σύνορο μιας επιφάνειας  $S$ .  $d\vec{l}$ ,  $d\vec{a}$ ,  $dV$  δηλώνουν το στοιχειώδες μήκος, τη στοιχειώδη επιφάνεια, το στοιχειώδη όγκο. Αυτά μας επιτρέπουν να μεταβούμε από τη διαφορική μορφή (differential form) των εξισώσεων Maxwell

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{νόμος Gauss ηλεκτρισμού '1η'} \quad (1.26\alpha')$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad \text{νόμος Gauss μαγνητισμού '2η'} \quad (1.26\beta')$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{νόμος Faraday επαγωγής '3η'} \quad (1.26\gamma')$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \text{νόμος Ampère και διόρθωση Maxwell '4η'} \quad (1.26\delta')$$

μετά από πράξεις

$$\oint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{q_{\text{εντός}V}}{\epsilon_0} \Rightarrow \quad (1.27\alpha')$$

$$\oint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \Rightarrow \quad (1.27\beta')$$

$$\oint_{L=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{a} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \Rightarrow \quad (1.27\gamma')$$

$$\oint_{L=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S \left( \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \Rightarrow \quad (1.27\delta')$$

στην ολοκληρωτική τους μορφή (integral form)

$$\boxed{\Phi_{E,S=\partial V} := \oint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{εντός}V}}{\epsilon_0}} \quad \text{νόμος Gauss ηλεκτρισμού '1η'} \quad (1.28\alpha')$$

$$\boxed{\Phi_{B,S=\partial V} := \oint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0} \quad \text{νόμος Gauss μαγνητισμού '2η'} \quad (1.28\beta')$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{HE}\Delta} := \oint_{L=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t}} \quad \text{νόμος Faraday επαγωγής '3η'} \quad (1.28\gamma')$$

$$\boxed{\oint_{L=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{του διαπερνά την } S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t}} \quad \text{νόμος Ampère και διόρθωση Maxwell '4η'} \quad (1.28\delta')$$

Στο κενό όπου  $\rho = 0$  και  $\vec{J} = \vec{0}$  οι Εξ. 1.26α'-1.26δ' γίνονται

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.29\alpha')$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.29\beta')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.29\gamma')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.29\delta')$$

## 1.5 Συνοριακές συνθήκες σε διεπιφάνεια.

Θα περιγράψουμε τις συνοριακές συνθήκες σε διεπιφάνεια που μπορούν να βρεθούν και σε ένα εγχειρίδιο ηλεκτρομαγνητισμού [10, 11].

♣ Ας εφαρμόσουμε στο Σχήμα 1.7 (όπου η κατεύθυνση των διανυσμάτων  $\vec{E}_1$  και  $\vec{E}_2$  έχει σχεδιαστεί επίτηδες τυχαία) την <sup>1η</sup> Εξίσωση Maxwell 1.28α'

$$\Phi_{E,S=\partial V} := \oint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{εντός}V}}{\epsilon_0}, \Rightarrow$$

$$\Phi_{E,\text{άνω κύκλου}} + \Phi_{E,\text{κάτω κύκλου}} + \Phi_{E,\text{παράπλευρη}} = \frac{q_{\text{εντός}V}}{\epsilon_0}$$

$\Phi_{E,\text{άνω κύκλου}} = \vec{E}_1 \cdot \vec{A}_1 = E_{1\perp} A_1$  και  $\Phi_{E,\text{κάτω κύκλου}} = \vec{E}_2 \cdot \vec{A}_2 = E_{2\perp} A_2$  όπου τα  $E_{1\perp}, E_{2\perp}, A_1, A_2$  είναι αλγεβρικές τιμές. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} AE_{1\perp} - AE_{2\perp} + \int_{A_{\text{παράπλευρη}}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\sigma \cdot A}{\epsilon_0} \\ \text{Αλλά όταν } h \rightarrow 0 \Rightarrow A_{\text{παράπλευρη}} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \int_{A_{\text{παράπλευρη}}} \vec{E} \cdot d\vec{a} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \text{και} \\ \text{αν } \sigma = 0 \Rightarrow E_{1\perp} = E_{2\perp} \end{array}$$

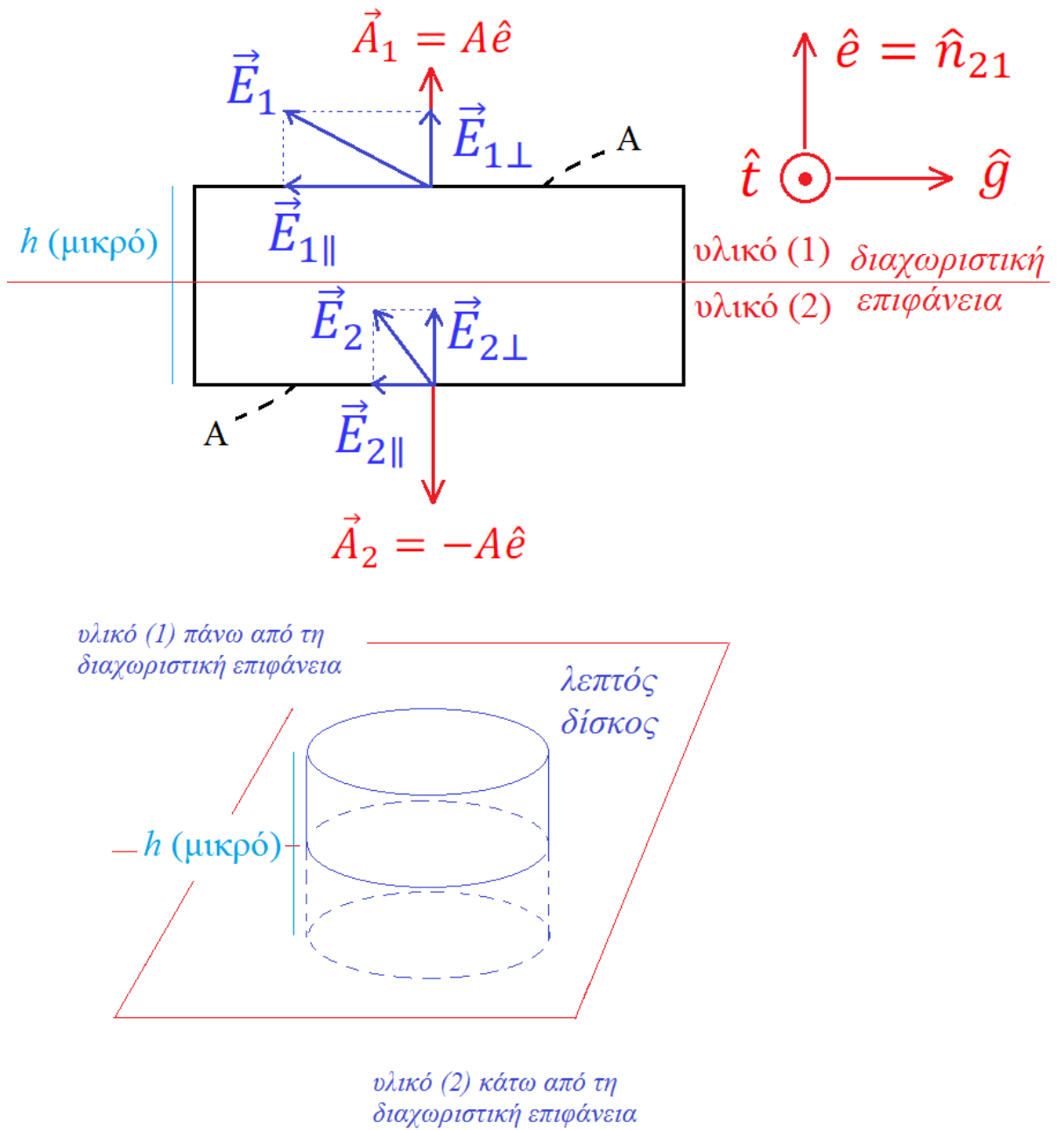
Παραπάνω ονομάσαμε  $|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2| = |\vec{A}| = A$ . Οπότε, π.χ. αν έχουμε απλωμένη θετική  $\sigma$  στη διεπιφάνεια, τότε τα  $\vec{E}_{1\perp}$  και  $\vec{E}_{2\perp}$  δείχνουν από τη διεπιφάνεια προς τα έξω. Συνοπτικά, εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad (1.30\alpha')$$

$$\text{ή } \boxed{(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{e} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad \hat{e} = \hat{n}_{21} \text{ (από 2 προς το 1)} \quad (1.30\beta')$$

$$\text{ή } \boxed{(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{n}_{21} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad (1.30\gamma')$$

$$\text{ή } \boxed{(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad \hat{n}_{12} \text{ (από 1 προς το 2)} \quad (1.30\delta')$$



Σχήμα 1.7: Συνοριακές συνθήκες για την 1η Εξίσωση Maxwell. Η κατεύθυνση των διανυσμάτων  $\vec{E}_1$  και  $\vec{E}_2$  έχει σχεδιαστεί επίπεδες τυχαία. Ομοίως και για τη 2η Εξίσωση Maxwell όπου το  $\vec{E}$  πρέπει να αντικατασταθεί με  $\vec{B}$ .

◇ Ας εφαρμόσουμε, ομοίως (αλλάζοντας τα  $\vec{E}$  σε  $\vec{B}$ ), στο Σχήμα 1.7 τη '2η' Εξίσωση Maxwell 1.28β'

$$\Phi_{B,S=\partial V} := \oint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0.$$

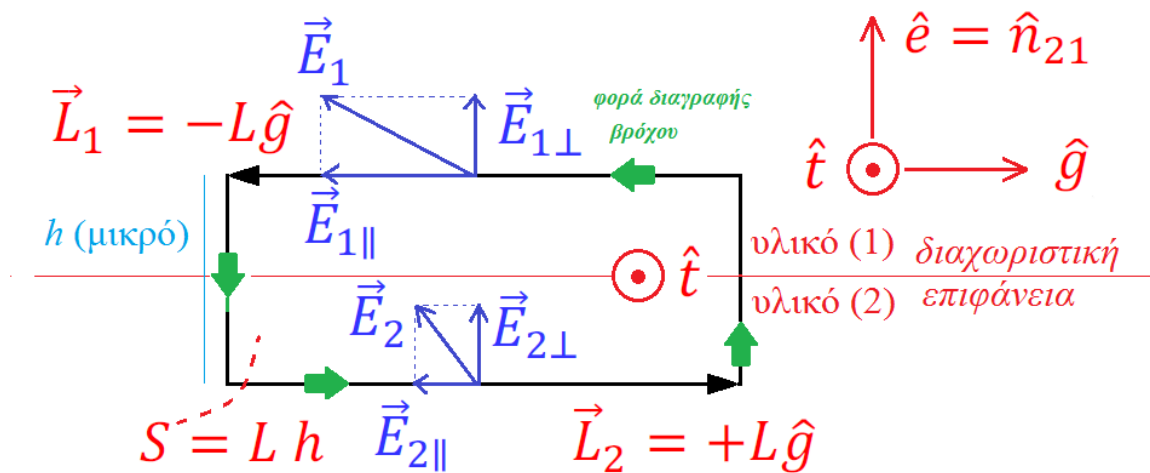
Ομοίως με προηγουμένως, καταλήγουμε στις εναλλακτικές γραφές

$$\boxed{B_{1\perp} = B_{2\perp}} \quad (1.31\alpha')$$

$$\text{ή } \boxed{(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \hat{e} = 0} \quad \hat{e} = \hat{n}_{21} \text{ (από 2 προς το 1)} \quad (1.31\beta')$$

$$\text{ή } \boxed{(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \hat{n}_{21} = 0} \quad (1.31\gamma')$$

$$\text{ή } \boxed{(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_{12} = 0} \quad \hat{n}_{12} \text{ (από 1 προς το 2)} \quad (1.31\delta')$$



Σχήμα 1.8: Συνοριακές συνθήκες για την 3η Εξίσωση Maxwell. Η κατεύθυνση των διανυσμάτων  $\vec{E}_1$  και  $\vec{E}_2$  έχει σχεδιαστεί τυχαία. Εδώ ο βρόχος βρίσκεται στο επίπεδο  $(\hat{e}, \hat{g})$ .

♡ Ας εφαρμόσουμε τώρα στο Σχήμα 1.8 την '3η' Εξίσωση Maxwell 1.28γ'

$$\mathcal{E}_{\text{HE}\Delta} := \oint_{L=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_1 \cdot \vec{L}_1 + \int_{\text{μικρό αριστερό}}^{\text{μικρό δεξιό}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \vec{E}_2 \cdot \vec{L}_2 + \int_{\text{μικρό δεξιό}}^{\text{μικρό αριστερό}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \\ \text{άλλα όταν } h \rightarrow 0 \Rightarrow S = hL \rightarrow 0 \Rightarrow \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \rightarrow 0 \\ \text{άλλα όταν } h \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{\text{μικρό αριστερό}}^{\text{μικρό δεξιό}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 = \int_{\text{μικρό δεξιό}}^{\text{μικρό αριστερό}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{L}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{L}_2 = 0 \Rightarrow E_{1\parallel} L_1 + E_{2\parallel} L_2 = 0 \Rightarrow -E_{1\parallel} L + E_{2\parallel} L = 0 \Rightarrow E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$$

Παραπάνω ονομάσαμε  $|\vec{L}_1| = |\vec{L}_2| = |\vec{L}| = L$ , ενώ τα  $E_{1\parallel}, E_{2\parallel}, L_1, L_2$  είναι αλγεβρικές τιμές. Επειδή

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{L}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{L}_2 = 0 \Rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{g} = 0$$

Δηλαδή, όταν ο βρόχος βρίσκεται στο επίπεδο  $(\hat{e}, \hat{g}) \Rightarrow$  η διαφορά  $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \perp \hat{g}$

Ομοίως, όταν ο βρόχος βρίσκεται στο επίπεδο  $(\hat{e}, \hat{t}) \Rightarrow$  η διαφορά  $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \perp \hat{t}$

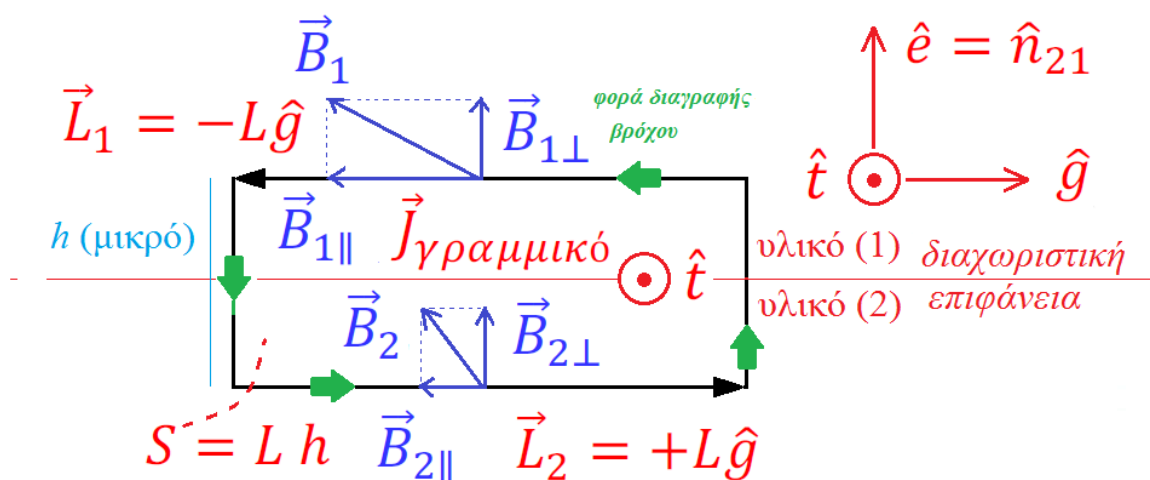
δηλαδή η διαφορά  $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \perp$  διεπιφάνεια  
 πράγμα που μπορεί να αποδοθεί ως  $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{e} = \vec{0}$

Οπότε, συνοπτικά, εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{E_{2\parallel} = E_{1\parallel}} \quad (1.32\alpha')$$

$$\boxed{(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{e} = \vec{0}} \quad (1.32\beta')$$





Σχήμα 1.9: Συνοριακές συνθήκες για την 4η Εξίσωση Maxwell. Η κατεύθυνση των διανυσμάτων  $\vec{B}_1$  και  $\vec{B}_2$  έχει σχεδιαστεί τυχαία.

♠ Ας εφαρμόσουμε τώρα στο Σχήμα 1.9 την '4η' Εξίσωση Maxwell 1.28δ'

$$\oint_{L=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{που διαπερνά την } S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} & \vec{B}_1 \cdot \vec{L}_1 + \int_{\text{τμήμα } h}^{\text{μικρό αριστερό}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \vec{B}_2 \cdot \vec{L}_2 + \int_{\text{τμήμα } h}^{\text{μικρό δεξιό}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \\ & \mu_0 J_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S} L + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{S=Lh} \vec{E} \cdot d\vec{a} \\ & \text{άλλα όταν } h \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{\text{τμήμα } h}^{\text{μικρό αριστερό}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 = \int_{\text{τμήμα } h}^{\text{μικρό δεξιό}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\ & \text{άλλα όταν } h \rightarrow 0 \Rightarrow S = Lh \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{S=Lh} \vec{E} \cdot d\vec{a} \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$-B_{1||}L + B_{2||}L = \mu_0 J_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } SL}.$$

Οπότε, συνοπτικά, εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \times \hat{e} = \mu_0 \vec{J}_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S}} \quad (1.33\alpha')$$

$$\boxed{B_{2\parallel} - B_{1\parallel} = \mu_0 J_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S}} \quad (1.33\beta')$$

και αν  $J_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S} = 0 \Rightarrow B_{2\parallel} = B_{1\parallel}$ . Παραπάνω τα  $B_{1\parallel}, B_{2\parallel}$  είναι αλγεβρικές τιμές, ενώ ονομάσαμε  $|\vec{L}_1| = |\vec{L}_2| = |\vec{L}| = L$ . Οι μονάδες του  $J_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S}$  είναι A/m. Δηλαδή στην Εξ. 1.33α' ή 1.33β' οι μονάδες είναι  $T = (N/A^2)(A/m)$ .

## 1.6 Ύπαρξη ΗΜ κυμάτων όταν $\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$ .

Ας δούμε πως μετατρέπονται οι Εξισώσεις Maxwell όταν  $\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1^n) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2^n) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3^n) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4^n) \end{array} \right\} \xrightarrow[\vec{J}=\vec{0}]{\rho=0} \left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1^{n'}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2^{n'}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3^{n'}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4^{n'}) \end{array} \right\} \quad (1.34)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την ταυτότητα

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Delta}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Delta}) - \nabla^2 \vec{\Delta} \quad (1.35)$$

όπου  $\nabla^2$  η Λαπλασιανή (Laplacian), πρώτα εις το  $\vec{E}$  και μετά εις το  $\vec{B}$ .

Για το  $\vec{E}$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \xrightarrow[(3^{n'})]{(1^{n'})} \quad (1.36)$$

$$\vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \vec{E} \Rightarrow \quad (1.37)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{E} \xrightarrow{(4^{n'})} \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \nabla^2 \vec{E} \Rightarrow \quad (1.39)$$

$$\text{κυματική εξίσωση} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{E} = \vec{0} \\ \square \vec{E} = \vec{0} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \Rightarrow \\ \text{ή} \\ \text{ή} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{όπου } \square \text{ είναι η λεγόμενη D' Alembertian.} \\ (1.40) \end{array}$$

Για το  $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \quad \begin{array}{l} (2n') \\ (4n') \end{array} \quad (1.41)$$

$$\vec{\nabla} \times \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \vec{B} \quad \Rightarrow \quad (1.42)$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{B} \quad \begin{array}{l} (3n') \\ \implies \end{array} \quad (1.43)$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \vec{B} \quad \Rightarrow \quad (1.44)$$

$$\text{κυματική εξίσωση} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{B} = \vec{0} \\ \square \vec{B} = \vec{0} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \quad \Rightarrow \\ \text{ή} \\ \text{ή} \\ \text{όπου } \square \text{ είναι η λεγόμενη D' Alembertian.} \end{array} \quad (1.45)$$

## 1.7 Πεδία εντός ιδανικού αγωγού.

Ένας καλός αγωγός (good conductor) ανακλά το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας ΗΜ κύματος που προσπίπτει στην επιφάνειά του [11]. Ορίζουμε ως ιδανικό αγωγό (ideal conductor) ένα υλικό το οποίο ανακλά όλη την ενέργεια ΗΜ κύματος που προσπίπτει στην επιφάνειά του [11]. Επειδή η πυκνότητα ενέργειας ΗΜ κύματος

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[ E^2 + c^2 B^2 \right] \quad (1.46)$$

με μονάδες  $[U] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$ ,

↓

$$\boxed{\text{Εντός ιδανικού αγωγού } \vec{E} = \vec{0} \text{ και } \vec{B} = \vec{0}} \quad (1.47)$$

## 1.8 Πεδία στο σύνορο ιδανικού αγωγού.

Ας θυμηθούμε τις συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια μεταξύ υλικών και στη συνέχεια υποθέσουμε ότι το υλικό (1) είναι ιδανικός αγωγός, ενώ το υλικό (2) είναι κενό ή κατά προσέγγιση αέρας

$$\left. \begin{aligned} E_{1\perp} - E_{2\perp} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} && \underline{\Gamma\Sigma\Sigma} \\ B_{1\perp} &= B_{2\perp} \\ E_{1\parallel} &= E_{2\parallel} \\ B_{2\parallel} - B_{1\parallel} &= \mu_0 \underbrace{J}_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S} && \text{μονάδες } [A/m] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (1.48)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{εάν} \\ (1) &\text{ ιδανικός αγωγός } (\vec{B}_1 = \vec{0} \text{ και } \vec{E}_1 = \vec{0}) \\ (2) &\text{ κενό ή αέρας} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (1.49)$$

$$\left. \begin{aligned} -E_{2\perp} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} && \underline{\text{E}\Sigma\Sigma} \\ B_{2\perp} &= 0 \\ E_{2\parallel} &= 0 \\ B_{2\parallel} &= \mu_0 \underbrace{J}_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S} \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

$\underline{\Gamma\Sigma\Sigma}$  σημαίνει γενικές συνοριακές συνθήκες και  $\underline{\text{E}\Sigma\Sigma}$  σημαίνει ειδικές συνοριακές συνθήκες. Επίσης, ας ονομάσουμε  $\underline{\text{E}\Sigma\Sigma}^*$  το μέρος των  $\underline{\text{E}\Sigma\Sigma}$  που θα χρησιμοποιήσουμε περισσότερο.

$$\left. \begin{aligned} B_{2\perp} &= 0 \\ E_{2\parallel} &= 0 \end{aligned} \right\} \underline{\text{E}\Sigma\Sigma}^* \quad (1.51)$$

## 1.9 Πεδία σε κοιλότητες.

Είδαμε παραπάνω ότι το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας ενός ΗΜ κύματος που προσπίπτει στην επιφάνεια ενός καλού αγωγού ανακλάται, μάλιστα αν ο αγωγός είναι ιδανικός τότε όλη η ενέργεια ανακλάται.

⇓

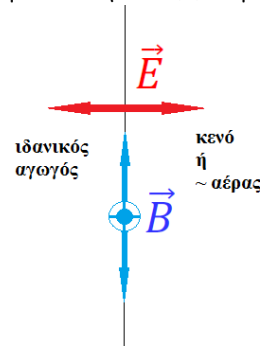
Συνεπώς, μπορούμε να αποθηκεύσουμε ΗΜ ενέργεια στη μορφή στάσιμων ΗΜ κυμάτων εντός κοιλότητας με τοιχώματα από ιδανικό (ή κατά προσέγγιση καλό) αγωγό.

Είδαμε επίσης τις  $\underline{E\Sigma\Sigma}$  και εστιάζουμε στις  $\underline{E\Sigma\Sigma^*}$

$$B_{2\perp} = 0$$

$$E_{2\parallel} = 0$$

δηλαδή στην επιφάνεια ενός ιδανικού αγωγού, η κάθετη συνιστώσα του  $\vec{B}$  και η εφαπτομενική συνιστώσα του  $\vec{E}$  μηδενίζονται.



Σχήμα 1.10: Στην επιφάνεια ενός ιδανικού αγωγού, η κάθετη συνιστώσα του  $\vec{B}$  και η εφαπτομενική συνιστώσα του  $\vec{E}$  μηδενίζονται, οπότε τα πεδία **μπορούν** να έχουν μόνο κάποιους από τους προσανατολισμούς που παρουσιάζονται.

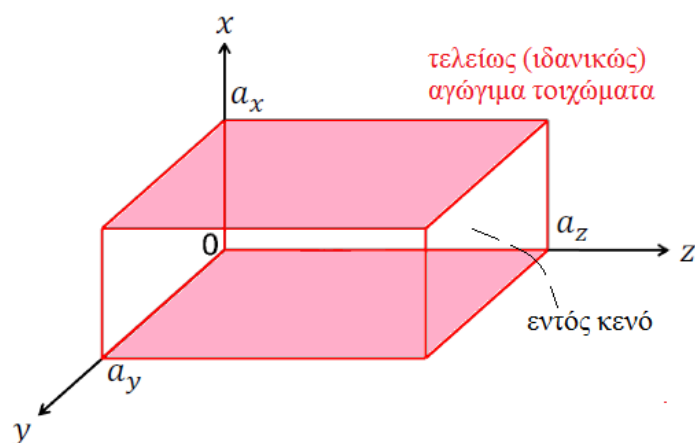
⇓

Συνεπώς, οι δυνατές μορφές και συχνότητες των στάσιμων κυμάτων που διατηρούνται στην κοιλότητα καθορίζονται από το σχήμα της κοιλότητας. Αυτό αποδίδεται ως

$$(\text{κανονικοί}) \text{ τρόποι } \left\{ \begin{array}{l} \text{μορφές} \quad \text{patterns} \\ \text{και} \quad \text{and} \\ \text{συχνότητες} \quad \text{frequencies} \end{array} \right\} (\text{normal}) \text{ modes} \quad (1.52)$$

## 1.10 Κανονικοί τρόποι ΗΜ κύματος σε ορθογώνια κοιλότητα.

Ας θεωρήσουμε την ορθογώνια κοιλότητα του Σχήματος 1.11.



Σχήμα 1.11: Ορθογώνια κοιλότητα με τελείως (ιδανικώς) αγωγία τοιχώματα. Εντός της κοιλότητας υπάρχει κενό ή κατά προσέγγιση αέρας. Έχει χρωματιστεί η κάτω έδρα όπου  $x = 0$  και η άνω έδρα όπου  $x = a_x$ .

Εντός της κοιλότητας  $\rho = 0$ ,  $\vec{J} = \vec{0} \implies$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \underline{\text{KEE}} \quad (1.53)$$

και

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \underline{\text{KEB}} \quad (1.54)$$

KEE σημαίνει κυματική εξίσωση για το  $\vec{E}$  και KEB σημαίνει κυματική εξίσωση για το  $\vec{B}$ . Επειδή τα τοιχώματα της κοιλότητας είναι ιδανικώς αγωγία θα πρέπει σε κάθε τοίχωμα να μηδενίζονται η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου και η κάθετη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου (συνθήκη ΕΣΣ\*), δηλαδή:

$$\boxed{B_{\perp} = 0} \quad (1.55\alpha')$$

$$\boxed{E_{\parallel} = 0} \quad (1.55\beta')$$

Τα επίπεδα κύματα ελευθέρου χώρου δεν ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. Μπορούμε, όμως, να αναζητήσουμε λύσεις χωρισμού των μεταβλητών  $\vec{r}, t$ , δηλαδή της μορφής

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_{\vec{r}}^{\text{χώρος}}(x, y, z) e^{-i\omega t}^{\text{χρόνος}} \quad (1.56)$$

Η ΚΕΕ λόγω της Εξ. 1.56 γίνεται

$$e^{-i\omega t} \nabla^2 \vec{E}_{\vec{r}} = \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} \vec{E}_{\vec{r}} \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \vec{E}_{\vec{r}} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_{\vec{r}} = \vec{0} \quad (1.57)$$

Στη συνέχεια χωρίζουμε τις μεταβλητές  $x, y, z$ , εντός του  $\vec{r}$ . Μετά από αρκετές πράξεις [11] που θα παραλειφθούν εδώ, προκύπτει:

$$E_x = E_{x0} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } y = 0 \text{ και } z = 0 \quad (1.58)$$

$$E_y = E_{y0} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } x = 0 \text{ και } z = 0 \quad (1.59)$$

$$E_z = E_{z0} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } x = 0 \text{ και } y = 0 \quad (1.60)$$

όπου

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.61)$$

Στο Σχήμα 1.11 έχει χρωματιστεί η κάτω έδρα όπου  $x = 0$  και η άνω έδρα όπου  $x = a_x$ . Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις 1.58, 1.59, 1.60 στην κάτω έδρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο  $x$ -συνιστώσα, δηλαδή είναι κάθετο σε αυτήν. Ομοίως προκύπτει ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο  $y$ -συνιστώσα στην οπίσθια έδρα και μόνο  $z$ -συνιστώσα στην αριστερή έδρα είναι δηλαδή κάθετο και στις έδρες αυτές. Ομοίως θα πρέπει το ηλεκτρικό πεδίο να έχει στην άνω έδρα μόνο  $x$ -συνιστώσα, στην μπροστινή έδρα μόνο  $y$ -συνιστώσα και στη δεξιά έδρα μόνο  $z$ -συνιστώσα, δηλαδή να είναι κάθετο και στις έδρες αυτές.



Επειδή η  $E_x$  πρέπει να μηδενίζεται και για  $y = a_y$  και  $z = a_z \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sin(k_y a_y) &= 0 \Rightarrow k_y a_y = m_y \pi \\ \sin(k_z a_z) &= 0 \Rightarrow k_z a_z = m_z \pi\end{aligned}$$

Επειδή η  $E_y$  πρέπει να μηδενίζεται και για  $x = a_x$  και  $z = a_z \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sin(k_x a_x) &= 0 \Rightarrow k_x a_x = m_x \pi \\ \sin(k_z a_z) &= 0 \Rightarrow k_z a_z = m_z \pi\end{aligned}$$

Επειδή η  $E_z$  πρέπει να μηδενίζεται και για  $x = a_x$  και  $y = a_y \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sin(k_x a_x) &= 0 \Rightarrow k_x a_x = m_x \pi \\ \sin(k_y a_y) &= 0 \Rightarrow k_y a_y = m_y \pi\end{aligned}$$

Συνοπτικά, στην κάτω και στην άνω έδρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο  $x$ -συνιστώσα, δηλαδή είναι κάθετο σε αυτές, στην οπίσθια και στην μπροστινή έδρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο  $y$ -συνιστώσα, δηλαδή είναι κάθετο σε αυτές, και στην αριστερή και στη δεξιά έδρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο  $z$ -συνιστώσα, δηλαδή είναι κάθετο σε αυτές.

Επίσης, συνολικά προκύπτει

$$k_x = \frac{m_x \pi}{a_x}, \quad k_y = \frac{m_y \pi}{a_y}, \quad k_z = \frac{m_z \pi}{a_z} \quad (1.62)$$

όπου  $m_x, m_y, m_z \in \mathbb{Z}$ .

Ακόμα, από την (1η) Εξίσωση Maxwell,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow$

$$k_x E_{x0} + k_y E_{y0} + k_z E_{z0} = 0, \quad (1.63)$$

ενώ από την (3η) Εξίσωση Maxwell,  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$

$$B_x = \frac{i}{\omega} \left( E_{y0} k_z - E_{z0} k_y \right) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \quad (1.64)$$

$$B_y = \frac{i}{\omega} \left( E_{z0} k_x - E_{x0} k_z \right) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \quad (1.65)$$

$$B_z = \frac{i}{\omega} \left( E_{x0} k_y - E_{y0} k_x \right) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} \quad (1.66)$$

Αφήνουμε στον-ην αναγνώστη-στρια να ελέγξει αν το  $\vec{B}$  ικανοποιεί την ΕΣΣ\* στα τοιχώματα, αλλά και τη (2η') Εξίσωση Maxwell,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  και την (4η') Εξίσωση Maxwell,  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Από τις Εξ. 1.61 και 1.62 θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\omega_{m_x, m_y, m_z} = c \sqrt{\left(\frac{m_x \pi}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y \pi}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z \pi}{a_z}\right)^2} \quad (1.67)$$

$$\omega_{m_x, m_y, m_z} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{a_z}\right)^2} \quad \text{ορθογώνια κοιλότητα} \quad (1.68)$$

$$\omega_{m_x, m_y, m_z} = \pi c \sqrt{\frac{m_x^2 + m_y^2}{a'^2} + \frac{m_z^2}{a_z^2}} \quad \text{τετραγωνική κοιλότητα } (a_x = a_y = a')$$

(1.69)

$$\omega_{m_x, m_y, m_z} = \frac{\pi c}{a} \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} \quad \text{κυβική κοιλότητα } (a_x = a_y = a_z = a)$$

(1.70)

Μπορούμε και να πάρουμε  $m_x, m_y, m_z \in \mathbb{N}$  απορροφώντας την αλλαγή προσήμου στα  $E_{x0}, E_{y0}, E_{z0}$ , δηλαδή επιτρέποντας στα  $E_{x0}, E_{y0}, E_{z0}$  να πάρουν θετικές ή αρνητικές τιμές, τέτοιες που να συμφωνούν με τις συνοριακές συνθήκες. Στον Πίνακα 1.2 φαίνονται μερικά  $\frac{a\omega}{\pi c}$  που προκύπτουν από την Εξ. 1.70 για την κυβική κοιλότητα, για διάφορες τιμές των  $m_x, m_y, m_z$ . Επίσης σημειώνεται αν προκύπτει μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο από τις αντίστοιχες εξισώσεις 1.58, 1.59, 1.60, καθώς και μηδενικό μαγνητικό πεδίο από τις αντίστοιχες εξισώσεις 1.64, 1.65, 1.66.

$m_x$	$m_y$	$m_z$	$\frac{a\omega}{\pi c}$	“ πλάτος ”
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	1	$\sqrt{2}$	$\neq 0$
1	1	1	$\sqrt{3}$	$\neq 0$
2	0	0	2	0
2	1	0	$\sqrt{5}$	$\neq 0$

Πίνακας 1.2: Τα  $\frac{a\omega}{\pi c}$  που προκύπτουν από την εξίσωση 1.70 για την περίπτωση της κυβικής κοιλότητας, για διάφορες τιμές των φυσικών αριθμών  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$ . Σημειώνεται και αν προκύπτει μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο από τις αντίστοιχες εξισώσεις 1.58, 1.59, 1.60, καθώς και μηδενικό μαγνητικό πεδίο από τις αντίστοιχες εξισώσεις 1.64, 1.65, 1.66.

### 1.11 Στοιχειώδης αριθμός κανονικών τρόπων ΗΜ πεδίου ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας, $g(\nu) = dN/d\nu$ .

Παρακάτω αποδεικνύουμε ότι

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3} \quad (1.71)$$

$dN$  είναι ο στοιχειώδης αριθμός των τρόπων ταλάντωσης στο στοιχειώδες διάστημα συχνότητας  $d\nu$ , και  $V$  ο όγκος της κοιλότητας η οποία είναι ένα τριδιάστατο κουτί. Δηλαδή εδώ μας ενδιαφέρει η ποσότητα

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{d(\# \text{ κανονικών τρόπων})}{d(\text{συχνότητα})}$$

$$[g(\nu)] = \frac{1}{\text{Hz}}$$

Η απόδειξη γίνεται παρακάτω για περιοδικές συνοριακές συνθήκες και για την ορθογώνια κοιλότητα της προηγούμενης Ενότητας 1.10.

#### 1.11.1 1η περίπτωση: Περιοδικές Συνοριακές Συνθήκες.

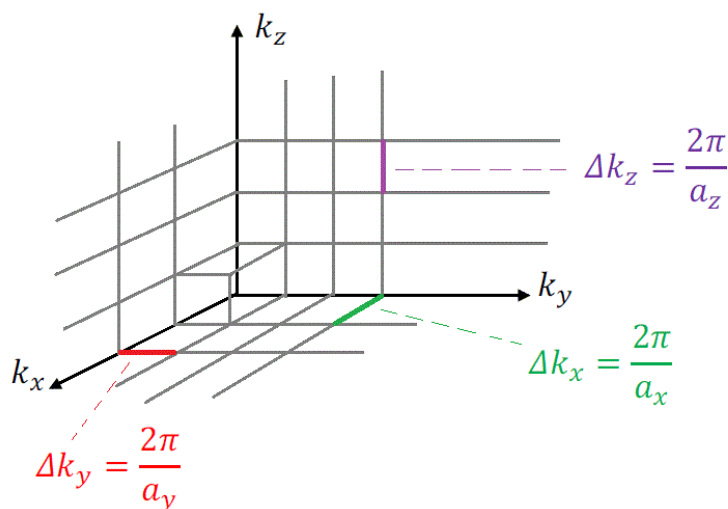
Ας υποθέσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο υπακούει σε περιοδικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή ότι

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \\ \vec{E}(0, t) &= \vec{E}_0 e^{i(-\omega t + \phi)} \\ \vec{E}((a_x, 0, 0), t) &= \vec{E}_0 e^{i(k_x a_x - \omega t + \phi)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^{ik_x a_x} = 1 \Leftrightarrow k_x a_x = 2\pi n_x, \quad n_x \in \mathbb{Z}$$

Δηλαδή

$$\left. \begin{aligned} k_x &= \frac{2\pi n_x}{a_x}, \quad n_x \in \mathbb{Z} \\ \text{ενώ ομοίως } k_y &= \frac{2\pi n_y}{a_y}, \quad n_y \in \mathbb{Z} \\ k_z &= \frac{2\pi n_z}{a_z}, \quad n_z \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

Όπως φαίνεται από την Εξ. 1.72, οι δυνατές τιμές του  $k$  είναι διακριτές. Το βήμα που ορίζει την διακριτότητα στον  $k$ -χώρο είναι στον άξονα  $x$  το  $\Delta k_x = \frac{2\pi}{a_x}$ , στον άξονα  $y$  το  $\Delta k_y = \frac{2\pi}{a_y}$ , και στον άξονα  $z$  το  $\Delta k_z = \frac{2\pi}{a_z}$ . Ας ζωγραφίσουμε αυτά τα σημεία στον  $k$ -χώρο, στο Σχήμα 1.12. Προσοχή, στο Σχήμα 1.12 φαίνεται μόνο το ένα ογδοημόριο του  $k$ -χώρου αλλά το  $k$  καλύπτει και τα 8 ογδοημόρια, δηλαδή όλο τον  $k$ -χώρο. Από την Εξ. 1.72 προκύπτει ότι ο στοιχειώδης  $k$ -όγκος είναι  $\frac{8\pi^3}{V}$ ,



Σχήμα 1.12: Οι δυνατές τιμές του  $k$  είναι διακριτές και ο στοιχειώδης  $k$ -όγκος είναι  $\frac{8\pi^3}{V}$ , όπου  $V$  ο όγκος της κοιλότητας (Εξ.1.72). Σε κάθε μία από τις 8 κορυφές του στοιχειώδους αυτού όγκου υπάρχει μία  $k$ -κατάσταση η οποία όμως του ανήκει κατά το  $1/8$  μια και υπάρχουν 8 όμοιοι τέτοιοι στοιχειώδεις όγκοι.

όπου  $V$  ο όγκος της κοιλότητας. Σε κάθε μία από τις 8 κορυφές του στοιχειώδους αυτού όγκου υπάρχει μία  $k$ -κατάσταση η οποία όμως του ανήκει κατά το  $1/8$  μια και υπάρχουν 8 όμοιοι τέτοιοι στοιχειώδεις όγκοι. Ας θεωρήσουμε και το στοιχειώδη όγκο από  $k$  έως  $k + dk$ , δηλαδή το σφαιρικό φλοιό ακτίνας  $k$  και πάχους  $dk$  που είναι  $4\pi k^2 dk$  και ας ονομάσουμε  $dN_k$  τον αριθμό των  $k$ -καταστάσεων στο σφαιρικό αυτό φλοιό. Οπότε

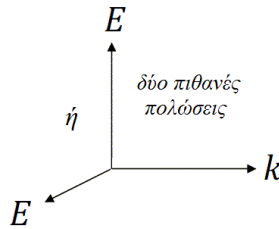
$$\left. \begin{array}{l} \text{σε } k\text{-χώρο } \frac{(2\pi)^3}{a_x a_y a_z} = \frac{8\pi^3}{V} \\ \text{σε } k\text{-χώρο } k \rightarrow k + dk \text{ δηλαδή } 4\pi k^2 dk \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \exists 8 \frac{1}{8} = 1 \text{ } k\text{-κατάσταση} \\ \exists dN_k \text{ } k\text{-κατάστασεις} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} dN_k &= \frac{4\pi k^2 dk V}{8\pi^3} = \frac{1}{2\pi^2} k^2 dk V \\ c = \lambda\nu &= \frac{2\pi}{k}\nu \Rightarrow k = \frac{2\pi}{c}\nu \Rightarrow dk = \frac{2\pi}{c}d\nu \end{aligned} \right\} \Rightarrow dN_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \frac{4\pi^2 \nu^2 2\pi d\nu V}{c^2 c} = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

Υπάρχουν όμως 2 πιθανές πολώσεις του ηλεκτρικού πεδίου κάθετα στο  $\vec{k}$  άρα ο αριθμός των καταστάσεων  $dN = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$ , οπότε

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi \nu^2 V}{c^3},$$

που είναι η αποδεικτέα Εξ. 1.71.



Σχήμα 1.13: Υπάρχουν 2 πιθανές πολώσεις του ηλεκτρικού πεδίου κάθετα στο  $\vec{k}$ .

### 1.11.2 2η περίπτωση: Σε ορθογώνια κοιλότητα.

Από την Εξ. 1.58, αν θεωρήσουμε ότι για λόγους συμμετρίας θα πρέπει το ηλεκτρικό πεδίο να δείχνει προς την ίδια μεριά της άνω και της κάτω επιφανείας, δηλαδή  $E_x(x=0) = -E_x(x=a_x)$ , συνεπάγεται ότι  $1 = -\cos(k_x a_x) \Rightarrow \cos(k_x a_x) = -1 \Rightarrow k_x = \frac{(2m_x+1)\pi}{a_x}$ ,  $m_x \in \mathbb{Z}$ . Οπότε το βήμα που ορίζει την διακριτότητα στον  $k$ -χώρο είναι στον άξονα  $x$  το  $\Delta k_x = \frac{2\pi}{a_x}$ . Ομοίως και για τους άξονες  $y$  και  $z$ , οπότε ο στοιχειώδης  $k$ -όγκος είναι  $\frac{8\pi^3}{V}$ , όπου  $V$  ο όγκος της κοιλότητας. Οπότε, ομοίως με την προηγούμενη Υποενότητα 1.11.1 προκύπτει η αποδεικτέα Εξ. 1.71.

## 1.12 Απόδειξη του κλασικού νόμου Rayleigh-Jeans από το θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας και το $g(\nu) = dN/d\nu$ . “Υπεριώδης καταστροφή”.

Όπως φαίνεται αμέσως παρακάτω, το  $\rho(\nu, T)$  είναι πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα συχνότητας, ενώ το  $\frac{g(\nu)}{V}$  είναι πυκνότητα κανονικών τρόπων ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα συχνότητας. Οπότε, αν έχουμε το  $\frac{g(\nu)}{V}$ , για να βρούμε το  $\rho(\nu, T)$  θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με τη μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου  $\bar{E}$ .

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3} \Rightarrow & [g(\nu)] &= \frac{1}{\text{Hz}} = \text{s} \\ \frac{g(\nu)}{V} &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} & \left[\frac{g(\nu)}{V}\right] &= \frac{1}{\text{Hz m}^3} = \frac{\text{s}}{\text{m}^3} \\ \rho(\nu, T) &= \bar{E} \frac{g(\nu)}{V} & [\rho(\nu, T)] &= \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}} = \frac{\text{Js}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας (equipartition theorem) της κλασικής θεωρίας, σε θερμική ισορροπία αποδίδουμε μέση ενέργεια  $\overline{E(T)} = \frac{1}{2}k_B T$  σε κάθε βαθμό ελευθερίας του δομικού λίθου του συστήματος. Οπότε π.χ. σε σύστημα  $N$  δομικών λίθων όπου ο καθένας έχει  $M$  βαθμούς ελευθερίας η ενέργεια είναι  $\frac{NM}{2}k_B T$ . Η μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου

$$\overline{E(T)} = (\text{αριθμός βαθμών ελευθερίας}) \times \frac{1}{2}k_B T. \quad (1.73)$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \text{σε } 3\Delta \text{ ιδανικό αέριο} & \quad \bar{E}_{\text{KIN}} = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow \bar{E} = \frac{3}{2}k_B T \\ \text{σε } 1\Delta \text{ ιδανικό αέριο} & \quad \bar{E}_{\text{KIN}} = \frac{1}{2}k_B T \Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{2}k_B T \\ \text{σε } 1\Delta \text{ απλό αρμονικό ταλαντωτή (AAT)} & \quad \bar{E}_{\Delta\text{TN}} = \bar{E}_{\text{KIN}} = \frac{1}{2}k_B T \Rightarrow \bar{E} = k_B T \end{aligned}$$

όπου  $\bar{E}_{\DeltaΥΝ}$  ( $\bar{E}_{ΚΙΝ}$ ) είναι η μέση δυναμική (κινητική) ενέργεια. Συνεπώς, θεωρώντας ότι έχουμε συλλογή ΑΑΤ με  $\bar{E} = k_B T$  προκύπτει

$$\boxed{\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T} \quad \text{νόμος Rayleigh-Jeans} \quad (1.74)$$

Επομένως, για  $\nu \rightarrow \infty \Rightarrow \rho(\nu, T) \rightarrow \infty$  πράγμα που ονομάστηκε “υπεριώδης καταστροφή” διότι ο απειρισμός αντιβαίνει εις τα πειραματικά δεδομένα (έχουμε δηλαδή “καταστροφική” ασυμφωνία με το πείραμα στις υψηλές συχνότητες και αυτό πρωτοπαρατηρήθηκε στην υπεριώδη περιοχή. Το θέμα αυτό θίχτηκε στην Ενότητα 1.2.



### 1.13 Απόδειξη του νόμου Planck.

Θα ακολουθήσουμε εδώ τις υποθέσεις που αναγκάστηκε να κάνει ο Planck το 1900 προκειμένου να αποδείξει τη σχέση που είναι σήμερα γνωστή ως “νόμος του Planck” [12] και η οποία συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα για την ακτινοβολία μέλανος σώματος. Το πρόβλημα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος είχε τεθεί τουλάχιστον ήδη από το 1859 από τον Kirchhoff. Ο Planck ασχολήθηκε με το πρόβλημα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος ήδη από το 1894. Από το 1896 είχε διατυπωθεί ο νόμος του Wien που απλώς περιγράφει τα πειραματικά δεδομένα σε υψηλές συχνότητες. Επίσης, ο νόμος Rayleigh-Jeans ο οποίος προκύπτει από την κλασική φυσική μπορεί να περιγράψει την ακτινοβολία μέλανος σώματος μόνο σε πολύ χαμηλές συχνότητες. Έλειπε λοιπόν μια συνεπής θεωρητική εξήγηση η οποία να ισχύει σε όλες τις συχνότητες.

Μετά από αρκετές αποτυχημένες προσπάθειες πρότεινε το 1900 μια απόδειξη στην οποία χρησιμοποίησε την **στατιστική κατανομή Boltzmann** και ακόμα υπέθεσε ότι η ΗΜ ενέργεια μπορεί να είναι **μόνο διακριτό** (“**κβαντισμένο**”) **πολλαπλάσιο της ποσότητας  $h\nu$** , όπου  $h$  είναι αυτό που λέμε σήμερα σταθερά Planck και  $\nu$  η συχνότητα της ακτινοβολίας. Για τις υποθέσεις αυτές δεν ήταν και πολύ χαρούμενος, αλλά του τις επέβαλε η ανάγκη να εξηγηθούν τα πειραματικά δεδομένα. Λίγο αργότερα, το 1905, ο Einstein [13] εξήγησε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο υποθέτοντας ότι υπάρχουν αυτά τα κβάντα φωτός ενώ η λέξη “**φωτόνιο**” πρωτογράφηκε μόλις το 1926 από τον Gilbert Newton Lewis [14].

Ο Planck αναγκάστηκε ουσιαστικά να εισαγάγει την έννοια του **resonator** (“**αντηχείο**” ή “**ταλαντωτής**”) που έχει διακεκριμένες (δηλαδή όχι συνεχείς αλλά εξαρτώμενες από έναν φυσικό αριθμό  $n$ , με άλλα λόγια “**κβαντισμένες**”) επιτρεπόμενες τιμές ενέργειας  $E_n$  για δεδομένη συχνότητα  $\nu$  και κατόπιν να υποθέσει ότι η ενέργεια που αντιστοιχεί σε δεδομένη συχνότητα  $\nu$  και θερμοκρασία  $T$  είναι στην πραγματικότητα μια μέση τιμή  $\overline{E}(\nu, T)$  των ενεργειών ενός μεγάλου αριθμού ταυτοσήμων resonators (“**αντηχείων**” ή “**ταλαντωτών**” που ο καθένας βρίσκεται σε διαφορετική στάθμη  $E_n$ , ενώ η πιθανότητα καταλήψεως της στάθμης  $p_n$  δίνεται από τη στατιστική Boltzmann).

Θα υποθέσουμε λοιπόν ότι η ΗΜ ενέργεια ενός resonator συχνότητας  $\nu$  εντός της κοιλότητας μέλανος σώματος μπορεί να πάρει μόνο διακεκριμένες τιμές (είναι δηλαδή “**κβαντισμένη**”) και μάλιστα ότι έχει τη μορφή

$$E_n = h\nu n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.75)$$

Να σημειωθεί ότι κλασικά, σύμφωνα με το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας, σε

θερμική ισορροπία αποδίδουμε μέση ενέργεια  $\overline{E(T)} = \frac{1}{2}k_B T$  σε κάθε βαθμό ελευθερίας του δομικού λίθου του συστήματος. Οπότε π.χ. σε σύστημα  $N$  δομικών λίθων όπου ο καθένας έχει  $M$  βαθμούς ελευθερίας η ενέργεια είναι  $\frac{NM}{2}k_B T$ . Αντιθέτως, εδώ θα υποθέσουμε ότι η μέση τιμή της ενέργειας κανονικού τρόπου εξαρτάται από τη θερμοκρασία αλλά και από τη συχνότητα

$$\overline{E(\nu, T)} = \sum_n E_n p_n \quad (1.76)$$

όπου ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να βρίσκεται ο δομικός λίθος στην ενέργεια  $E_n$  είναι  $p_n$  και αυτή δίνεται από τη στατιστική κατανομή Boltzmann, δηλαδή

$$p_n = \frac{e^{-\frac{E_n}{k_B T}}}{Z}, \quad (1.77)$$

$$Z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}}. \quad (1.78)$$

$Z$  είναι η λεγόμενη συνάρτηση επιμερισμού (partition function). Ας ορίσουμε

$$x := \frac{h\nu}{k_B T}. \quad (1.79)$$

Από τις Εξ. 1.75, 1.76, 1.77, 1.78, 1.79 συνεπάγεται

$$\overline{E(\nu, T)} = \sum_n n x k_B T \frac{e^{-nx}}{Z} = \frac{k_B T x}{Z} \underbrace{\sum_n n e^{-nx}}_{\mathcal{A}}, \quad (1.80)$$

$$Z = \sum_n e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad (1.81)$$

διότι πρόκειται για άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου  $a_n = e^{-nx}$  με αρχικό όρο  $a_0 = e^{-0x} = 1$  και λόγο<sup>1</sup>  $\lambda = \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-x} < 1$ . Ας προσπαθήσουμε τώρα να εκφράσουμε και το  $\mathcal{A}$  συναρτήσει του  $x$ . Από την Εξ. 1.81 προκύπτει

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = - \sum_n n e^{-nx} = - \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \Rightarrow \quad (1.82)$$

<sup>1</sup>Χρησιμοποιήσαμε εδώ το αρχαϊκό γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου σάμπι (σαν-πι από το σχήμα του πλαγίου π).

$$\mathcal{A} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}. \quad (1.83)$$

Συνεπώς, από τις Εξ. 1.80, 1.81, 1.83 προκύπτει

$$\overline{E(\nu, T)} = k_B T x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = k_B T x \frac{1}{e^x - 1}. \quad (1.84)$$

Κι αν θυμηθούμε πώς ορίστηκε το  $x$  (Εξ. 1.79), καταλήγουμε

$$\overline{E(\nu, T)} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \quad (1.85)$$

Κατ' αναλογία με ό,τι κάναμε στην Ενότητα 1.12

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3} \Rightarrow & [g(\nu)] &= \frac{1}{\text{Hz}} = \text{s} \\ \frac{g(\nu)}{V} &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} & \left[\frac{g(\nu)}{V}\right] &= \frac{1}{\text{Hz m}^3} = \frac{\text{s}}{\text{m}^3} \\ \rho(\nu, T) &= \overline{E(\nu, T)} \frac{g(\nu)}{V} & [\rho(\nu, T)] &= \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}} = \frac{\text{Js}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

όπου τώρα το  $\overline{E(\nu, T)}$  εξαρτάται κι από τη συχνότητα  $\nu$  και μάλιστα δίνεται από την Εξ. 1.85, άρα

$$\rho(\nu, T) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \Rightarrow \quad (1.86)$$

η πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα συχνότητας ΗΜ ακτινοβολίας μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία  $\rho(\nu, T)$  (μονάδες  $\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}}$ ) είναι

$$\boxed{\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}} \quad (1.87)$$

που είναι ο νόμος του Planck (Εξ. 1.7).

## 1.14 Απόδειξη νόμου μετατοπίσεως Wien.

Για το νόμο του Planck στη μορφή  $\rho(\nu, T)$  που αποδείχθηκε προηγουμένως, θα βρούμε τη – συναρτήση της θερμοκρασίας – συχνότητα  $\nu_0(T)$  όπου έχουμε μέγιστο της  $\rho(\nu, T)$  (Εξ. 1.89). Ας θυμηθούμε τη μορφή του νόμου μετά την αλλαγή μεταβλητής (Εξ. 1.8), δηλαδή θέτοντας

$$x = \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{k_B T}{h} x \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dx.$$

Τότε προκύπτει η Εξ. 1.11

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1}$$

όπου κατά την Εξ. 1.12

$$\rho_0 = \frac{8\pi}{h^2} \left( \frac{k_B T}{c} \right)^3$$

με μονάδες

$$[\rho_0] = \frac{\text{Js}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}}.$$

Εννοείται ότι στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως με προτασιακό τύπο  $\rho(x)$  δεν ανήκει το  $x = 0$ , δηλαδή δεν μιλάμε για μηδενική συχνότητα ή άπειρη θερμοκρασία.

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = \rho_0 x^2 \frac{3(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (1.88)$$

Αν ψάχνουμε ακρότατα, θα πρέπει να μηδενίζεται η παράγωγος  $\frac{d\rho}{dx}$ , οπότε (αφού  $x \neq 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dx} = 0 &\Rightarrow & 3(e^x - 1) - x e^x &= 0 \Rightarrow \\ & & (\text{αφού } x \neq 0) & \quad x_0 \sim 3 \end{aligned}$$

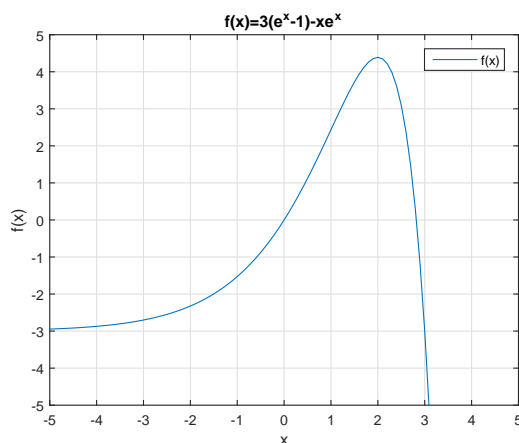
ακριβέστερα με γραφική λύση προκύπτει  $x_0 \approx 2.821439$

$x_0$  συμβολίζουμε τη ζητούμενη ρίζα και  $\nu_0$  την αντίστοιχη συχνότητα, δηλαδή  $x_0 = \frac{h\nu_0}{k_B T}$ . Η γραφική λύση απεικονίζεται στο Σχήμα 1.14. Φτιάχτηκε με matlab. Ο κώδικας παρατίθεται στο Παράρτημα Γ' (fornu0ofT.m, createfigurefornu0ofT.m). Άλλη επιλογή θα μπορούσε να είναι κάποια διαδικτυακή τοποθεσία ελεύθερης σχεδιάσεως ή κάποιο άλλο σχεδιαστικό λογισμικό. Επομένως

$$\nu_0 = \frac{k_B T x_0}{h} \approx \frac{k_B T 2.821439}{h} \approx (58.789 \text{ GHz/K}) T \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\nu_0}{T} \approx 58.789 \text{ GHz/K}} \quad (1.89)$$

Η Εξ. 1.89 δείχνει πως μετατοπίζεται η συχνότητα όπου έχουμε μέγιστο της  $\rho(\nu, T)$  συναρτήσεως της θερμοκρασίας  $T$  είναι δηλαδή ένας “νόμος μετατοπίσεως” μόνο που αναφέρεται σε συχνότητα και όχι σε μήκος κύματος όπως ο “νόμος μετατοπίσεως του Wien” που αποδεικνύουμε παρακάτω δηλαδή η Εξ. 1.100.



Σχήμα 1.14: Η γραφική λύση της εξίσωσης  $3(e^x - 1) - xe^x = 0$ . Η μία ρίζα είναι  $x_0 = 0$ , η οποία όμως δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $\rho(x)$ , ενώ η άλλη ρίζα είναι  $x_0 \approx 2.821439$ . Η γραφική παράσταση φτιάχτηκε με *matlab*. Ο κώδικας παρατίθεται στο Παράρτημα Γ' (*formnu0ofT.m, createfigureformnu0ofT.m*).

Στη συνέχεια, θα εξαγάγουμε το νόμο του Planck συναρτήσεως του μήκους κύματος  $\lambda$ , δηλαδή στη μορφή  $\rho(\lambda, T)$ , και θα βρούμε το – συναρτήσεως της θερμοκρασίας – μήκος κύματος  $\lambda_0(T)$  όπου έχουμε μέγιστο της  $\rho(\lambda, T)$  (Εξ. 1.100).

Η εξαγωγή του νόμου του Planck συναρτήσεως του μήκους κύματος  $\lambda$ , δηλαδή στη μορφή  $\rho(\lambda, T)$  γίνεται μέσω της απαιτήσεως

$$\int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda := \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu \Rightarrow \quad (1.90)$$

$$\int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu \quad (1.91)$$

Όμως

$$c = \lambda\nu \Leftrightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \quad (1.92)$$

Οπότε

$$\int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda = -8\pi hc \int_\infty^0 \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda = 8\pi hc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)} \Rightarrow \quad (1.93)$$

ο νόμος του Planck συναρτήσεως του μήκους κύματος και της θερμοκρασίας είναι

$$\boxed{\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)}} \quad (1.94)$$

Ορίζοντας

$$\psi = \frac{hc}{\lambda k_B T} \quad (1.95)$$

και

$$\rho'_0 = 8\pi \frac{(k_B T)^5}{(hc)^4} \quad (1.96)$$

η Εξ. 1.94 γράφεται

$$\rho(\psi) = \rho'_0 \frac{\psi^5}{e^\psi - 1}. \quad (1.97)$$

Οι μονάδες του  $\rho'_0$  είναι  $[\rho'_0] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{m}}$ . Άρα και οι μονάδες του  $\rho(\lambda, T)$  είναι  $[\rho(\lambda, T)] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{m}}$  **διαφορετικές από τις μονάδες του  $\rho(\nu, T)$**  που είναι  $[\rho(\nu, T)] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}}$ . Με άλλα λόγια, παρόλο που χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο ( $\rho$ ), δεν πρόκειται για το ίδιο ακριβώς φυσικό μέγεθος. Φυσικά, στην Εξ. 1.97 το  $\psi$  δεν μπορεί να είναι μηδέν, δηλαδή το μήκος κύματος και η θερμοκρασία δεν μπορούν να απειριστούν. Με άλλα λόγια στο πεδίο ορισμού της  $\rho(\psi)$  δεν ανήκει το μηδέν.

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \rho'_0 \frac{5\psi^4(e^\psi - 1) - \psi^5 e^\psi}{(e^\psi - 1)^2} = \rho'_0 \psi^4 \frac{5(e^\psi - 1) - \psi e^\psi}{(e^\psi - 1)^2} \quad (1.98)$$

Αν ψάχνουμε ακρότατα, θα πρέπει να μηδενίζεται η παράγωγος  $\frac{d\rho}{d\psi}$ , οπότε (αφού  $\psi \neq 0$ )

$$\frac{d\rho}{d\psi} = 0 \Rightarrow \quad 5(e^\psi - 1) - \psi e^\psi = 0 \Rightarrow$$

(αφού  $\psi \neq 0$ )  $\psi_0 \sim 5$

ακριβέστερα με γραφική λύση προκύπτει  $\psi_0 \approx 4.965114$

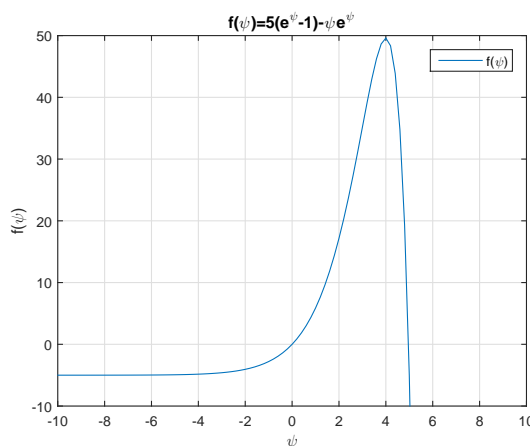
$\psi_0$  συμβολίζουμε τη ζητούμενη ρίζα και  $\lambda_0$  το αντίστοιχο μήκος κύματος, δηλαδή  $\psi_0 = \frac{hc}{\lambda_0 k_B T}$ . Η γραφική λύση απεικονίζεται στο Σχήμα 1.15. Φτιάχτηκε με matlab. Ο κώδικας (forlambda0ofT.m, createfigureforlambda0ofT.m) παρατίθεται εις

το Παράρτημα Γ'. Άλλη επιλογή θα μπορούσε να είναι κάποια διαδικτυακή τοποθεσία ελεύθερης σχεδίασεως ή κάποιο άλλο σχεδιαστικό λογισμικό. Επομένως

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\psi_0 k_B T} \approx \frac{hc}{4.965114 k_B T} \Rightarrow \quad (1.99)$$

$$\boxed{\lambda_0 T \approx 2.897772 \times 10^{-3} \text{ m K}} \quad (1.100)$$

Η Εξ. 1.100 δείχνει πως μετατοπίζεται το μήκος κύματος όπου έχουμε μέγιστο της  $\rho(\lambda, T)$  συναρτήσει της θερμοκρασίας  $T$  είναι δηλαδή ένας “νόμος μετατοπίσεως”, ο λεγόμενος “νόμος μετατοπίσεως του Wien”. Αυτή είναι η “σύγχρονη μορφή” του νόμου μετατοπίσεως του Wien (Wien displacement law). Ο νόμος παρήχθη από



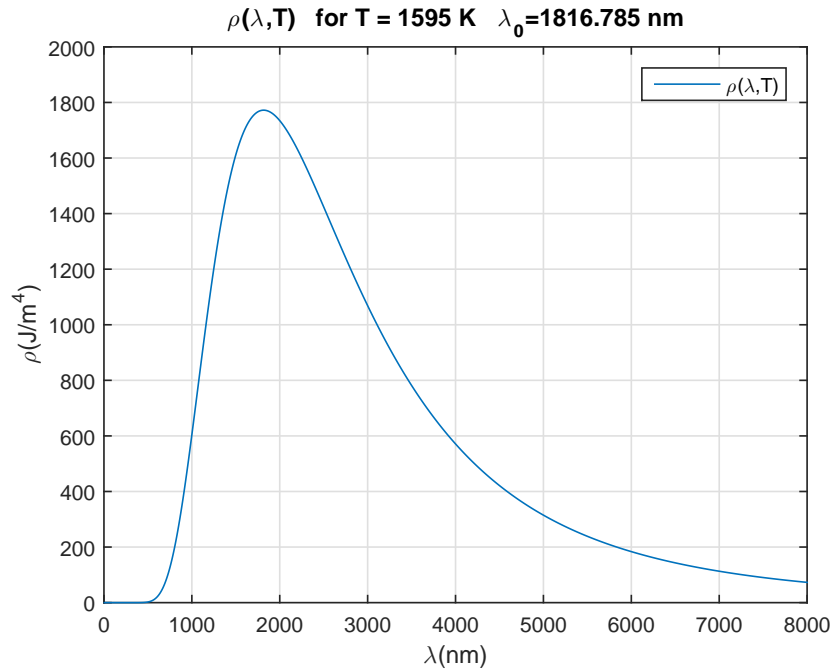
Σχήμα 1.15: Η γραφική λύση της εξίσωσης  $5(e^\psi - 1) - \psi e^\psi = 0$ . Η μία ρίζα είναι  $\psi_0 = 0$ , η οποία όμως δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $\rho(\psi)$ , ενώ η άλλη ρίζα είναι  $\psi_0 \approx 4.965114$ . Η γραφική παράσταση φτιάχτηκε με `matlab`. Ο κώδικας (`forlambda0ofT.m`, `createfigureforlambda0ofT.m`) παρατίθεται στο Παράρτημα Γ'.

τον Wilhelm Wien το 1893 με τη διατύπωση ότι η ακτινοβολία μέλανος σώματος για διαφορετικές θερμοκρασίες του κορυφώνεται σε μήκος κύματος αντιστρόφως ανάλογο της απόλυτου θερμοκρασίας του, ήτοι:

$$\lambda_0 T = \text{σταθερά} \quad (1.101)$$

Παρόλο που αυτό μπορεί να αποδειχθεί από το νόμο του Planck όπως είδαμε παραπάνω καταλήγοντας στην Εξ. 1.100, η συμπεριφορά αυτή ανακαλύφθηκε από τον Wilhelm Wien μερικά χρόνια πριν ο Max Planck αποδείξει το νόμο του (Εξ. 1.11

ή Εξ. 1.94). Ο νόμος του Planck στη μορφή  $\rho(\lambda, T)$  για  $T = 1595$  K αλλά και το  $\lambda_0$  του νόμου μετατοπίσεως του Wien φαίνονται στο Σχήμα 1.16. Ο κώδικας παρατίθεται στο Παράρτημα Γ'. Εκλέξαμε αυτή τη θερμοκρασία αναφερόμενοι στην Εικόνα 2 του ιστορικού άρθρου του William Weber Coblentz [15], η οποία περιέχει πειραματικά δεδομένα και σύγκριση με το νόμο του Planck σε αυτή τη θερμοκρασία.

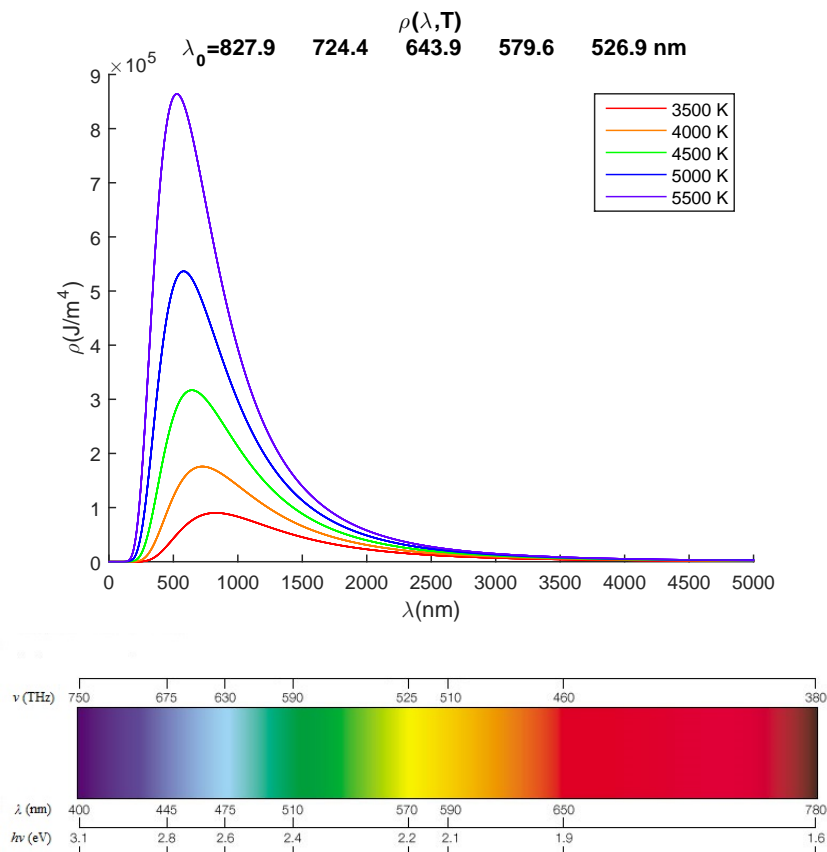


Σχήμα 1.16: Ο νόμος του Planck στη μορφή  $\rho(\lambda, T)$  για  $T = 1595$  K αλλά και το  $\lambda_0$  του νόμου μετατοπίσεως του Wien. Η θερμοκρασία εκλέχτηκε ως αναφορά στο ιστορικό άρθρο του William Weber Coblentz [15].

Ο νόμος του Planck  $\rho(\lambda, T)$  για κάποιες θερμοκρασίες μέλανος σώματος φαίνεται στο Σχήμα 1.17. Παρατηρούμε τη μετατόπιση του φάσματος προς μικρότερα μήκη κύματος, καθώς αυξάνεται η απόλυτη θερμοκρασία του μέλανος σώματος  $T$  πράγμα που εκφράζει ο νόμος μετατοπίσεως του Wien. Για τις θερμοκρασίες αυτές σημειώνονται και τα  $\lambda_0$  όπου έχουμε κάθε φορά μέγιστο της  $\rho(\lambda, T)$ . Επιπλέον, φαίνεται και το ορατό ΗΜ φάσμα που θα χρειαστεί σε κάποιες ασκήσεις με σώματα που εκπέμπουν ΗΜ ακτινοβολία, όπου υποθέτουμε ότι αυτά μπορούν να προσεγγιστούν με μέλανα σώματα κάποιας “ενεργού θερμοκρασίας”. Ενεργός θερμοκρασία (effective temperature) ενός σώματος είναι η θερμοκρασία ενός μέλανος



σώματος το οποίο θα εξέπεμπε το ίδιο συνολικό ποσό ΗΜ ακτινοβολίας. Όμως, δεν εξυπακούεται ότι η κατανομή αυτής της ακτινοβολίας συναρτήσει του μήκους κύματος ή της συχνότητας θα ακολουθεί το νόμο του Planck. Η [Ανω Εικόνα] του Σχήματος 1.17 φτιάχτηκε με matlab. Ο κώδικας παρατίθεται στο Παράρτημα Γ' (WienDisplacementANDPlanckofLambdaMultipleT.m).



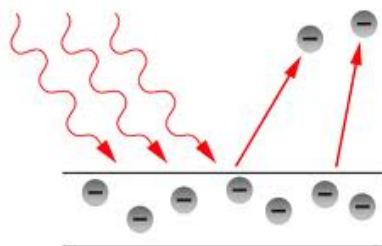
Σχήμα 1.17: [Ανω Εικόνα] Ο νόμος του Planck  $\rho(\lambda, T)$  για κάποιες θερμοκρασίες μέλανος σώματος. Παρατηρούμε τη μετατόπιση του φάσματος προς μικρότερα μήκη κύματος, καθώς αυξάνεται η απόλυτη θερμοκρασία του μέλανος σώματος  $T$  πράγμα που εκφράζει ο νόμος μετατοπίσεως του Wien. Σημειώνονται και τα  $\lambda_0$  όπου έχουμε κάθε φορά μέγιστο της  $\rho(\lambda, T)$ . [Κάτω Εικόνα] Το ΗΜ ορατό φάσμα.

## 1.15 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, ΦΗΦ (photoelectric effect) είναι η εκπομπή ηλεκτρονίων από κάποιο υλικό λόγω της απορροφήσεως ενέργειας την οποία μεταφέρει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, συνήθως στην περιοχή του ορατού ή του υπεριώδους. Τα εκπεμπόμενα ηλεκτρόνια λέγονται και φωτοηλεκτρόνια. Παρατηρήθηκε από τον Heinrich Hertz [16] το 1887, ο οποίος έδειξε μάλιστα ότι δημιουργούνται ευκολότερα ηλεκτρικοί σπινθήρες όταν τα ηλεκτρόδια φωτιστούν με υπεριώδες φως. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο απαιτεί φωτόνια με ενέργειες της τάξεως περίπου του 1 eV έως 1 MeV σε στοιχεία υψηλού ατομικού αριθμού. Η μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου οδήγησε σε αποδοχή της κβαντικής φύσεως του φωτός και του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού (wave-particle duality). Το 1905, ο Albert Einstein εξήγησε το ΦΗΦ υποθέτοντας ότι το φως αποτελείται από διακριτά κομμάτια (quanta) αντί για συνεχή κύματα [13]. Τα διακριτά αυτά κομμάτια ονομάζονται τώρα φωτόνια (photons), ένας όρος που αποδίδεται στον Gilbert Newton Lewis και χρησιμοποιήθηκε πολύ αργότερα [14].

Ο Einstein βασίστηκε στη θεωρία του Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος και θεώρησε ότι η ενέργεια κάθε φωτονίου  $E$  είναι ανάλογη της συχνότητάς του  $\nu$ , με σταθερά αναλογίας αυτήν που ονομάστηκε μετέπειτα σταθερά του Planck,  $h$ , δηλαδή ότι  $E = h\nu$ . Έτσι, εξήγησε το ΦΗΦ: ένα φωτόνιο με συχνότητα μεγαλύτερη κάποιας συχνότητας κατωφλίου (threshold frequency) διαθέτει την απαιτούμενη ενέργεια για να εκβάλει ένα ηλεκτρόνιο από το υλικό. Για την εξήγηση του ΦΗΦ που οδήγησε στην κβαντική επανάσταση της φυσικής ο Einstein τιμήθηκε με το βραβείο Nobel Φυσικής το 1921. Πρότεινε λοιπόν ότι υπό ορισμένες συνθήκες το φως ισοδυναμεί με με ροή σωματιδίων (κομμάτια φωτός, κβάντα φωτός, που σήμερα ονομάζουμε φωτόνια). Ανακάλυψε αυτό το αποτέλεσμα αναλύοντας τη θερμοδυναμική της ΗΜ ακτινοβολίας μέλανος σώματος στη περιοχή Wien. Μεταξύ των συνεπειών της πρότασής του αυτής ήταν και η εξήγηση διαφόρων αινιγματικών χαρακτηριστικών του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

Όταν λοιπόν ορατή ή υπεριώδης ΗΜ ακτινοβολία προσπέσει σε μια μεταλλική επιφάνεια, εκτινάσσονται ηλεκτρόνια εφ' όσον όμως η συχνότητα της ΗΜ ακτινοβολίας είναι αρκετά υψηλή. Για παράδειγμα, όταν μονοχρωματικό φως προσπέσει στην κάθοδο ενός σωλήνα εκκενώσεως, δημιουργείται ρεύμα μεταξύ καθόδου και ανόδου, λόγω της μετατοπίσεως των εκτινασσόμενων από την κάθοδο ηλεκτρονίων προς την άνοδο. Στη διάταξη του Σχήματος 1.19 η διαφορά δυναμικού μεταξύ ανόδου και καθόδου μπορεί να γίνει θετική ή αρνητική. Όταν είναι θετική τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται οπότε το ρεύμα αυξάνεται, ενώ όταν είναι αρνητική επιβραδύνονται και το ρεύμα μειώ-



Σχήμα 1.18: Σχηματικά το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.

νεται. Σε κάποια ικανά αρνητική διαφορά δυναμικού  $V_0$ , το ρεύμα μηδενίζεται. Η  $V_0$  ονομάζεται και διαφορά δυναμικού ή τάση κατωφλίου.

Μία από τις ανιχνευτικές πλευρές του ΦΗΦ ήταν ότι ανεξαρτήτως της εντάσεως της προσπίπτουσας μονοχρωματικής ακτινοβολίας η τάση κατωφλίου είναι πάντοτε η ίδια. Η ύπαρξη μια διαφοράς δυναμικού η οποία καταφέρει να σταματά το ηλεκτρικό ρεύμα υποδηλώνει ότι υπάρχει μια μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορούν να αποκτήσουν τα εκτινασσόμενα από την κάθοδο ηλεκτρόνια. Η τάση κατωφλίου  $V_0$  επί το στοιχειώδες φορτίο  $e$  είναι ίση με τη μέγιστη αυτή κινητική ενέργεια. Δηλαδή

$$\frac{m_e u^2}{2} \Big|_{max} = eV_0 \quad (1.102)$$

Με άλλα λόγια, η κινητική ενέργεια που αποκτούν τα ηλεκτρόνια καθώς εκτινάσσονται από την επιφάνεια του μετάλλου έχει μια μέγιστη τιμή η οποία είναι πάντοτε η ίδια ανεξαρτήτως της εντάσεως της μονοχρωματικής ΗΜ ακτινοβολίας. Κάθε μέταλλο έχει ένα έργο εξαγωγής  $W_0$  που σημαίνει ότι ένα ηλεκτρόνια που βρίσκεται εντός του μετάλλου πρέπει να πάρει τουλάχιστον ενέργεια  $W_0$  για να ελευθερωθεί. Αν πάρει ακριβώς  $W_0$  τότε “βγαίνει” με μηδενική ταχύτητα ενώ αν πάρει ενέργεια  $E > W_0$  χρησιμοποιεί το επιπλέον ποσό ως κινητική ενέργεια. Δηλαδή

$$E = W_0 + \frac{m_e u^2}{2} \quad (1.103)$$

Ο Einstein [13] λοιπόν υπέθεσε ότι το φως αποτελείται από “κομμάτια”, “σωμάτια”, “κβάντα” που το κάθε ένα κουβαλάει ενέργεια  $h\nu$ , οπότε αν υποθέσουμε ότι ένα ηλεκτρόνιο απορροφά την ενέργεια ενός φωτονίου, η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να γραφτεί

$$h\nu = W_0 + \frac{m_e u^2}{2} \quad (1.104)$$

Οπότε, εφαρμόζοντας την προηγούμενη σχέση για τη μέγιστη κινητική ενέργεια, θα έχουμε

$$h\nu = W_0 + eV_0 \quad (1.105)$$

Άρα

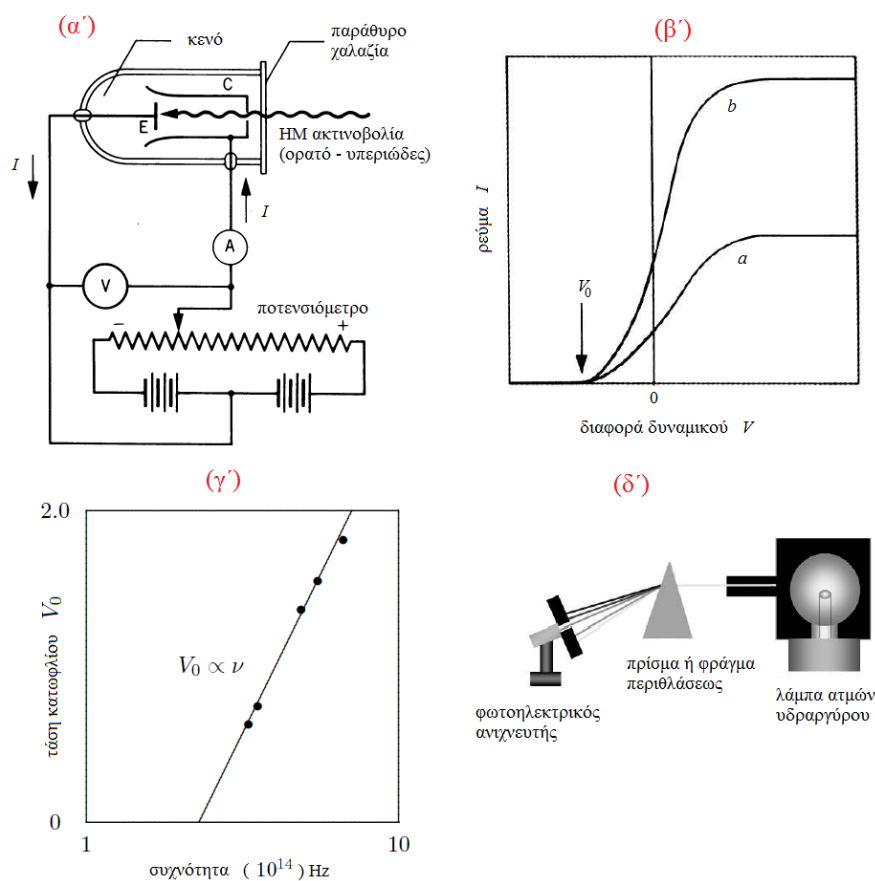
$$V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_0}{e} \quad (1.106)$$

Συνεπώς, αν ζωγραφίσουμε την τάση κατωφλίου  $V_0$  συναρτήσει της συχνότητας  $\nu$  θα πάρουμε μια ευθεία, δείτε το Σχήμα 1.19(γ'). Κατά τον Einstein, αύξηση της εντάσεως της μονοχρωματικής ΗΜ ακτινοβολίας σημαίνει αύξηση του αριθμού των ηλεκτρονίων με κινητική ενέργεια  $\frac{m_e u^2}{2}$ , αλλά όχι αύξηση της κινητικής αυτής ενέργειας. Στο Σχήμα 1.19(δ') παρουσιάζεται η διάταξη που χρησιμοποιείται για την επίδειξη της συχνότητας εξαρτήσεως στο ΦΗΦ. Πηγή φωτός είναι μια λάμπα ατμών υδραργύρου που εκπέμπει σε 5 ισχυρές γραμμές από το κίτρινο έως το υπεριώδες όπως φαίνεται στον Πίνακα

Γραμμή Εκπομπής	Συχνότητα $\nu$ ( $\times 10^{14}$ Hz)	Τάση κατωφλίου $V_0$ (V)
υπεριώδης 2	8.22	1.807
υπεριώδης 1	7.41	1.546
γαλανή	6.88	1.359
πράσινη	5.49	0.738
κίτρινη	5.19	0.624

Πίνακας 1.3: Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο με πηγή μια λάμπα ατμών υδραργύρου.

Η διάταξη εξασφαλίζει το διαχωρισμό των γραμμών εκπομπής και ένα φωτοηλεκτρικός ανιχνευτής μετρά τις ενέργειες των εκτινασόμενων ηλεκτρονίων. Ο Πίνακας 1.3 δείχνει τα αποτελέσματα ενός τυπικού πειράματος τα οποία ζωγραφίζονται στο Σχήμα 1.19(δ'). Σύμφωνα με την Εξ. 1.106, η κλίση της ευθείας είναι  $\frac{h}{e}$ . Σύμφωνα λοιπόν με τις προαναφερθείσες μετρήσεις έχουμε  $\frac{h}{e} = 0.408 \times 10^{-14}$  Js/C, ενώ ο λόγος αυτός ισούται με  $\frac{h}{e} = 0.414 \times 10^{-14}$  Js/C. Οι προβλέψεις της θεωρίας του Einstein επιβεβαιώθηκαν αργότερα με σημαντικότερο σταθμό τα πειράματα του Robert Millikan [17, 18]. Το δεύτερο [18] είναι πολύ πιο αναλυτικό.



Σχήμα 1.19: (α') Η διάταξη που χρειάζεται για τη μελέτη των ενεργειών των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται κατά το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο (ΦΗΦ). (β') Η μορφή της χαρακτηριστικής καμπύλης ρεύματος τάσεως  $I(V)$  για δύο διαφορετικές εντάσεις προσπίπτουσας ΗΜ ακτινοβολίας. Στην περίπτωση  $b$  η ένταση της ΗΜ ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από την περίπτωση  $a$ . Παρατηρούμε ότι υπάρχει κάποια τιμή της τάσεως  $V_0$  για την οποία το ρεύμα  $I$  μηδενίζεται και στις δύο περιπτώσεις, δηλαδή η  $V_0$  είναι ανεξάρτητη της εντάσεως της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. (γ') Η σχέση  $V_0(\nu)$ . (δ') Η διάταξη που χρησιμοποιείται για την επίδειξη της συχνοτικής εξαρτήσεως στο ΦΗΦ.

## 1.16 Αναφορές 1ου Κεφαλαίου.

Η αρίθμηση αναφέρεται στη βιβλιογραφία όπως αυτή παρατίθεται συνολικά πριν από τα Παραρτήματα.

[2] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (3rd ed.), Oxford University Press (2000), ISBN: 0198501765.

[3] R. Siegel and J.R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer* (4th ed.), Taylor and Francis (2002), ISBN: 1560328398.

[4] Roger Van Zee, J. Patrick Looney, *Cavity-Enhanced Spectroscopies, Volume 40* (Experimental Methods in the Physical Sciences), Academic Press (2003), ISBN: 0124759874.

[5] O. Lummer und F. Kurlbaum, Der electrisch geglühte “absolut schwarze” Körper und seine Temperaturmessung, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gessellschaft* 17 (1898) 106.

[6] O. Lummer und F. Kurlbaum, Der elektrisch geglühte “schwarze” Körper, *Annalen der Physik* 310 (1901) 829.

[7] K. Mizuno, J. Ishii, H. Kishida, Y. Hayamizu, S. Yasuda, D. N. Futaba, M. Yumura and K. Hata, A black body absorber from vertically aligned single-walled carbon nanotubes, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 106 (2009) 6044.

[8] Zu-Po Yang, Lijie Ci, J. A. Bur, Shawn-Yu Lin, and P. M. Ajayan, Experimental Observation of an Extremely Dark Material Made By a Low-Density Nanotube Array, *Nano Letters* 8 (2008) 446.

[9] A.N. Matveev, *Molecular Physics*, Mir Publishers (1985), Moscow, p. 86 ή A. Kikoin and I. Kikoin, *Molecular Physics*, Mir Publishers (1978), Moscow, p. 78 ή Χρ. Τρικαλινός, *Μοριακή Φυσική Θερμοδυναμική* (2009), Αθήνα, σελ. 75.

[10] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (3rd ed.), John Wiley & Sons (1998), New York, ISBN: 9780471309321.

- [11] A. Wolski, Theory of Electromagnetic Fields, arXiv:1111.4354v2.
- [12] M. Planck, Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 2 (1900) 237.
- [13] A. Einstein, Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. Annalen der Physik 17 (1905) 132-148.
- [14] G.N. Lewis, The conservation of photons, Nature 118 (1926) 874-875.
- [15] W.W. Coblentz, Constants of spectral radiation of a uniformly heated enclosure or so-called black body. II, Bulletin of the Bureau of Standards 13 (1916) 459-477. Publisher National Bureau of Standards (USA).
- [16] H. Hertz, Ueber den Einfluss des ultravioletten Lichtes auf die elektrische Entladung, Annalen der Physik 267 (1887) 983-1000.
- [17] R. Millikan, A Direct Determination of "h", Physical Review 4 (1914) 73-75.
- [18] R. Millikan, A Direct Photoelectric Determination of Planck's "h", Physical Review 7 (1916) 355-388.

# Κεφάλαιο 2

## ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ ΗΜ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ - ΥΛΗΣ (ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ).

- 2.1 Μηχανισμοί Einstein αλληλεπιδράσεως  
ΗΜ ακτινοβολίας με δισταθμικό σύστημα:  
(Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση.  
Αυθόρμητη Εκπομπή.  
Εξαναγκασμένη Εκπομπή.  
Συντελεστές Einstein  $A$  και  $B$ .

LASER είναι ένα ακρωνύμιο, το οποίο σημαίνει Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, δηλαδή Ενίσχυση Φωτός μέσω Εξαναγκασμένης Εκπομπής Ακτινοβολίας. Την περίοδο 1916-1917 ο Albert Einstein έβαλε τα θεωρητικά θεμέλια για το LASER μέσω μιας επανεξαγωγής του νόμου του Max Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος, επαν-απόδειξη η οποία βασιζόταν πάνω στους λεγόμενους σήμερα συντελεστές Einstein οι οποίοι εκφράζουν τις πιθανότητες (Εξαναγκασμένης) Απορροφήσεως, Αυθόρμητης Εκπομπής και Εξαναγκασμένης Εκπομπής, οι οποίες είναι οι διεργασίες που υπεισέρχονται στην αλληλεπίδραση ΗΜ ακτινοβολίας - ύλης ή ακριβέστερα δισταθμικού συστήματος π.χ. ενός δισταθμικού ατόμου ή χβαντικής τελείας κ.ο.κ..

Θα ασχοληθούμε λοιπόν με την αλληλεπίδραση ΗΜ ακτινοβολίας ή καλύτερα χβάντων φωτός (φωτονίων) με ένα δισταθμικό σύστημα όπως π.χ. ένα δισταθμικό



άτομο, δηλαδή ένα άτομο με δύο ενεργειακές στάθμες,  $E_1$  και  $E_2 > E_1$ . Θα θεωρήσουμε ότι το δισταθμικό αυτό άτομο έχει ένα και μοναδικό ηλεκτρόνιο. Σε αυτήν την αλληλεπίδραση κατά τον Einstein [19] υπεισέρχονται τρεις διεργασίες: η Αυθόρμητη Εκπομπή (Spontaneous Emission), η Εξαναγκασμένη Απορρόφηση (Stimulated Absorption) και τέλος η Εξαναγκασμένη Εκπομπή (Stimulated Emission). Η τελευταία εισήχθη από τον Einstein [19]. “Εξαναγκασμένη” χαρακτηρίζεται μια διεργασία που για να γίνει απαιτεί την επίδραση ΗΜ ακτινοβολίας στο άτομο. “Αυθόρμητη” χαρακτηρίζεται μια διεργασία που δεν χρειάζεται την παρουσία ΗΜ ακτινοβολίας στο χώρο όπου βρίσκεται το άτομο. Στον όρο Εξαναγκασμένη Απορρόφηση το “Εξαναγκασμένη” συχνά παραλείπεται διότι εννοείται, δηλαδή κάθε απορρόφηση είναι “εξαναγκασμένη” αφού γίνεται μόνο παρουσία ΗΜ ακτινοβολίας. Θα δούμε παρακάτω αναλυτικά τι είναι η Εξαναγκασμένη Εκπομπή, καθώς και οι άλλες δύο εμπλεκόμενες διεργασίες, δηλαδή η Αυθόρμητη Εκπομπή και η (Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση. Οι μηχανισμοί ή διεργασίες της αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτινοβολίας με δισταθμικό άτομο αναλύονται στα άρθρα [19] που δημοσιεύτηκαν την περίοδο 1916-1917. Στα ίδια άρθρα εκτός από τον ορισμό των διεργασιών γίνεται και υπολογισμός του νόμου του Planck από τις ανωτέρω διεργασίες. Συνοπτικά λοιπόν:

Stimulated Emission	Εξαναγκασμένη Εκπομπή	οφείλεται στο $\rho(\nu, T)$
Stimulated Absorption	Εξαναγκασμένη Απορρόφηση	οφείλεται στο $\rho(\nu, T)$
Spontaneous Emission	Αυθόρμητη Εκπομπή	

(2.1)

Ο Albert Einstein είχε είδη (1905) εξηγήσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο [13] υποθέτοντας ότι υπάρχουν χβάντα φωτός με ενέργεια  $E = h\nu$  τα οποία αργότερα ονομάστηκαν φωτόνια (το 1926 μάλλον πρωτοεισήχθη [14] η λέξη από τον Gilbert Newton Lewis). Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι μόνο πολλές δεκαετίες μετά - με έμφαση στις δεκαετίες 1950-1960 - και κατόπιν διεθνών προσπαθειών πολλών επιφανών και μη φυσικών, έγινε δυνατόν να κατασκευαστούν τα πρώτα MASER (το “M” σημαίνει Microwaves, Μικροκύματα) και LASER. Το 1964 οι Charles Townes, Nikolay Basov, και Aleksandr Prokhorov μοιράστηκαν το Βραβείο Νόμπελ Φυσικής “για θεμελιώδες έργο στο πεδίο της χβαντικής ηλεκτρονικής, έργο που οδήγησε στην κατασκευή τανταλωτών και ενισχυτών βασισμένων στην αρχή λειτουργίας των MASER-LASER”

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε εντός μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία. Οι μηχανισμοί ή διεργασίες αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτινοβολίας με δισταθμικό άτομο εξηγούνται παρακάτω. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, για τους λεγόμενους συντελεστές Einstein  $A_{21}, B_{12}, B_{21}$ , χρησιμοποιούμε το  $A$  στην αυθόρμητη διεργασία και το  $B$  σε εξαναγκασμένες διεργασίες.

### 2.1.1 (Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση.

Η Εξαναγκασμένη (ή Διεγερμένη) Απορρόφηση παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.1. Ας υποθέσουμε ότι αρχικώς το άτομο είναι ακίνητο. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα  $dW_{\text{απορ}}^{\text{εξ}}$  να απορροφήσει το άτομο φωτόνιο σε χρόνο  $dt$  δίνεται από τη σχέση

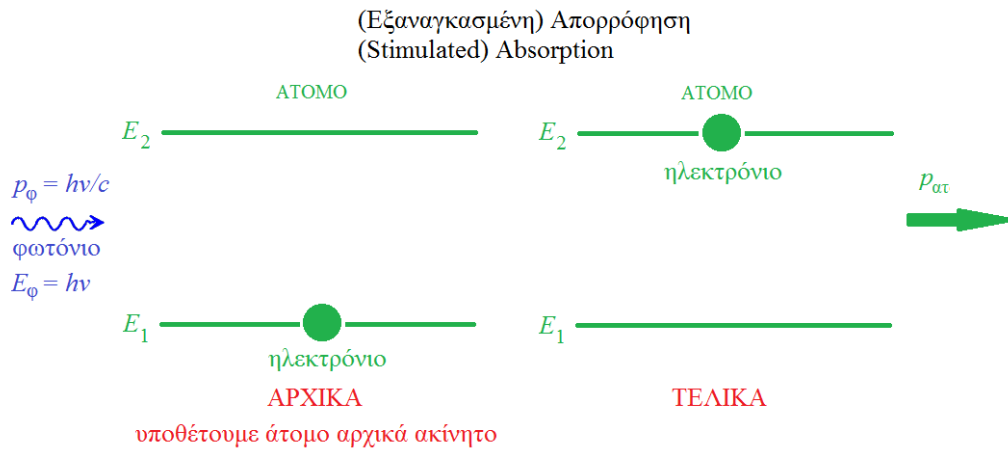
$$dW_{\text{απορ}}^{\text{εξ}} = B_{12}\rho(\nu, T)dt \quad (2.2)$$

δηλαδή είναι ανάλογη του χρόνου  $dt$  και της πυκνότητας ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας  $\rho(\nu, T)$ , με συντελεστή αναλογίας  $B_{12}$  όπου ο δείκτης 12 σημαίνει ότι με την απορρόφηση το ηλεκτρόνιο θα μεταβεί από τη στάθμη 1 στη στάθμη 2. Ας εφαρμόσουμε τη Διατήρηση της Ενέργειας και της Ορμής.

$$\begin{aligned} \text{Διατήρηση Ενέργειας} \quad E_1 + h\nu &= E_2 + \frac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}} \Rightarrow E_2 - E_1 = h\nu \\ \text{Διατήρηση Ορμής} \quad p_{\phi} &= p_{\alpha\tau} \Rightarrow p_{\alpha\tau} = \frac{h\nu}{c} = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h2\pi}{2\pi\lambda} = \hbar k \\ &\Rightarrow p_{\alpha\tau} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \end{aligned}$$

υποθέτουμε αμελητέο

Ας ελέγξουμε τώρα αν πράγματι το η κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρό-



Σχήμα 2.1: Εξαναγκασμένη Απορρόφηση (Stimulated Absorption).

φηση  $\frac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}$  είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου  $E_{\phi}$ , υπολογίζοντας

το λόγο τους  $\Lambda$ .

$$\Lambda = \frac{\frac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}}{E_{\phi}} = \frac{h^2 \lambda}{\lambda^2 2m_{\alpha\tau} hc} = \frac{h}{2\lambda c m_{\alpha\tau}}$$

Για να μεγαλώσει το  $\Lambda$  θα πρέπει το  $m_{\alpha\tau}$  να μικρύνει. Οπότε ας θέσουμε στο  $m_{\alpha\tau}$  τη μάζα του μικρότερου δυνατού ατόμου (του υδρογόνου)

$$\left. \begin{array}{l} m_{\alpha\tau} \approx m_p + m_e \\ m_p \approx 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ m_e \approx 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \end{array} \right\} \Rightarrow m_{\alpha\tau} \approx 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Γράψαμε  $m_{\alpha\tau} \approx m_p + m_e$  και όχι  $m_{\alpha\tau} = m_p + m_e$  γιατί υπάρχει κι ένα (μικρό) “έλλειμμα μάζας”, δηλαδή η ενέργεια συνδέσεως του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου στο άτομο του υδρογόνου. Ας πάρουμε ένα τυπικό πράσινο φωτόνιο με  $\lambda \approx 500 \text{ nm}$ . Τότε

$$\Lambda = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js s}}{2 \cdot 500 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \approx 1.320 \cdot 10^{-9}$$

Οπότε στο παράδειγμα η κινητική ενέργεια του ατόμου είναι πράγματι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου.

Ερώτηση: Για ποιο μήκος κύματος  $\lambda$ , στο άτομο του υδρογόνου, θα μπορούσε ο λόγος  $\Lambda$  να γίνει ίσος με τη μονάδα;

Απάντηση:



$$\Lambda = \frac{h}{2\lambda c m_{\alpha\tau}} = 1 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{h}{2c m_{\alpha\tau}} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js s}}{2 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \approx 0.660 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 0.660 \text{ fm}$$

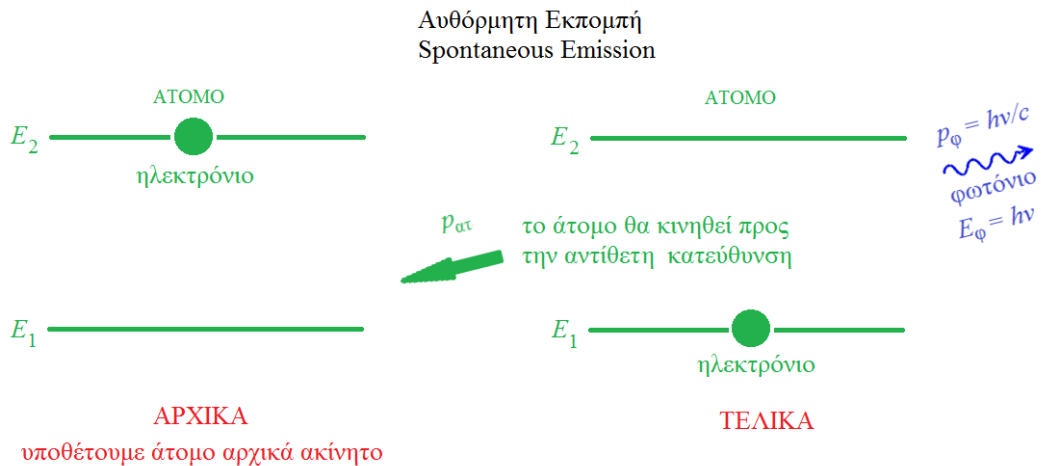
Αυτό είναι ένα εξαιρετικά λιλιπούτειο μήκος κύματος αφού ακόμα και οι ακτίνες  $\gamma$  έχουν τυπικά μήκη κύματος κάτω από  $10 \text{ pm}$  ( $10 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ), αλλά εδώ μιλάμε για ~~δέκατα του~~  $\text{fm}$  το οποίο είναι  $10^{-15} \text{ m}$ . Ακόμα κι η διάμετρος του πυρήνα των ατόμων κυμαίνεται από  $1.75 \text{ fm}$  ( $1.75 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ ) για το υδρογόνο (διάμετρος ενός πρωτονίου) έως περίπου  $15 \text{ fm}$  για τα μαζικότερα άτομα όπως το ουράνιο. Άρα η υπόθεσή μας να θεωρήσουμε αμελητέα την κινητική ενέργεια του ατόμου σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου είναι σωστή σε όλο σχεδόν το ΗΜ φάσμα.

### 2.1.2 Αυθόρμητη Εκπομπή.

Η Αυθόρμητη Εκπομπή παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.2. Ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα  $dW_{\text{εκπ}}^{\text{αυθ}}$  το άτομο να εκπέμψει φωτόνιο αυθορμήτως σε χρόνο  $dt$  δίνεται από τη σχέση

$$dW_{\text{εκπ}}^{\text{αυθ}} = A_{21}dt \quad (2.3)$$

δηλαδή είναι ανάλογη του χρόνου  $dt$  με συντελεστή αναλογίας  $A_{21}$  όπου ο δείκτης 21 σημαίνει ότι με την εκπομπή το ηλεκτρόνιο θα μεταβεί από τη στάθμη 2 στη στάθμη 1. Σημειώνουμε ότι αφού η διεργασία αυτή είναι αυθόρμητη, η  $dW_{\text{εκπ}}^{\text{αυθ}}$  δεν εξαρτάται από την πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας  $\rho(\nu, T)$ . Μπορούμε να ορίσουμε το χρόνο ζωής (lifetime) της στάθμης 2 ως το



Σχήμα 2.2: Αυθόρμητη Εκπομπή (Spontaneous Emission).

χρόνο που απαιτείται ώστε σίγουρα να εκπέμψει αυθορμήτως το φωτόνιο (οπότε το ηλεκτρόνιο μεταβαίνει από τη στάθμη 2 στη στάθμη 1). Αν τον ονομάσουμε  $\tau_2 = \tau$  τότε  $1 = A_{21}\tau$ , συνεπώς

$$\tau_2 = \tau = \frac{1}{A_{21}} \quad (2.4)$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα τη Διατήρηση της Ενέργειας και της Ορμής. Ας υποθέσουμε ότι αρχικώς το άτομο ήταν ακίνητο. Άρα με την εκπομπή φωτονίου, το άτομο θα

κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση.

$$\text{Διατήρηση Ενέργειας} \quad E_2 = E_1 + E_\phi + \frac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}$$

$$\text{Διατήρηση Ορμής} \quad p_{\alpha\tau} + p_\phi = 0$$

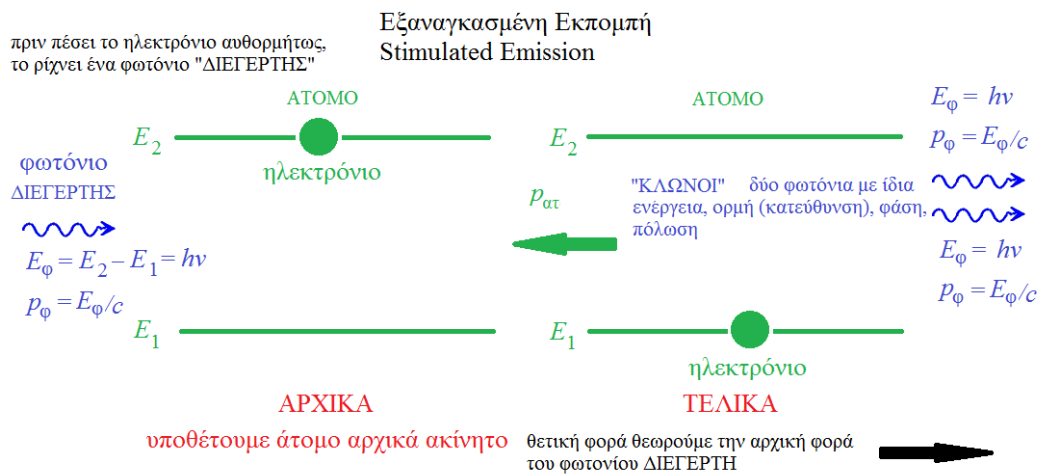
Επειδή η διαδικασία είναι αυθόρμητη, τα φωτόνια εκπέμπονται προς τυχαία κατεύθυνση, δηλαδή χωρίς κατευθυντικότητα (without directionality) και με τυχαία φάση, δηλαδή χωρίς συνοχή (incoherence) με άλλα λόγια πρόκειται για μη συνεκτικά φωτόνια (incoherent photons). **Κατευθυντικότητα (directionality)** σημαίνει ότι η ΗΜ ακτινοβολία εκπέμπεται προς συγκεκριμένη κατεύθυνση. **Συνοχή (coherence) είναι μια σταθερή σχέση μεταξύ των φάσεων κυμάτων ίδιας συχνότητας.** Επί παραδείγματι, δύο δέσμες φωτός είναι **συνεκτικές (coherent)** όταν η διαφορά φάσεως μεταξύ τους είναι σταθερή, ενώ είναι **μη συνεκτικές (incoherent)** εάν υπάρχει τυχαία ή μεταβαλλόμενη διαφορά φάσεως μεταξύ τους. Σταθερές μορφές συμβολής σχηματίζονται μόνο από συνεκτικές δέσμες, συνήθως μάλιστα δέσμες που προέρχονται από μια δέσμη που διαχωρίζεται σε δύο ή περισσότερες δέσμες. Ένα laser, σε αντίθεση με μια φωτεινή πηγή πυρακτώσεως (incandescent light source) παράγει φωτεινή δέσμη της οποίας οι συνιστώσες έχουν σταθερή σχέση φάσεως μεταξύ τους. Ομοίως δύο φωτόνια που έχουν σταθερή σχέση φάσεων είναι συνεκτικά.

### 2.1.3 Εξαναγκασμένη Εκπομπή.

Η Εξαναγκασμένη (ή Διεγερμένη) Εκπομπή παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.3. Ας υποθέσουμε ότι αρχικώς το άτομο είναι ακίνητο. Κατά τη διεργασία αυτή, πριν πέσει το ηλεκτρόνιο αυθορμήτως από τη στάθμη 2 στη στάθμη 1, το ρίχνει ένα φωτόνιο "ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ". Ας υποθέσουμε ότι θεωρούμε θετική φορά την αρχική φορά του φωτονίου ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα  $dW_{εκπ}^{εξ}$  να εκπέμψει με αυτό τον τρόπο το άτομο φωτόνιο σε χρόνο  $dt$  δίνεται από τη σχέση

$$dW_{εκπ}^{εξ} = B_{21}\rho(\nu, T)dt \quad (2.5)$$

δηλαδή είναι ανάλογη του χρόνου  $dt$  και της πυκνότητας ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας  $\rho(\nu, T)$ , με συντελεστή αναλογίας  $B_{21}$  όπου ο δείκτης 21 σημαίνει ότι με την εκπομπή το ηλεκτρόνιο θα μεταβεί από τη στάθμη 2 στη στάθμη 1. Τα δύο φωτόνια, δηλαδή το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ και το



Σχήμα 2.3: Εξαναγκασμένη Εκπομπή (Stimulated Emission).

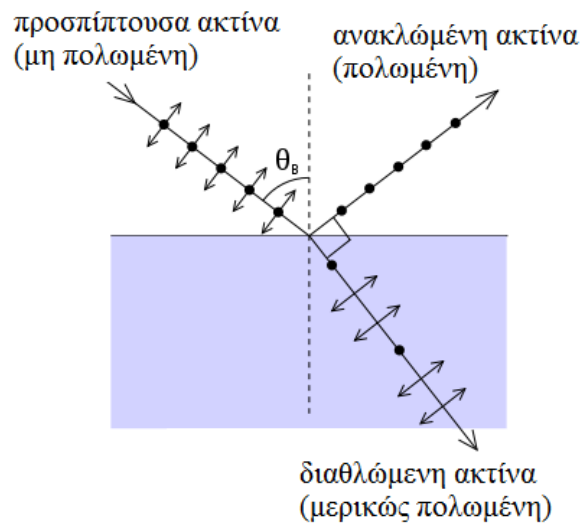
φωτόνιο που εκπέμπεται από το άτομο είναι ας πούμε "ΚΛΩΝΟΙ" δηλαδή τα δύο φωτόνια έχουν ίδια ενέργεια ( $\rightarrow$  μονοχρωματικότητα), ορμή άρα και κατεύθυνση ( $\rightarrow$  κατευθυντικότητα), φάση ( $\rightarrow$  συνοχή), πόλωση ( $\rightarrow$  πολωμένο φως).

μονοχρωματικότητα } ιδιότητες που έχει το LASER\*  
 κατευθυντικότητα }  
 συνοχή }  
 πόλωση\* }

\* Παρόλο που τα δύο φωτόνια που εμπλέκονται στην διεργασία της Εξαναγκασμένης Εκπομπής έχουν την ίδια πόλωση, δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο των φωτονίων αυτών βρίσκεται στην ίδια διεύθυνση, στο ενεργό μέσο μιας διατάξεως laser συμβαίνουν και οι άλλες δύο διεργασίες, η Αυθόρμητη Εκπομπή και η (Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση. Στην Αυθόρμητη Εκπομπή, όμως, τα φωτόνια που εκπέμπονται έχουν τυχαία κατεύθυνση, φάση και πόλωση (ενώ η ενέργειά τους σε ένα αυστηρά δισταθμικό σύστημα είναι ίδια). Επομένως, συνολικά, τα φωτόνια που κυκλοφορούν στο ενεργό μέσο μιας διατάξεως laser δεν έχουν συγκεκριμένη πόλωση. Βεβαίως, το φως μιας διατάξεως laser μπορεί να πολωθεί π.χ. με την τοποθέτηση ενός πολωτή (πολωτής είναι ένα υλικό που αφήνει μόνο φως ορισμένης πολώσεως να περάσει) ή και ενός “ παραθύρου Brewster ” που τοποθετείται στην έξοδο της διατάξεως laser. Όταν δέσμη φωτός συναντήσει τη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων, το μέρος της δέσμης που ανακλάται ή διέρχεται περιγράφεται από τις Εξ. Fresnel και εξαρτάται από την πόλωση του προσπίπτοντος φωτός και τη γωνία προσπτώσεως. Έτσι, φως με  $p$ -πόλωση (ηλεκτρικό πεδίο πολωμένο στο επίπεδο που ορίζουν η προσπίπτουσα ακτίνα και η κάθετη στη διεπιφάνεια) δεν θα ανακλαστεί εάν η γωνία προσπτώσεως είναι  $\theta_B = \arctan(n_2/n_1)$ , όπου  $n_1, n_2$  οι δείκτες διαθλάσεως του αρχικού και του άλλου μέσου. Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως νόμος του Brewster και η γωνία  $\theta_B$  ως γωνία Brewster. Αναφερόμαστε αναλυτικά στις Εξ. Fresnel και στη γωνία Brewster στην Ενότητα 7.2 και στην εκπομπή πολωμένης δέσμης στην Ενότητα 7.4. Στην πράξη, το φως κάποιων διατάξεων laser είναι σε μεγάλο βαθμό πολωμένο (π.χ. laser αερίου) ενώ το φως κάποιων άλλων διατάξεων laser (π.χ. laser διόδου) είναι σε μικρότερο βαθμό πολωμένο. Οι διατάξεις laser έχουν κάποια κοιλότητα που περιορίζει το ενεργό μέσο πράγμα που δημιουργεί ανταγωνισμό μεταξύ των ΗΜ τρόπων ταλαντώσεως αλλά και των πολώσεων. Εν τέλει, ο τρόπος / πόλωση με τις μικρότερες απώλειες υπερισχύει. Αλλά υπάρχουν και laser πολλών τρόπων / πολώσεων.

Ας σημειωθεί ότι

- τα περί ίδιας φάσεως, πολώσεως δεν υπάρχουν στα άρθρα του Einstein [19] ούτε παίζουν ρόλο στην εκεί εξαγωγή του νόμου του Planck που δείχνουμε και στη συνέχεια
- τα φωτόνια είναι μποζόνια άρα δύο ή περισσότερα φωτόνια μπορούν να έχουν ίδια ενέργεια, ορμή (άρα και κατεύθυνση), φάση
- χρειάζεται η υπόθεση ότι το αρχικό φωτόνιο (ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ), ενέργειας  $E_\phi = E_2 - E_1 = h\nu$ , δεν παθαίνει τίποτε κατά τη διάρκεια της εξαναγκασμένης εκπομπής.



Σχήμα 2.4: Η γωνία Brewster.

- θα μπορούσαμε να πούμε ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ καθορίζει τη φάση και την πόλωση του εκπεμπόμενου φωτονίου όπως σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγέρτης καθορίζει τη φάση και την πόλωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης

Ας εφαρμόσουμε τώρα τη Διατήρηση της Ενέργειας και της Ορμής. Ας υποθέσουμε ότι αρχικώς το άτομο ήταν ακίνητο. Σύμφωνα με τα όσα είπαμε έως τώρα

$$\begin{aligned} \text{Διατήρηση Ενέργειας} \quad E_2 + E_\phi &= 2E_\phi + E_1 + \frac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}} \\ \text{Διατήρηση Ορμής} \quad p_\phi &= 2p_\phi + p_{\alpha\tau} \end{aligned}$$

↑ μικρό

Μπορούμε βεβαίως, να θεωρήσουμε δοκιμαστικά ότι τα δύο φωτόνια ίσως είχαν δια-



φορετική ενέργεια και ορμή, δηλαδή να γράψουμε κάτι σαν

$$\begin{aligned} \text{Διατήρηση Ενέργειας} \quad E_2 + \cancel{E_\phi} &= E_1 + \cancel{E_\phi} + E'_\phi + \frac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}} \Rightarrow \\ E'_\phi &= E_2 - E_1 = E_\phi \\ \text{τα φωτόνια έχουν ίδια ενέργεια} &\rightarrow \text{μονοχρωματικότητα} \end{aligned}$$

Ας θεωρήσουμε θετική την αρχική φορά του φωτονίου ΔΙΕΓΕΡΤΗ.

$$\begin{aligned} \text{Διατήρηση Ορμής} \quad p_\phi &= p_\phi + p'_\phi + p_{\alpha\tau} \Rightarrow p'_\phi = -p_{\alpha\tau} \Rightarrow \\ &\text{ή (1) το νέο φωτόνιο ή (2) το άτομο} \\ &\text{θα κινηθεί στην κατεύθυνση του παλαιού φωτονίου.} \end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι το φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ καθορίζει κατεύθυνση του νέου φωτονίου, δηλαδή ότι ισχύει το (1), τότε

$$p'_\phi > 0 \quad p'_\phi = \frac{E'_\phi}{c} = \frac{E_\phi}{c} = p_\phi \Rightarrow \text{τα φωτόνια έχουν ίδια ορμή} \rightarrow \text{κατευθυντικότητα}$$

## 2.2 Εξαγωγή του νόμου Planck από τους μηχανισμούς εκπομπής και απορρόφησης και τη στατιστική Boltzmann.

### Σχέση συντελεστών Einstein A και B.

Ας θεωρήσουμε αλληλεπίδραση ΗΜ ακτινοβολίας και ύλης σε θερμοδυναμική ισορροπία, οπότε η θερμοκρασία  $T =$  σταθερή. Ας ονομάσουμε  $N_i$  τον πληθυσμό της στάθμης  $i$ , δηλαδή τον μέσο αριθμό ατόμων με το ηλεκτρόνιο στη στάθμη  $i$ , ο οποίος θα υποθέσουμε ότι υπακούει στην κατανομή Boltzmann, η οποία είναι

<p>(1) χωρίς διαφορετικά στατιστικά βάρη (απλούστερη μορφή)</p> $N_i = N_{ολ} \underbrace{\frac{e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{Z}}_{P_i}$	<p>(2) με διαφορετικά στατιστικά βάρη (γενικότερη μορφή)</p> $N_i = N_{ολ} \underbrace{\frac{g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{Z}}_{P_i}$
--	---

ή

$Z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$	$Z = \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$
-------------------------------------	---

$p_i$  είναι η πιθανότητα καταλήψεως της στάθμης  $i$ . Αυτή ορίζεται με τη βοήθεια της **συναρτήσεως επιμερισμού** (partition function),  $Z$ , η οποία παίζει κεντρικό ρόλο στην περιγραφή των στατιστικών ιδιοτήτων ενός συστήματος σε θερμοδυναμική ισορροπία (δείτε ένα σύγγραμμα στατιστικής φυσικής π.χ. το [20]). Αφού υποθέσαμε θερμοδυναμική ισορροπία, θα έχουμε ίσες μεταβολές του πληθυσμών των σταθμών σε χρόνο  $dt$ , δηλαδή ο αριθμός των ατόμων που μεταβαίνουν από την 1 στη 2 θα ισούται με τον αριθμό των ατόμων που μεταβαίνουν από τη 2 στην 1

$$dN_{1 \rightarrow 2} = dN_{2 \rightarrow 1}. \quad (2.6)$$

Ο  $dN_{1 \rightarrow 2}$  θα ισούται με τον πληθυσμό  $N_1$  επί την πιθανότητα μετάβασης από την 1 στη 2 στο χρόνο  $dt$ , πιθανότητα η οποία αφορά την (Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση και δίνεται από την Εξ. 2.2. Ο  $dN_{2 \rightarrow 1}$  θα ισούται με τον πληθυσμό  $N_2$  επί την πιθανότητα μετάβασης από τη 2 στην 1 στο χρόνο  $dt$ , πιθανότητα η οποία αφορά την Αυθόρμητη Εκπομπή που δίνεται από την Εξ. 2.3 και την Εξαναγκασμένη Εκπομπή

που δίνεται από την Εξ. 2.5. Δηλαδή

$$N_1 dW_{\alpha\pi\rho}^{\varepsilon\xi} = N_2 (dW_{\varepsilon\lambda\pi}^{\alpha\nu\theta} + dW_{\varepsilon\lambda\pi}^{\varepsilon\xi}) \quad (2.7)$$

(1) Αρχικά, ας κάνουμε πράξεις χωρίς διαφοροτικά στατιστικά βάρη. Λόγω των Εξ. 2.2, 2.3, 2.5, η Εξ. 2.7 γίνεται

$$\begin{aligned} N_{\alpha\lambda} \frac{e^{-\frac{E_1}{k_B T}}}{Z} B_{12} \rho(\nu, T) dt &= N_{\alpha\lambda} \frac{e^{-\frac{E_2}{k_B T}}}{Z} \left( A_{21} dt + B_{21} \rho(\nu, T) dt \right) \Rightarrow \\ B_{12} e^{-\frac{E_1}{k_B T}} \rho(\nu, T) - B_{21} e^{-\frac{E_2}{k_B T}} \rho(\nu, T) &= A_{21} e^{-\frac{E_2}{k_B T}} \Rightarrow \\ \rho(\nu, T) &= \frac{A_{21} e^{-\frac{E_2}{k_B T}}}{B_{12} e^{-\frac{E_1}{k_B T}} - B_{21} e^{-\frac{E_2}{k_B T}}} \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \rho(\nu, T) = \infty &\Rightarrow \\ \frac{A_{21}}{B_{12} - B_{21}} = \infty &\Rightarrow B_{12} = B_{21} := B \\ A_{21} &:= A \end{aligned}$$

Άρα

$$\rho(\nu, T) = \frac{\frac{A}{B}}{e^{\frac{(E_2 - E_1)}{k_B T}} - 1}$$

Συγκρίνοντας με το νόμο του Planck (ή και διαστατικά με το νόμο του Wien) έχουμε

$$\text{έως τώρα } \rho(\nu, T) = \frac{\frac{A}{B}}{e^{\frac{(E_2 - E_1)}{k_B T}} - 1} \quad \text{νόμος Planck } \rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Άρα

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \quad (2.8)$$

$$E_2 - E_1 = h\nu \quad (2.9)$$

(2) Τώρα ας κάνουμε πράξεις με διαφορετικά στατιστικά βάρη. Λόγω των Εξ. 2.2, 2.3, 2.5, η Εξ. 2.7 γίνεται

$$N_{\alpha\lambda} \frac{g_1 e^{-\frac{E_1}{k_B T}}}{Z} B_{12} \rho(\nu, T) dt = N_{\alpha\lambda} \frac{g_2 e^{-\frac{E_2}{k_B T}}}{Z} \left( A_{21} dt + B_{21} \rho(\nu, T) dt \right) \Rightarrow$$

$$\left( g_1 e^{-\frac{E_1}{k_B T}} B_{12} - g_2 e^{-\frac{E_2}{k_B T}} B_{21} \right) \rho(\nu, T) = g_2 e^{-\frac{E_2}{k_B T}} A_{21} \Rightarrow$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{g_2 A_{21} e^{-\frac{E_2}{k_B T}}}{g_1 B_{12} e^{-\frac{E_1}{k_B T}} - g_2 B_{21} e^{-\frac{E_2}{k_B T}}}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \rho(\nu, T) = \infty \Rightarrow$$

$$\frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12} - g_2 B_{21}} = \infty \Rightarrow$$

$$\boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}} \quad (2.10)$$

Οπότε, συγκρίνοντας με το νόμο του Planck

$$\text{έως τώρα } \rho(\nu, T) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} - 1} \quad \text{νόμος του Planck } \rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Άρα

$$\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}} \quad (2.11)$$

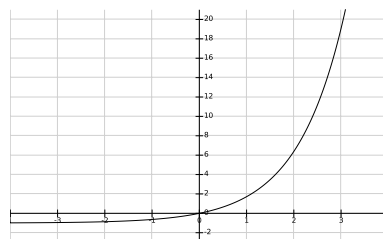
$$\boxed{E_2 - E_1 = h\nu} \quad (2.12)$$

## 2.3 Σύγκριση εκπομπών. Σύγκριση εξαναγκασμένων μηχανισμών.

- Ας συγκρίνουμε την Αυθόρμητη Εκπομπή με την Εξαναγκασμένη Εκπομπή.

$$\frac{\frac{dW_{\text{εκπ}}^{\text{αυθ}}}{dt}}{\frac{dW_{\text{εκπ}}^{\text{εξ}}}{dt}} = \frac{A_{21}dt}{B_{21}\rho(\nu, T)dt} = \frac{\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}}{\frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}} = e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1$$

Εφ' όσον η Αυθόρμητη Εκπομπή είναι **μη συνεκτική διεργασία**, δηλαδή τα φωτόνια που παράγονται δεν έχουν συνοχή (σταθερή σχέση φάσεων), ενώ η Εξαναγκασμένη Εκπομπή είναι **συνεκτική διεργασία**, δηλαδή τα φωτόνια που παράγονται έχουν συνοχή (ίδια φάση), άρα, αν θέλουμε ΣΥΝΟΧΗ συνάγεται ότι θέλουμε όσο το δυνατόν (1) μεγαλύτερο  $T$ , (2) μικρότερο  $\nu$  (μεγαλύτερο  $\lambda$ ). Οπότε, από αυτή την άποψη,



Σχήμα 2.5: Η γραφική παράσταση της  $f(x) = e^x - 1$ , εδώ  $x = h\nu/k_B T$ .

φαίνεται ευκολότερη η δημιουργία συνεκτικής δέσμης π.χ. στα μικροκύματα από ότι στο ορατό. Για το λόγο αυτό, ίσως, μερικές από τις πρώτες προσπάθειες δημιουργίας μιας διατάξεως η οποία να παράγει συνεκτικά ΗΜ κύματα εστιάστηκαν στα μικροκύματα (microwaves) και οδήγησαν στην κατασκευή του MASER<sup>1</sup> ως προπομπού του LASER<sup>2</sup>. Σήμερα βέβαια το ακρωνύμιο LASER χρησιμοποιείται ακόμα και για μη ορατό τμήμα του ΗΜ φάσματος, λέμε π.χ. infrared laser, ultraviolet laser, X-ray laser, κλπ.<sup>3</sup> Επειδή το MASER αναπτύχθηκε πριν από το LASER, οι διατάξεις αυτού του είδους που λειτουργούν στα μικροκύματα και τα ραδιοκύματα συνηθίζεται

<sup>1</sup>microwave amplification by stimulated emission of radiation

<sup>2</sup>light amplification by stimulated emission of radiation

<sup>3</sup>Σήμερα υπάρχει ακόμα και η ονομασία atom-laser για μια διάταξη που παράγει συνεκτικές δέσμες ατόμων που είναι μοζόνια όπως το  $^{87}\text{Rb}$  [21].

να ονομάζονται ακόμα και σήμερα MASERS αντί για microwave lasers ή radio lasers. Το πρώτο maser φτιάχτηκε το 1953 από τους Charles Townes, James Gordon, Herbert Zeiger.

Αυτό αποτυπώνεται σχηματικά:

MASER ( $\lambda \sim 1 \text{ cm}$ )  
ευκολότερη συνοχή

LASER ( $\lambda \sim 500 \text{ nm}$ )  
δυσκολότερη συνοχή

Έστω, επί παραδείγματι, ότι θέλουμε ο λόγος  $\frac{dW_{\text{εκπ}}^{\text{αυθ}}}{dW_{\text{εκπ}}^{\text{εξ}}} = 1$ . Ας εξετάσουμε σε τι θερμοκρασία είναι αυτό εφικτό (α') στο ερυθρό π.χ. με  $\lambda \sim 700 \text{ nm}$  και (β') στα μικροκύματα π.χ. με  $\lambda \sim 1 \text{ cm}$ . Λοιπόν,

$$\frac{dW_{\text{εκπ}}^{\text{αυθ}}}{dW_{\text{εκπ}}^{\text{εξ}}} = 1 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 = 1 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 2 \Rightarrow \frac{h\nu}{k_B T} = \ln 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{h\nu}{k_B \ln 2}} \quad \text{ή} \quad \boxed{T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2}}$$

\*  $\lambda = 700 \text{ nm}$  (ερυθρό φως)

$$T = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m K}}{700 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Js} \ln 2} \simeq \frac{6.626 \cdot 3 \cdot 10^{-34+30+8} \text{ K}}{7 \cdot 1.38 \ln 2} \simeq 29687 \text{ K}$$

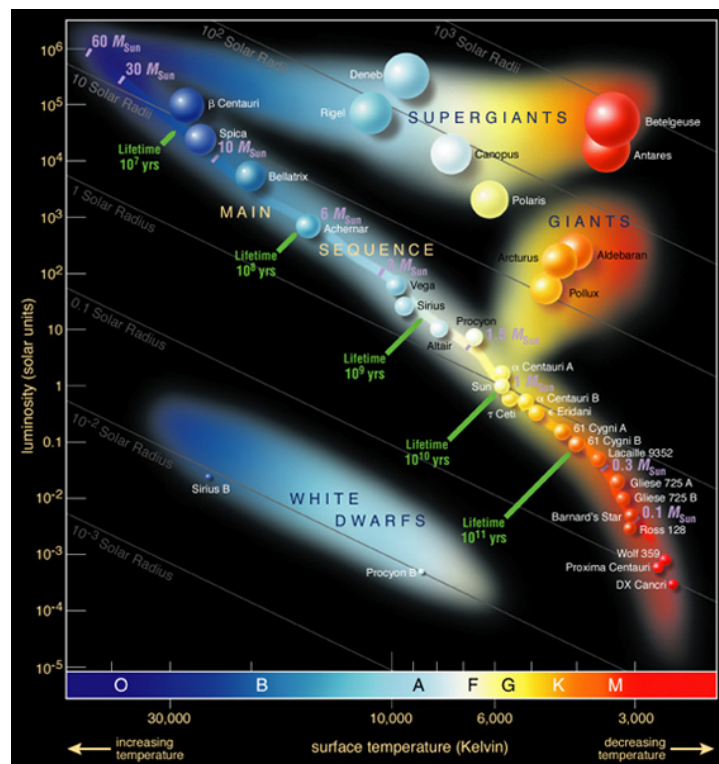
Οπότε με θερμοδυναμική ισορροπία αυτό είναι πρακτικώς **ανέφικτο**. Για παράδειγμα η φωτόσφαιρα του Ηλίου έχει ενεργό θερμοκρασία  $\sim 6000 \text{ K}$ , ενώ θερμοκρασία  $\sim 30000 \text{ K}$  εμφανίζεται στην επιφάνεια αστερών με 20πλάσια μάζα από αυτή του Ηλίου (Σχήμα 2.6). Το ανέφικτο αυτό ώθησε τους ερευνητές να αναζητήσουν λύσεις εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας, ήτοι η Αναστροφή Πληθυσμού (population inversion) μέσω Αντλήσεως (pumping). Αυτά όμως θα τα δούμε στο Κεφάλαιο 5.

\*  $\lambda = 1 \text{ cm}$  (μικροκύματα)

Ομοίως, βρίσκουμε  $T \sim 2.078 \text{ K}$ , δηλαδή μια πειραματικώς εφικτή θερμοκρασία.

▼ Ας συγκρίνουμε τις εξαναγκασμένες διεργασίες.

$$\frac{dW_{\text{απορ}}^{\text{εξ}}}{dW_{\text{εκπ}}^{\text{εξ}}} = \frac{B_{12}\rho(\nu, T)d\nu}{B_{21}\rho(\nu, T)d\nu} = 1$$



Σχήμα 2.6: Το διάγραμμα Hertzsprung-Russell, η κατανομή της φωτεινότητας έναντι της επιφανειακής θερμοκρασίας των αστέρων [22].

αν μιλάμε για σύστημα με ίδια στατιστικά βάρη ( $g_1 = g_2$ ).

$$\left. \begin{aligned} \text{Αλλά σε Θερμοδυναμική Ισορροπία } N_2 \ll N_1 \\ dN_{2 \rightarrow 1}^{e\xi} = N_2 \cdot dW_{\epsilon\chi\pi}^{e\xi} \\ dN_{1 \rightarrow 2}^{e\xi} = N_1 \cdot dW_{\alpha\pi\sigma\rho}^{e\xi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dN_{2 \rightarrow 1}^{e\xi} \ll dN_{1 \rightarrow 2}^{e\xi}$$

Άρα μέσω των Εξαναγκασμένων διεργασιών αυξάνεται ο πληθυσμός της στάθμης 2 και άρα μειώνεται η πυκνότητα ακτινοβολίας. Στη συνέχεια, η Αυθόρμητη Εκπομπή που συνοδεύεται από τη μετάβαση του ηλεκτρονίου από τη στάθμη 2 στη στάθμη 1 ενισχύει τη μη συνεκτική ακτινοβολία. Το πρόβλημα αυτό (που οφείλεται στο  $N_2 \ll N_1$  σε θερμοδυναμική ισορροπία) επιλύεται με την αναστροφή πληθυσμού μέσω αντλήσεως που θα δούμε στο Κεφάλαιο 5. Υπάρχουν πολλά είδη αντλήσεως. Αντλώ σημαίνει ότι με κάποιον τρόπο ανεβάζω ηλεκτρόνια στη στάθμη 2 ούτως ώστε  $N_2 > N_1$ .

## 2.4 Διακριτό φάσμα: άτομα και μόρια, κέντρα χρώματος, τεχνητά άτομα και μόρια.

Γνωρίζουμε ότι τα άτομα και τα μόρια έχουν διακριτό ενεργειακό φάσμα, μ' άλλα λόγια υπάρχουν μόνο κάποιες επιτρεπόμενες στάθμες, οι οποίες διαχωρίζονται από ενεργειακά χάσματα όπου απαγορεύεται να βρίσκονται τα ηλεκτρόνια. Αντιθέτως, στα στερεά έχουμε συνεχές ενεργειακό φάσμα με επιτρεπόμενες ζώνες, οι οποίες διαχωρίζονται από ενεργειακά χάσματα όπου απαγορεύεται να βρίσκονται τα ηλεκτρόνια. Συμβατικά, λοιπόν

ΑΤΟΜΑ, ΜΟΡΙΑ

διακριτό φάσμα, στάθμες

ΣΤΕΡΕΑ

συνεχές φάσμα, ζώνες

Σε ένα διακριτό π.χ. μοριακό σύστημα, η υψηλότερη κατειλημμένη στάθμη ονομάζεται **HOMO** (highest occupied molecular orbital), ενώ η χαμηλότερη άδεια ονομάζεται **LUMO** (lowest unoccupied molecular orbital). Σε ένα συνεχές π.χ. στερεό σύστημα, τα αντίστοιχα είναι η **κορυφή της ζώνης σθένους** (top of valence band,  $E_V$ ) και ο **πυθμένας της ζώνης αγωγιμότητας** (bottom of conduction band,  $E_C$ ).

Θα μπορούσαμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι μια προσέγγιση ενός διαταθμικού συστήματος θα ήταν **ένα απλό άτομο** (και τι απλούστερο από το άτομο του υδρογόνου) όπου θα περιοριστούμε, επί παραδείγματι, στις κατώτερες δύο στάθμες.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου μπορούμε να έχουμε διακριτό ενεργειακό φάσμα εντός στερεών. Αυτό συμβαίνει όταν υπάρχουν διαταραχές στην "τακτικότητα" ενός στερεού (στην περιοδικότητα εφ' όσον επρόκειτο για περιοδικό κρύσταλλο) είτε λόγω προσμίξεων, ατελειών κ.ο.κ. είτε οικειοθελώς, εκ κατασκευής, όπως π.χ. στις ετεροδομές<sup>4</sup>. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι για την πρώτη περίπτωση τα **κέντρα χρώματος** (color centers) και για τη δεύτερη περίπτωση οι **κβαντικές τελείες** (quantum dots), οι οποίες πολλές φορές αναφέρονται και ως **νανοσωματίδια** (nanoparticles) αφού είναι σωματίδια μεγέθους της τάξεως των μερικών νανομέτρων. Επομένως, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως μια προσέγγιση διαταθμικού συστήματος **μία κβαντική τελεία ή ένα κέντρο χρώματος** όπου θα περιοριστούμε, επί παραδείγματι, στις κατώτερες δύο στάθμες.

<sup>4</sup>Ετεροδομές (heterostructures): δομές που αποτελούνται από διαφορετικά υλικά, οπότε υπάρχει μόνο κατά τμήματα τακτικότητα ή εφ' όσον επρόκειτο για περιοδικούς κρυστάλλους, περιοδικότητα. Αυτές οι αλλαγές στην τακτικότητα ή περιοδικότητα αναφέρονται συνήθως σε τάξη μεγέθους, πολύ χονδρικής, 1 nm - 1000 nm.



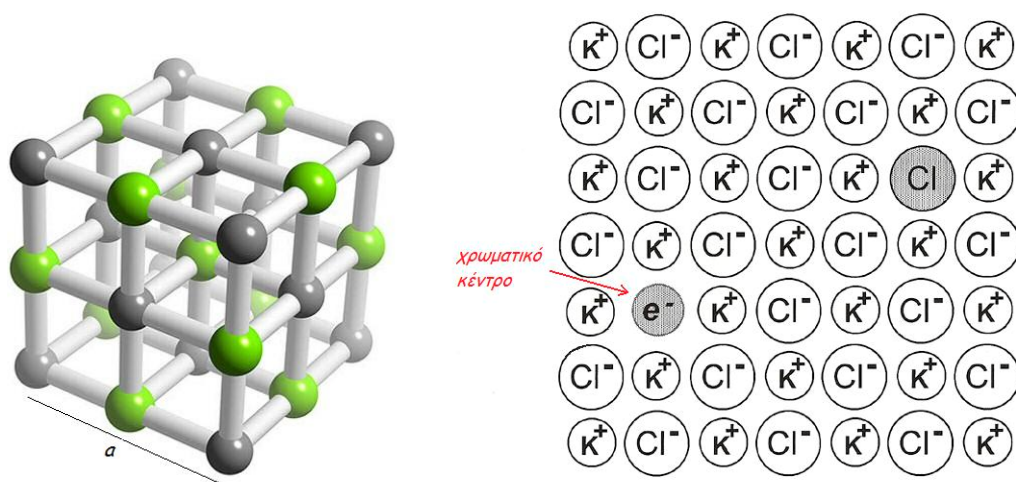
### 2.4.1 Κέντρα χρώματος.

Ένας ιδανικός κρύσταλλος <sup>5</sup> εκτείνεται στο άπειρο. Κατά τα γνωστά, όπως στερεό = πλέγμα + βάση, έτσι και κρύσταλλος = κρυσταλλικό πλέγμα + βάση. Το κρυσταλλικό πλέγμα, ένα σύνολο μαθηματικών σημείων με περιοδικότητα στο χώρο, δημιουργείται παίρνοντας σε γραμμικό συνδυασμό αέριες φορές τα θεμελιώδη διανύσματα του πλέγματος. Τοποθετώντας σε κάθε κρυσταλλικό πλεγματοειδίον σημείο που προκύπτει τη βάση (ένα σύνολο ατόμων, μορίων, ιόντων κλπ με ορισμένο προσανατολισμό) έχουμε τον κρύσταλλο. Ένας μονοκρύσταλλος είναι η καλύτερη πραγματική προσέγγιση ενός ιδανικού κρυστάλλου, διαφέρει από αυτόν στο ότι η περιοδικότητα τερματίζεται μοιραία στις επιφάνειες του κρυστάλλου. Αλλά ακόμα και σε ένα τέτοιο κρύσταλλο, υπάρχουν αποκλίσεις από την περιοδικότητα. Κάθε απόκλιση από την τέλεια περιοδική δομή είναι μια **ατέλεια** (defect). Συνηθισμένες ατέλειες είναι οι προσμίξεις, οι κενές θέσεις, τα επιπλέον άτομα σε μεσοπλεγματοειδικές θέσεις κ.ά.. Στην περίπτωση ξένων ατόμων αυτά ονομάζονται **προσμίξεις** (impurities) και ο κρύσταλλος μέσα στον οποίο βρίσκονται **φιλοξενών κρύσταλλος** (host crystal). Οι ιδιότητες του υλικού εξαρτώνται από τον φιλοξενούντα κρύσταλλο και από τις ατέλειες.

Εδώ θα ασχοληθούμε με ένα είδος ατέλειας, **το κέντρο χρώματος ή χρωματικό κέντρο** [color-center, F-center (από τη γερμανική λέξη farbe = χρώμα)], μια ατέλεια που απορροφά φως. Οι ατέλειες αυτές έχουν πάρει το όνομα τους από το χαρακτηριστικό χρωματισμό που δίδουν στους κρυστάλλους των αλογονούχων αλκαλίων (alkaline halides). Κάθε ανωμαλία της κρυσταλλικής δομής, που σχετίζεται με την “παγίδευση” ενός ηλεκτρονίου μπορεί να χαρακτηριστεί ως χρωματικό κέντρο αν απορροφά περίπου στην περιοχή του ορατού φάσματος. Τα χρωματικά κέντρα μπορούν να σχηματιστούν εύκολα σε ιοντικούς κρυστάλλους αλογονούχων αλκαλίων (π.χ. KCl) με τη βοήθεια ιονίζουσας ακτινοβολίας, όπως οι ακτίνες X [π.χ. από ένα περιθλασίμετρο σκόνης (powder diffractometer) ή ένα σύγχροτρον (synchrotron)]. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί κι ένα πηνίο Τέσλα (Tesla coil). Κατάλληλη πηγή ιονίζουσας ακτινοβολίας θα μπορούσε να είναι και μια ισχυρή πηγή ακτίνων γ όπως π.χ. το <sup>60</sup>Co. Η ιονίζουσα ακτινοβολία προκαλεί απελευθέρωση ηλεκτρονίων από κάποια ανιόντα αλογόνου (π.χ. Cl<sup>-</sup>). Το “ελεύθερο” πια ηλεκτρόνιο περιπλανάται στον κρύσταλλο και τελικά παγιδεύεται σε μια θέση όπου λείπει κάποιο ανιόν αλογόνου, όπου υπάρχει δηλαδή ένα **κενό** (vacancy) ανιόντος. Σε ένα κρύσταλλο KCl ένα κενό Cl<sup>-</sup> έχει 6 κατιόντα K<sup>+</sup> ως πρώτους γείτονες (Σχήμα 2.7 αριστερά). Σε πολύ

<sup>5</sup>Εδώ όταν γράφουμε “κρύσταλλος” εννοούμε “περιοδικός κρύσταλλος”. Υπάρχουν και οιονεί κρύσταλλοι κ.ά..

απλοϊκή προσέγγιση η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου στο κέντρο του χρωματικού κέντρου είναι  $\approx -\frac{6e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} < 0$ ,  $r = a/2$  είναι η απόσταση ανιόντος - γειτονικού κατιόντος,  $a$  η **πλεγματική σταθερά** (lattice constant) ή **πλεγματική παράμετρος** (lattice parameter) και  $\epsilon$  η διηλεκτρική σταθερά. Ένα απλό πρότυπο για αυτή την κατάσταση είναι ένα σωματίδιο σε τριδιάστατο φρέαρ δυναμικής ενέργειας, επειδή υπάρχει παγίδευση και στις τρεις διαστάσεις. Μια επίπεδη αναπαράσταση ενός χρωματικού κέντρου σε κρύσταλλο KCl φαίνεται στο Σχήμα 2.7 δεξιά. Εκτός από τα κέντρα περισσειας ηλεκτρονίου (electron center), μπορεί να έχουμε κέντρα οπών (hole centers), κέντρα προσμίξεων (impurity centers) κ.ά..



Σχήμα 2.7: (Αριστερά) Κρύσταλλος χλωριούχου καλίου (KCl). Η δομή μπορεί να περιγραφεί με ένα εδροκεντρωμένο κυβικό πλέγμα [fcc, face-centered cubic] με διατομική βάση (ζεύγος κατιόντος - ανιόντος), π.χ. σε κάθε πλεγματικό σημείο τοποθετείται (i) ένα κατιόν ακριβώς στο πλεγματικό σημείο και (ii) ένα ανιόν σε σημείο που απέχει απόσταση  $(a/2)(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$ , όπου  $a$  είναι η πλεγματική σταθερά. Για παράδειγμα στο πλεγματικό σημείο στην αρχή των αξόνων (στο 0) έχουμε ένα κατιόν και το αντίστοιχο ανιόν βρίσκεται στο κέντρο της συμβατικής κυβικής κυψελίδας. Κάθε π.χ. κενό ανιόντος χλωρίου έχει 6 κατιόντα καλίου ως πρώτους γείτονες. (Δεξιά) Επίπεδη αναπαράσταση. Χρωματικό κέντρο με παγιδευμένο ηλεκτρόνιο σε ένα κενό  $Cl^-$ . Το ηλεκτρόνιο έχει φύγει από ένα ανιόν  $Cl^-$  π.χ. λόγω ακτινοβολήσεως. Η κατανομή της κυματοσυναρτήσεως του ηλεκτρονίου καθορίζεται από τη μορφή του τριδιάστατου κβαντικού φρέατος που δημιουργείται στην άδεια θέση.

Το χρώμα εξαρτάται από το μέγεθος του κενού δηλαδή εν τέλει, από το είδος ατόμου αλογόνου που λείπει, διότι όσο στενότερο είναι το φρέαρ, τόσο περισσότερο απέχουν οι επιτρεπόμενες εντός του καταστάσεις, όσο φαρδύτερο είναι τόσο αυτές πλησιάζουν. Σε μια πολύ αδρή προσέγγιση για το κέντρο χρώματος, ας θυμηθούμε

το απειρόβαθιο φρέαρ. Σε ένα μονοδιάστατο -κατά μήκος του άξονα  $x$ - απειρόβαθιο πηγάδι δυναμικής ενέργειας, εύρους  $L$ , με δυναμική ενέργεια

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.13)$$

το διακριτό του ενεργειακό φάσμα είναι

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}, \quad (2.14)$$

όπου  $n = 1, 2, 3, \dots$  και  $m$  είναι η μάζα του σωματιδίου, εν προκειμένω του ηλεκτρονίου. Επειδή η κίνηση του ηλεκτρονίου δεν γίνεται στον ελεύθερο χώρο αλλά εντός κάποιου κρυστάλλου, η μάζα  $m$  θα πρέπει να αντικατασταθεί με τη λεγόμενη ενεργό μάζα  $m^*$ . Συνεπώς

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m^* L^2}. \quad (2.15)$$

Άρα η απόσταση μεταξύ διαδοχικών σταθμών είναι

$$E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* L^2} (2n + 1) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

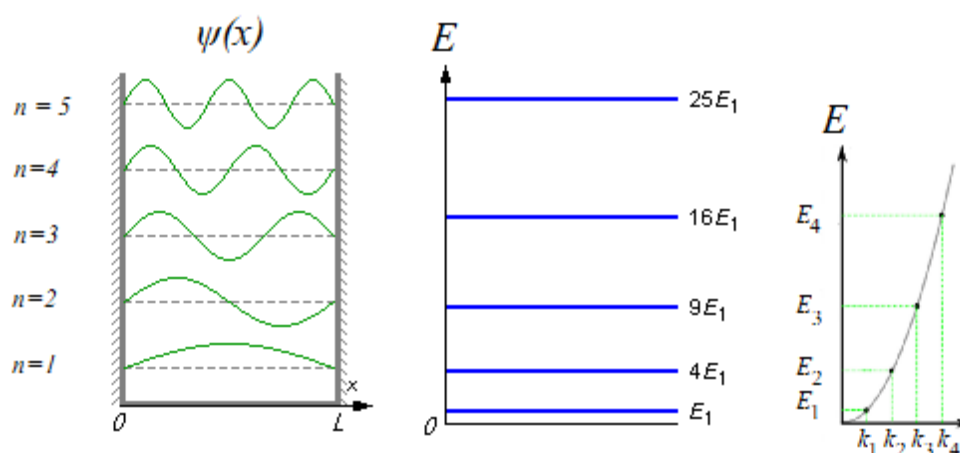
δηλαδή αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου του εύρους του φρέατος. Ας θυμηθούμε ακόμη ότι η κυματοσυνάρτηση για τη στάθμη  $n$  είναι

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & 0 < x < L \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.17)$$

και επομένως η αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί το σωματίδιο στη θέση  $x$  είναι

$$P_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & 0 < x < L \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.18)$$

Στα κέντρα χρώματος, ο χρωματισμός οφείλεται στην **απορρόφηση** (absorption) ενός φωτονίου από το παγιδευμένο ηλεκτρόνιο και στη συνακόλουθη **διέγερσή** του (excitation) από τη **θεμελιώδη κατάσταση** (ground state) σε μια **διεγερμένη κατάσταση** (excited state). Αυτές οι ενεργειακές διαφορές δίνονται από την

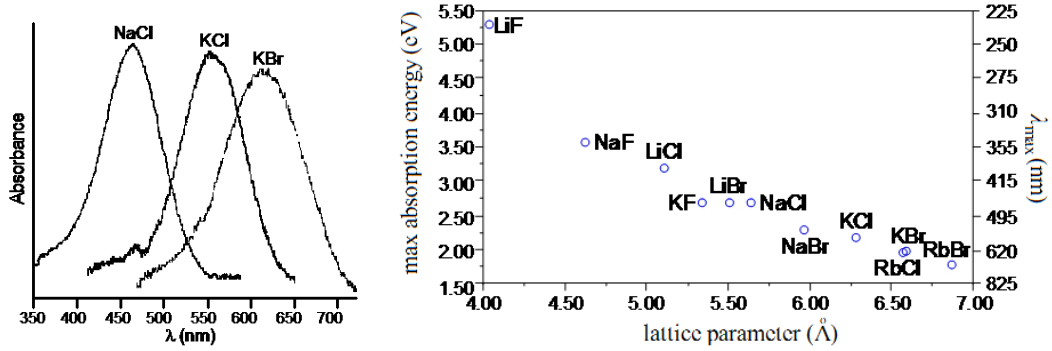


Σχήμα 2.8: Ιδιοσυναρτήσεις, ιδιοενέργειες και ενεργειακή διασπορά ( $k_n = n\pi/L, n = 1, 2, 3, \dots$ ) του σωματιδίου στο απλοϊκό πρότυπο απειρόβαθου φρέατος. Στην εικόνα της ενεργειακής διασποράς η γκριζα συνεχής γραμμή αντιπροσωπεύει ένα σωματίδιο που κινείται ελεύθερα μέσα στον κρύσταλλο. Στο δεσμευμένο σωματίδιο, όμως, επιτρέπονται μόνο συγκεκριμένες ενέργειες (διακριτές ενεργειακές καταστάσεις).

Εξ. 2.16. Συνεπώς, με τη βοήθεια αυτού του απλοϊκού 1D προτύπου προβλέπουμε ότι **αύξηση (μείωση) του  $L$  οδηγεί σε απορρόφηση φωτονίων μικρότερης (μεγαλύτερης) ενέργειας. Δηλαδή το φάσμα μετατοπίζεται προς το ερυθρό (μπλέ)** [redshift (blueshift)].

Σε τρεις διαστάσεις το πρόβλημα είναι κάπως πολυπλοκότερο. Όμως, αύξηση της πλεγματικής σταθεράς  $a$  αυξάνει το χώρο γύρω από το κενό όπου δημιουργείται το κέντρο χρώματος. Αν θεωρήσουμε, εύλογα, ότι  $L \propto a$ , τότε, όπως φαίνεται από τις παραπάνω εξισώσεις, το φάσμα απορροφήσεως μετατοπίζεται σε χαμηλότερες ενέργειες, δηλαδή σε μεγαλύτερα μήκη κύματος. Για παράδειγμα επειδή  $a_{\text{NaCl}} < a_{\text{KCl}} < a_{\text{KBr}}$ , τα φάσματα απορροφήσεώς τους έχουν τη σειρά που φαίνεται στο Σχήμα 2.9 αριστερά. Στο Σχήμα 2.9 δεξιά παρουσιάζεται η εξάρτηση της κορυφής του φάσματος απορροφήσεως από την πλεγματική παράμετρο ή πλεγματική σταθερά,  $a$ , σε κρυστάλλους αλογονούχων αλκαλίων.

Έχουν προταθεί αρκετά θεωρητικά πρότυπα για να ερμηνευθούν οι οπτικές ιδιότητες των χρωματικών κέντρων [24]. Όλα θεωρούν ότι στην περιοχή του κενού η δυναμική ενέργεια παρίσταται με ένα τριών διαστάσεων φρέαρ, που είναι υπεύθυνο για τη δέσμευση του ηλεκτρονίου, οδηγώντας έτσι σε σημαντικές αλλαγές στις οπτικές ιδιότητες π.χ. την απορρόφηση ή εκπομπή. Παρακάτω θα περιγράψουμε ένα απλοϊκό πρότυπο τριδιάστατου απειρόβαθου φρέατος. Θεωρούμε, ότι το



Σχήμα 2.9: (Αριστερά) Φάσματα απορροφήσεως χρωματικών κέντρων, που ελήφθησαν στον αέρα, σε 298 K, στο υπεριώδες - ορατό, από κρυστάλλους NaCl, KCl, KBr, που ακτινοβολήθηκαν με πηνίο Tesla [23]. Το χρώμα εξαρτάται από το μέγεθος του χώρου που αφήνει η ατέλεια, άρα από την πλεγματική παράμετρο ή πλεγματική σταθερά,  $a$ . Η κορυφή του φάσματος απορροφήσεως είναι έτσι μετατοπισμένη επειδή  $a_{\text{NaCl}} < a_{\text{KCl}} < a_{\text{KBr}}$ . (Δεξιά) Εξάρτηση της κορυφής το φάσματος απορροφήσεως από την  $a$  σε κρυστάλλους αλογονούχων αλκαλίων [23]. Αύξηση της  $a$  δημιουργεί μεγαλύτερα κενά όταν λείπει κάποιο ιόν, επομένως ευρύτερο φρέαρ δυναμικής ενέργειας και άρα μικραίνει η ενεργειακή απόσταση θεμελιώδους - 1ης διεγερμένης στάθμης και επομένως μικραίνει η ενέργεια (αυξάνεται το μήκος κύματος) του φωτονίου που αντιστοιχεί στη μετάβαση.

χρωματικό κέντρο σε ένα κρύσταλλο αλογονούχου αλκαλίου είναι ένα τριδιάστατο απειρόβαθο φρέαρ δυναμικής ενέργειας κατά τους άξονες  $x, y, z$ , αντιστοίχως  $V_1(x), V_2(y), V_3(z)$  ούτως ώστε

$$V(\vec{r}) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z), \quad (2.19)$$

όπου όλα τα  $V_i$  είναι φρέατα απείρου βάθους. Θεωρούμε ακόμη ότι το πλάτος του φρέατος σε κάθε άξονα  $L_i$  πρέπει να είναι της τάξεως της πλεγματικής σταθεράς  $a$ . Ας εξετάσουμε την ενέργεια των φωτονίων που αντιστοιχούν στη μετάβαση από τη θεμελιώδη κατάσταση στην 1η διεγερμένη κατάσταση π.χ. για τους κρυστάλλους LiF, NaCl. Λόγω της μορφής της δυναμικής ενέργειας οι μεταβλητές χωρίζονται και τελικώς το ενεργειακό φάσμα ενός τέτοιου απειρόβαθου φρέατος είναι

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n_1^2}{2m_1^* L_x^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_2^2}{2m_2^* L_y^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_3^2}{2m_3^* L_z^2} \quad (2.20)$$

και αν υποθέσαμε ότι  $L_x = L_y = L_z = L$  και  $m_1^* = m_2^* = m_3^* = m^*$ , τότε

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* L^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad (2.21)$$

Άρα η θεμελιώδης στάθμη ( $\Theta\Sigma$ ,  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ ) και η 1η διεγερμένη στάθμη ( $1\eta\Delta\Sigma$ , ένα εκ των  $n_i$  ίσο με 2 και τα άλλα δύο ίσα με 1) έχουν, αντιστοίχως, ιδιοενέργεια

$$\left. \begin{aligned} E_{\Theta\Sigma} &= \frac{3\hbar^2\pi^2}{2m^*L^2} \\ E_{1\eta\Delta\Sigma} &= \frac{6\hbar^2\pi^2}{2m^*L^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Άρα η ενέργεια φωτονίου που π.χ. απορροφάται ώστε το ηλεκτρόνιο να ανέβει από τη  $\Theta\Sigma$  στην  $1\eta\Delta\Sigma$  είναι

$$h\nu = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2m^*L^2} \quad (2.23)$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι  $L = \frac{a}{2}$

$$h\nu = \frac{6\hbar^2\pi^2}{m^*a^2} \quad (2.24)$$

Στο NaCl όπου  $a \approx 0.565$  nm,  $m^* \approx 1.13m_e$  προκύπτει  $h\nu \approx 12.498$  eV. Ενώ αν χρησιμοποιούσαμε  $L = a$  θα βρίσκαμε

$$h\nu = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2m^*a^2} \quad (2.25)$$

οπότε προκύπτει  $h\nu \approx 3.1245$  eV. Η πειραματική τιμή για το μέγιστο της απορροφήσεως στο NaCl είναι  $h\nu_{\text{πειρ}} \approx 2.7$  eV, δηλαδή η απόκλιση από την πειραματική τιμή της προβλέψεως του απλοϊκού μας προτύπου είναι  $\approx 16\%$ , δηλαδή όχι και πολύ μακριά. Τα 2.7 eV αντιστοιχούν σε  $\lambda \approx 460$  nm, δηλαδή στο μπλε-γαλανό. Είναι προφανές ότι όλα αυτά είναι πολύ προσεγγιστικά. Αλλά παρά τους αριθμητικούς παράγοντες, προκύπτει

$$h\nu \propto \frac{1}{a^2} \quad (2.26)$$

οπότε το  $h\nu$  μικραίνει όταν το  $a$  αυξάνει. Δηλαδή εξηγείται ποιοτικώς η συμπεριφορά της Εικόνας 2.9. Για το LiF η ενεργός μάζα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι, σε μια ιδιαίτερη προσέγγιση (Εξίσωση 2.72 της αναφοράς [24]),  $m^* = 1.51m_e \approx 1.5m_e$ . Οπότε, από την Εξ. 2.25, για το LiF έχουμε  $h\nu \approx 4.62$  eV, που αποκλίνει από την πειραματική τιμή μόνο κατά 12%. Από την άλλη, βέβαια, η τιμή της ενεργού μάζας μπορεί να είναι κάπως διαφορετική π.χ. κατά την αναφορά [25] στο LiF  $m^* \approx m_e$ . Δεν έχει νόημα να προσπαθούμε να ταιριάξουμε ακριβώς το απλοϊκό μας θεωρητικό πρότυπο με το πείραμα, παίζοντας με την τιμή της ενεργού μάζας. Θα αρκεστούμε στο

ότι κάτι τόσο απλό μπορεί να έρθει σχετικά κοντά στο πείραμα, προβλέποντας μάλιστα την εξάρτηση περίπου από το  $a^{-2}$ . Αυτό το πρότυπο που αβίαστα μαντέψαμε εδώ έχει περίπου σε αυτή τη μορφή πράγματι χρησιμοποιηθεί για τα χρωματικά κέντρα [24] με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, στη μορφή

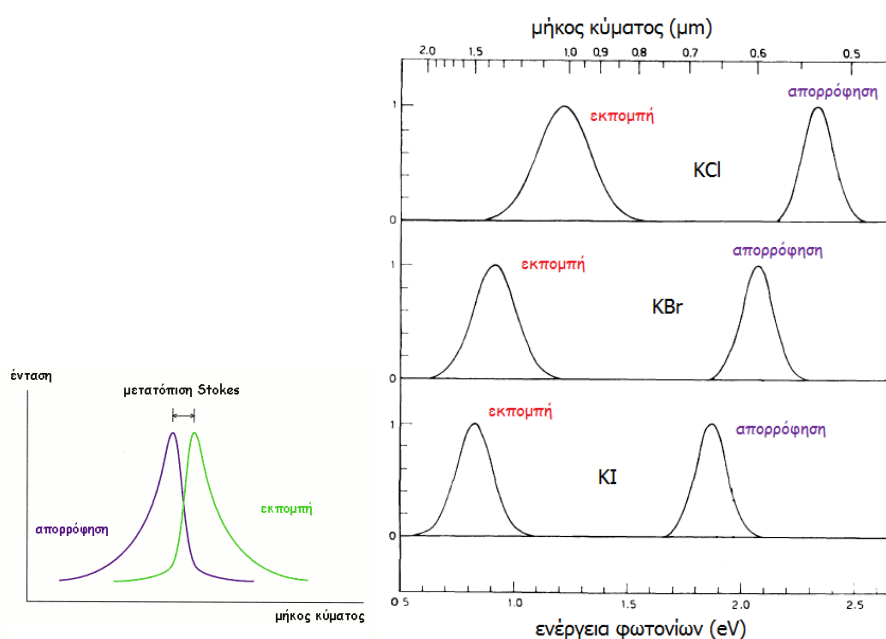
$$h\nu \approx \frac{0.97}{(a \text{ σε nm})^{1.772}} \text{ eV} \quad (2.27)$$

μπορούμε να ταιριάξουμε ικανοποιητικά όλα τα πειραματικά δεδομένα των αλογονούχων αλκαλίων [24] (δείτε το Σχήμα 2.9).

Ίσως ένας προσεκτικός οφθαλμός θα έχει ήδη παρατηρήσει ότι ενώ μιλάμε για μεταβάσεις μεταξύ διακριτών σταθμών, **τα φάσματα του Σχήματος 2.9 δεν είναι γραμμικά αλλά, αντιθέτως, έχουν αρκετά μεγάλο εύρος.** Ο λόγος είναι ότι μέχρι στιγμής λάβαμε υπ' όψιν μόνο τις διακριτές στάθμες που προέρχονται από τον χωρικό εντοπισμό. Γενικώς, η διεύρυνση διακρίνεται σε **ομογενή διεύρυνση** (homogeneous broadening) και σε **ανομοιογενή διεύρυνση** (inhomogeneous broadening). Εάν το φυσικό αίτιο που προκαλεί τη διεύρυνση είναι το ίδιο για κάθε απορροφητή / εκπομπό (εν προκειμένω για κάθε δισταθμικό σύστημα) τότε αυτή καλείται ομογενής διεύρυνση, ενώ εάν είναι διαφορετικό τότε αυτή καλείται ανομοιογενής διεύρυνση. Ένα παράδειγμα ομογενούς διεύρυνσης είναι η σχετιζόμενη με το χρόνο ζωής της ενεργειακής στάθμης (lifetime broadening). Συγκεκριμένα, ο χρόνος ζωής μιας διεγερμένης καταστάσεως (π.χ. ο σχετιζόμενος με την Αυθόρμητη Εκπομπή) σχετίζεται με την αβεβαιότητα στην ενέργειά της. Μικρός χρόνος ζωής σημαίνει μεγάλη αβεβαιότητα στην ενέργεια και άρα ευρεία εκπομπή (broad emission). Αυτού του είδους η διεύρυνση δίνει Λορεντζιανή μορφή στο φάσμα (Lorentzian profile). Συνήθως, στην φυσική συμπυκνωμένης ύλης, η διακύμανση είναι διαφορετική για κάθε απορροφητή / εκπομπό. Ο λόγος είναι ότι σε ένα μεγάλο σύστημα όπως π.χ. σε ένα κρύσταλλο, το περιβάλλον κάθε απορροφητή / εκπομπού σπανίως είναι ταυτόσημο λόγω τυχαίας παρουσίας προσμίξεων, ατελειών, κ.ο.κ.. Η ανομοιογενής διεύρυνση συνήθως έχει Γκαουσιανή μορφή (Gaussian profile). Να σημειωθεί ακόμα ότι η διεύρυνση μπορεί να οφείλεται σε πολλά αίτια, οπότε και η μορφή της ποικίλει. Υπάρχουν κι άλλες πηγές που διαμορφώνουν το ενεργειακό φάσμα όπως οι ταλαντωτικοί βαθμοί ελευθερίας. Επίσης, π.χ. τα κέντρα χρώματος βρίσκονται εντός κάποιου στερεού, οπότε υπάρχει όλο το υπόβαθρό του.

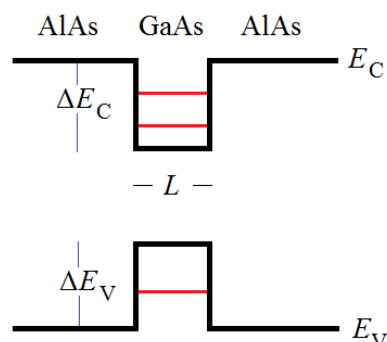
Στην πράξη, με απορρόφηση φωτονίου, το ηλεκτρόνιο μπορεί π.χ. να μεταβεί από τη  $\Theta\Sigma$  σε κάπως υψηλότερη από την  $1\eta\Delta\Sigma$  στάθμη και μετά να αφησυχάσει στην  $1\eta\Delta\Sigma$  εκπέμποντας ένα ή περισσότερα φωνόνια (κβάντα ταλαντώσεων πλέγματος) και στη συνέχεια να κατέβει στην  $\Theta\Sigma$  εκπέμποντας αυτή τη φορά φωτόνιο ενέργειας

ελαφρώς μικρότερης από την ενέργεια του αρχικώς απορροφημένου φωτονίου, κατά το ποσό της ενέργειας των φωνονίων του αφησυχασμού. **Μετατόπιση Stokes** (Stokes shift) είναι η διαφορά (μήκους κύματος ή συχνότητας ή ενέργειας) μεταξύ των θέσεων των μεγίστων των φασμάτων απορρόφησης και εκπομπής. Εάν το εκπεμπόμενο φωτόνιο έχει μικρότερη ενέργεια από το απορροφημένο φωτόνιο, αυτή η ενεργειακή διαφορά λέγεται μετατόπιση Stokes. Εάν το εκπεμπόμενο φωτόνιο έχει μεγαλύτερη ενέργεια, αυτή η ενεργειακή διαφορά λέγεται **μετατόπιση anti-Stokes** (anti-Stokes shift). Η διαφορές αυτές συνήθως οφείλονται στις πλεγματικές ταλαντώσεις (φωνόνια) [26].



Σχήμα 2.10: Μετατόπιση Stokes μεταξύ απορρόφησης και εκπομπής. Ένα απλό σχήμα (αριστερά) και μετατοπίσεις Stokes χρωματικών κέντρων  $KCl$ ,  $KBr$ ,  $KI$  (δεξιά), εικόνα προσαρμοσμένη από την αναφορά [27]. Σε συμφωνία με την αναφορά [28] στο  $KCl$  η μετατόπιση Stokes είναι  $\approx 1.1$  eV.





Σχήμα 2.11: Ένα τετραγωνικό, μη απειρόβαθο κβαντικό φρέαρ (quantum well) π.χ. σε μια ετεροδομή AlAs/GaAs/AlAs. Φαίνεται το εύρος του φρέατος (well width)  $L$ , το ελάχιστο της ζώνης αγωγιμότητας (bottom of conduction band)  $E_C$ , το μέγιστο της ζώνης σθένους (top of valence band)  $E_V$ , η ασυνέχεια μεταξύ των ζωνών αγωγιμότητας των δύο υλικών (conduction band offset)  $\Delta E_C$  και η ασυνέχεια μεταξύ των ζωνών σθένους των δύο υλικών (valence band offset)  $\Delta E_V$ . Τα φρέατα έχουν ζωγραφιστεί, πολύ σχηματικά, ως τετραγωνικά αλλά το σχήμα τους εξαρτάται από πολλούς παράγοντες που είναι αρκετά πέρα από το σκοπό του συγγράμματος.

## 2.4.2 Κβαντικές τελείες.

Ένα τυπικό τετραγωνικό, μη απειρόβαθο κβαντικό φρέαρ που σχηματίζεται σε μια ετεροδομή ημιαγωγών παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.11. Φαίνεται το εύρος του φρέατος  $L$ , το ελάχιστο της ζώνης αγωγιμότητας  $E_C$ , το μέγιστο της ζώνης σθένους  $E_V$ , η ασυνέχεια μεταξύ των ζωνών αγωγιμότητας των δύο υλικών  $\Delta E_C$  και η ασυνέχεια μεταξύ των ζωνών σθένους των δύο υλικών  $\Delta E_V$ . Ανάλογα με τα υλικά που απαρτίζουν την ετεροδομή, το κβαντικό φρέαρ έχει συνήθως  $\Delta E_C$  και  $\Delta E_V$  της τάξεως των 0.01-10 eV και  $L$  συνήθως της τάξεως των 0.1-100 nm. Μπορούμε να έχουμε κβαντικό περιορισμό σε 1 διάσταση (1Δ) οπότε χρησιμοποιούμε την έκφραση **quantum well** (κβαντικό φρέαρ ή πηγάδι), σε 2 διαστάσεις (2Δ) οπότε χρησιμοποιούμε την έκφραση **quantum wire** (κβαντικό σύρμα ή νήμα), σε 3 διαστάσεις (3Δ) οπότε χρησιμοποιούμε την έκφραση **quantum dot** (κβαντική τελεία ή κουκίδα). Οι κβαντικές τελείες ονομάζονται καμιά φορά και **τεχνητά άτομα** (artificial atoms) όταν είναι απλές ή **τεχνητά μόρια** (artificial molecules) εφ' όσον είναι συζευγμένες. Ένα τετραγωνικό μη απειρόβαθο 1Δ κβαντικό φρέαρ έχει τουλάχιστον μία δέσμια στάθμη [29]. Στο Σχήμα 2.11 έχουμε υποθέσει ότι το φρέαρ της ζώνης αγωγιμότητας έχει δύο στάθμες ενώ το φρέαρ της ζώνης

σθένους μία. Ένα κβαντικό φρέαρ εύρους  $L$  περιέχει [29]

$$n = 1 + \text{Int} \left[ \sqrt{\frac{2m^*V_bL^2}{\pi^2\hbar^2}} \right] \quad (2.28)$$

δέσμιες ενεργειακές καταστάσεις (“στάθμες”).  $\text{Int}(\xi)$  είναι το ακέραιο μέρος του  $\xi$ ,  $V_b$  είναι η ασυνέχεια της ζώνης αγωγιμότητας ( $\Delta E_C$ ) ή σθένους ( $\Delta E_V$ ) μεταξύ των δύο υλικών και  $m^*$  η ενεργός μάζα του ηλεκτρονίου ή της οπής. Οπότε σε μια κβαντική τελεία μπορούμε να εκλέξουμε ως δισταθμικό σύστημα είτε μία στάθμη της ζώνης αγωγιμότητας και μια στάθμη της ζώνης σθένους, είτε δύο στάθμες της ζώνης αγωγιμότητας, είτε δύο στάθμες της ζώνης σθένους. Στις τελευταίες δύο περιπτώσεις, εννοείται, υπάρχει ο περιορισμός της Εξ. 2.28, δηλαδή ενδέχεται να υπάρχει μόνο μία στάθμη στη ζώνη αγωγιμότητας ή στη ζώνη σθένους. Υπολογισμούς μπορεί να κάνει ο αναγνώστης - η αναγνώστρια στη σχετική άσκηση για κβαντικές τελείες.

## 2.5 Αναφορές 2ου Κεφαλαίου.

Η αρίθμηση αναφέρεται στη βιβλιογραφία όπως αυτή παρατίθεται συνολικά πριν από τα Παραρτήματα.

[13] A. Einstein, Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. Annalen der Physik 17 (1905) 132-148.

[14] G.N. Lewis, The conservation of photons, Nature 118 (1926) 874-875.

[19] A. Einstein, Zur Quantentheorie der Strahlung, Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich 16 (1916) 47-62; Physikalische Zeitschrift 18 (1917) 121-128.

[20] F. Mandl, Στατιστική φυσική, Εκδότης: Γ.Α. Πνευματικός, 2013, Μετάφραση: Α. Αγγελάκη - Γ. Θεοδώρου, ISBN: 9789607258564.

[21] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, E.A. Cornell, Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. Science 269 (1995) 198-201.

[22] Hertzsprung-Russel Diagram identifying many well known stars in the Milky Way galaxy. ESO - Hertzsprung-Russell Diagram. This photograph was produced by European Southern Observatory (ESO). Their website states: "All ESO still and motion pictures, with the exception of the ESO Logo, are released under the Creative Commons Attribution 4.0 International License, unless the credit byline indicates otherwise."

[23] A.B. Ellis, M.J. Geselbracht, B.J. Johnson, G.C. Lisensky, W.R. Robinson, Teaching General Chemistry: A Materials Science Companion, American Chemical Society Books, Washington D.C. (1993), ISBN: 084122725X.

[24] B. Henderson and G.F. Imbusch, Optical Spectroscopy of Inorganic Solids, Oxford Science Publications (2006), ISBN-13: 9780521804844, ISBN-10: 110740536X.

[25] V.V. Tirskaa and E.F. Martynovich, Intraband radioluminescence of LiF crystals, Optics and Spectroscopy 88 (2000) 533-537. Translated from Optika i Spektroskopiya 88 (2000) 593-597. Original Russian Text Copyright 2000 by Tirskaa, Martynovich.

[26] B. Henderson and K.P. O' Donnell, W.M. Yen (Ed.), Laser Spectroscopy of Solids II (Topics in Applied Physics), in Chapter 4: Laser spectroscopy of color centers, 65 (1989) 123. ISBN-10: 3662309297, ISBN-13: 978-3662309292.

[27] G. Baldacchini, U.M. Grassano, and A. Tanga, Magnetic circular dichroic effects in the luminescence of F centers in KI, KBr, and KCl, Physical Review B 16 (1977) 5570-5584.

[28] R. Rodríguez-Mijangos, R. Pérez-Salas, E. Muñtoz-Sandoval and M. Barboza-Flores, Stokes shift of the F center electronic transitions in mixed ionic crystals, Radiation Effects and Defects in Solids: Incorporating Plasma Science and Plasma Technology 138 (1996) 153-158 (Section B: Crystal lattice defects and amorphous materials).

[29] G. Bastard, Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures, Publisher: EDP Sciences, 1992, ISBN-10: 2868830927, ISBN-13: 978-2868830920.

# Κεφάλαιο 3

ΗΜΙΚΛΑΣΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ

ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ

ΗΜ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ - ΥΛΗΣ (ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ).



ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΚΛΑΣΙΚΑ

ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Π.Χ. ΑΤΟΜΟ: ΚΒΑΝΤΙΚΑ.

## 3.1 Ημικλασική αντιμετώπιση:

ΗΜ πεδίο: κλασικά

Δισταθμικό σύστημα: κβαντικά.

Ημικλασική αντιμετώπιση σημαίνει ότι ενώ το δισταθμικό σύστημα (π.χ. άτομο, κβαντική τελεία, κέντρο χρώματος κ.ά.) αντιμετωπίζεται κβαντικά ως ένα σύστημα ιδιοκαταστάσεων, αντιμετωπίζουμε κλασικά το ΗΜ πεδίο. Το ΗΜ πεδίο θεωρείται ως μια εξωτερική, χρονικώς μεταβαλλόμενη διαταραχή.

Ακόμα θεωρούμε την ΗΜ ακτινοβολία αρκετά πυκνή ούτως ώστε η απορρόφηση ή η εκπομπή ενός φωτονίου από το υπό μελέτη δισταθμικό σύστημα να μην μπορεί να επηρεάσει αισθητά τα πλάτη του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου του κύματος.

Αν μας ενδιαφέρει η διακύμανση της πυκνότητας της ΗΜ ακτινοβολίας θα πρέπει να εγκαταλείψουμε την ημικλασική προσέγγιση. Αυτό θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο όταν το σύνολο δισταθμικό σύστημα - ακτινοβολία μελετηθεί στην πλήρη κβαντική του μορφή. Δηλαδή στο Κεφάλαιο 4 θα αντιμετωπίσουμε κβαντικά και την ΗΜ ακτινοβολία.

### 3.2 Αδιατάρακτο σύστημα (δηλαδή χωρίς ΗΜ πεδίο).

Ας θεωρήσουμε τη Χαμιλτονιανή του ηλεκτρονίου στο αδιατάρακτο δισταθμικό σύστημα

$$\hat{H}_0 = \frac{\widehat{p}^2}{2m_e} + U(\vec{r}) \quad (3.1)$$

π.χ. στο άτομο του υδρογόνου η δυναμική ενέργεια (Coulomb)

$$U(\vec{r}) = (-e) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (3.2)$$

όπου  $e$  το στοιχειώδες φορτίο. Σε πολυηλεκτρονικό άτομο με ατομικό αριθμό  $Z$  η δυναμική ενέργεια (Coulomb)

$$U(\vec{r}) = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.3)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε τη θωρακισμένη (screened) μορφή της δυναμικής ενέργειας

$$U_S(\vec{r}) = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-k_0 r}. \quad (3.4)$$

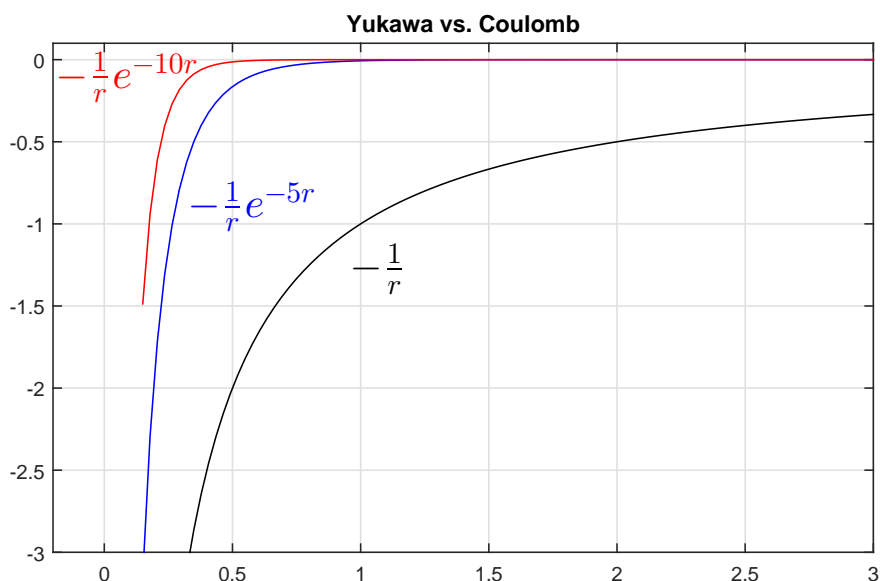
Γενικότερα, το δυναμικό Coulomb έχει τη μορφή

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{r}, \quad (3.5)$$

ενώ το θωρακισμένο δυναμικό Coulomb (screened Coulomb potential) έχει τη μορφή

$$V_S(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{r} e^{-k_0 r}, \quad (3.6)$$

όπου  $k_0$  είναι η ισχύς του παράγοντα αποσβέσεως (strength of the damping factor) ή αλλιώς κυματάνυσμα (wave vector) Thomas-Fermi. Το θωρακισμένο δυναμικό  $V_S(\vec{r})$  επονομάζεται και Thomas-Fermi δυναμικό ή Yukawa δυναμικό. Τα παραπάνω δυναμικά και δυναμικές ενέργειες εξαρτώνται τελικά από το  $r$  και όχι από το  $\vec{r}$  είναι δηλαδή κεντρικά δυναμικά και κεντρικές δυναμικές ενέργειες. Λόγω του παράγοντα  $e^{-k_0 r}$ , το δυναμικό Yukawa πέφτει πιο απότομα από το δυναμικό Coulomb, πράγμα που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Σύγκριση των δυναμικών ενεργειών Yukawa και Coulomb οι οποίες χάρην απλότητας θεωρούνται εδώ ως  $V_{Yukawa}(r) = -\frac{1}{r}e^{-k_0r}$  και  $V_{Coulomb}(r) = -\frac{1}{r}$  και τα  $r$  και  $k_0$  αδιάστατα. Η δυναμική ενέργεια Coulomb επιδρά σε μεγαλύτερες αποστάσεις ενώ η δυναμική ενέργεια Yukawa αποσβένεται γρηγορότερα, λόγω του παράγοντα  $e^{-k_0r}$ .

Ας θεωρήσουμε τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}_0 \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.7)$$

όπου  $\Psi(\vec{r}, t)$  είναι η κυματοσυνάρτηση του αδιατάραχτου ηλεκτρονίου. Περαιτέρω, ας υποθέσουμε χωρισμό μεταβλητών

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r})T(t). \quad (3.8)$$

$\frac{(3.7)}{(3.8)} \Rightarrow \Phi(\vec{r})i\hbar \frac{dT(t)}{dt} = T(t)\hat{H}_0\Phi(\vec{r}) \Rightarrow \frac{i\hbar}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{\hat{H}_0\Phi(\vec{r})}{\Phi(\vec{r})}$ , για  $T(t) \neq 0 \neq \Phi(\vec{r})$  [αν  $T(t) = 0$  ή  $\Phi(\vec{r}) = 0$ , η Εξ. 3.7 ικανοποιείται τετριμμένα]. Αλλά για να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση  $\forall t, \forall \vec{r}$  θα πρέπει

$$\frac{i\hbar}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{\hat{H}_0\Phi(\vec{r})}{\Phi(\vec{r})} = E \text{ (ΣΤΑΘΕΡΑ)} \quad (3.9)$$

αφού το ένα κομμάτι είναι συνάρτηση μόνο του  $t$  και το άλλο μόνο του  $\vec{r}$ . Συνεπώς,

(1)  $\hat{H}_0\Phi(\vec{r}) = E\Phi(\vec{r})$  άρα  $E$  είναι οι ιδιοτιμές της ενέργειας (εν γένει διακριτές, θα χαρακτηρίζονται από κάποιο “ συλλογικό αριθμό ”  $k$  δηλαδή  $\hat{H}_0\Phi_k(\vec{r}) = E_k\Phi_k(\vec{r})$ ) και

$$(2) \frac{dT}{T} = \frac{E dt}{i\hbar} \Rightarrow \ln T = -\frac{iEt}{\hbar} + c \Rightarrow T(t) = e^c e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \Rightarrow T(t) = \mathcal{N} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}.$$

Επομένως, συνοψίζοντας

$$\Psi_k(\vec{r}, t) = \mathcal{N} e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} \Phi_k(\vec{r}), \quad (3.10)$$

όπου  $\mathcal{N}$  είναι μια σταθερά κανονικοποίησης, και οι ιδιοκαταστάσεις του ΑΔΙΑΤΑΡΑΚΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ περιγράφονται από την

$$\hat{H}_0\Phi_k(\vec{r}) = E_k\Phi_k(\vec{r}), \quad (3.11)$$

όπου  $E_k$  είναι οι ιδιοενέργειες και  $\Phi_k(\vec{r})$  οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις. Ακόμα ορίζουμε

$$E_k := \hbar\Omega_k. \quad (3.12)$$

Ας απαιτήσουμε

$$\int |\Psi_k(\vec{r}, t)|^2 dV = 1 \Leftrightarrow |\mathcal{N}|^2 \int |\Phi_k(\vec{r})|^2 dV = 1. \quad (3.13)$$

Για αυτό είπαμε την  $\mathcal{N}$  σταθερά κανονικοποίησης, και υποθέσαμε τις  $\Phi_k(\vec{r})$  ορθοκανονικές.  $dV = d^3r$  είναι ο στοιχειώδης όγκος και  $k$  ένας συλλογικός κβαντικός αριθμός π.χ. στο άτομο υδρογόνου  $k = \{n, \ell, m_\ell\}$ . Στο άτομο του υδρογόνου, στην ιδιοσυνάρτηση  $\Phi_k(r, \theta, \phi)$  αντιστοιχεί η ιδιοενέργεια

$$E_k = \frac{-R_E}{n^2} = E_n, \quad (3.14)$$

όπου

$$R_E = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \simeq 13.6 \text{ eV} \quad (3.15)$$

είναι η ενέργεια Rydberg. Στο άτομο υδρογόνου προκύπτουν ίδιες ενέργειες με αυτές του προτύπου Bohr, δηλαδή

$$E_{n\ell m_\ell} = E_n = \frac{-R_E}{n^2}, \quad (3.16)$$

δηλαδή υπάρχει εκφυλισμός ως προς  $\ell$  και  $m_\ell$ . Αυτό αλλάζει σε πολυηλεκτρονικά άτομα όπου αίρεται ο εκφυλισμός ως προς  $\ell$ , δηλαδή

$$E_{nlm} = E_{nl}. \quad (3.17)$$

Σε μαγνητικό πεδίο αίρεται και ο εκφυλισμός ως προς  $m_\ell$ .

### Τύποι Ατομικού Προτύπου Bohr

$$E_n = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n}, \quad (3.18)$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \frac{n^2}{Z} = a_0 \frac{n^2}{Z} \quad (3.19)$$

όπου  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.529 \text{ \AA}$  είναι η ακτίνα Bohr. Οπότε

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} = -R_E \frac{Z^2}{n^2} \quad (3.20)$$

Για  $Z = 1$

$$E_1 = -R_E \approx -13.6 \text{ eV}, \quad r_1 = a_0 \approx 0.529 \text{ \AA}$$

$$E_2 = -3.4 \text{ eV}, \quad r_2 = 4r_1$$

$$E_3 = -1.51 \text{ eV}, \quad r_3 = 9r_1$$

Οι παραπάνω τύποι του προτύπου Bohr προκύπτουν ως γνωστόν από τις παραδοχές κυκλικής τροχιάς, κβάντωσης της στροφορμής ( $mvr = n\hbar$ ) και ταύτισεως της κεντρομόλου δυνάμεως με τη δύναμη Coulomb.



### 3.3 Διαταραγμένο σύστημα (δηλαδή εντός ΗΜ πεδίου).

Χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών.  
Διπολική Ροπή. Προσέγγιση Διπόλου.

Ας θεωρήσουμε τη Χαμιλτονιανή του ηλεκτρονίου στο διαταραγμένο δισταθμικό σύστημα, δηλαδή παρουσία ΗΜ πεδίου

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \quad (3.21)$$

και ας υποθέσουμε ότι η δυναμική ενέργεια της διαταραχής  $U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  είναι **μικρή** σε σχέση με την  $\hat{H}_0$ . Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.22)$$

με αρχική συνθήκη

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \Phi(\vec{r}) = \text{γνωστή.} \quad (3.23)$$

Υποθέτουμε ότι μπορούμε να αναπτύξουμε τόσο την  $\Psi(\vec{r}, 0) = \Phi(\vec{r})$  όσο και την  $\Psi(\vec{r}, t)$  συναρτήσει των ιδιοσυναρτήσεων του αδιατάραχτου προβλήματος  $\Phi_k(\vec{r})$ . Δηλαδή γράφουμε

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_k f_k \Phi_k(\vec{r}) \quad (3.24)$$

και

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) \quad (3.25)$$

οπότε

$$C_k(0) = f_k. \quad (3.26)$$

Από τις σχέσεις (3.21), (3.22), (3.25) προκύπτει

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) \right] = [\hat{H}_0 + U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)] \left[ \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) \right]. \quad (3.27)$$

Στο Παράρτημα Β.4 υπολογίζουμε τα δύο μέλη αυτής της εξίσωσης και εν τέλει καταλήγουμε στην

$$\dot{C}_{k'}(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_k C_k(t) e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k)t} U_{\mathcal{E}k'k}(t) \quad (3.28)$$

Δηλαδή καταλήγουμε σε ένα Γραμμικό Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων 1<sup>ης</sup> Τάξεως. Αν λύσουμε το Σύστημα (3.28) ουσιαστικά λύνουμε το πρόβλημα (3.21), (3.22). Σημειωτέον ότι κατά τη διαδικασία αυτή ονομάζουμε

$$U_{\varepsilon k'k}(t) = \int \Phi_{k'}^*(\vec{r}) U_{\varepsilon}(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r}) dV = \langle \Phi_{k'} | U_{\varepsilon}(\vec{r}, t) | \Phi_k \rangle \quad (3.29)$$

τα στοιχεία πίνακα της δυναμικής ενέργειας της διαταραχής. Η άνωθεν διαδικασία συνιστά τη λεγόμενη χρονικά εξαρτώμενη θεωρία διαταραχών. Παρακάτω θα την εφαρμόσουμε σε δισταθμικό σύστημα υπό την επίδραση μονοχρωματικού και πολωμένου ηλεκτρικού κύματος, δηλαδή η διαταραχή μας έχει αυτά τα χαρακτηριστικά.

Γενικά, για οιοδήποτε φυσικό μέγεθος  $M$ , ορίζουμε τα στοιχεία πίνακά του ως

$$M_{k'k} := \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \hat{M}(\vec{r}, -i\hbar\vec{\nabla}) \Phi_k(\vec{r}) = \langle \Phi_{k'} | \hat{M} | \Phi_k \rangle \quad (3.30)$$

Περισσότερα στο Παράρτημα Β'8.

Να σημειωθεί ότι επειδή  $\int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1 \Leftrightarrow \int \Psi^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) dV = 1$

$$\Rightarrow \int dV \sum_{k'} C_{k'}^*(t) e^{i\Omega_{k'}t} \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k'} \sum_k C_{k'}^*(t) C_k(t) e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k)t} \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \Phi_k(\vec{r}) = 1 \Rightarrow$$

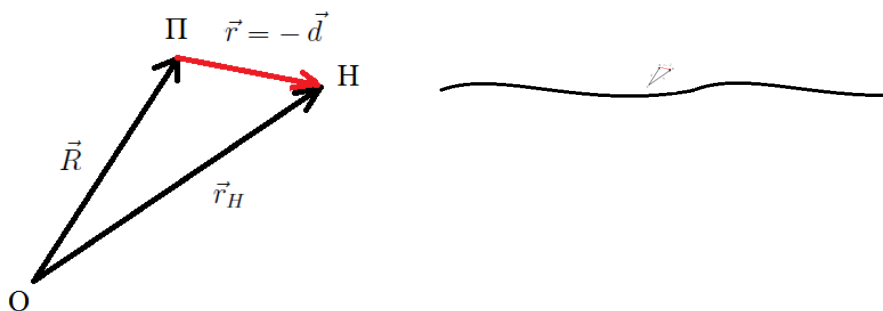
$$\boxed{\sum_k |C_k(t)|^2 = 1} \Rightarrow \sum_k |C_k(0)|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\sum_k |f_k|^2 = 1} \quad (3.31)$$

Έστω ηλεκτρικό δίπολο  $\Theta A$  ( $\Theta$ : θετικό,  $A$ : αρνητικό) με φορτίο  $q > 0$  στο  $\Theta$  και  $-q < 0$  στο  $A$ . Η ηλεκτρική διπολική ροπή ορίζεται ως

$$\vec{\mathcal{P}} := q\vec{d} \quad (3.32)$$

όπου  $\vec{d} = A\vec{\Theta}$ . Στο Σχήμα 3.2 θεωρούμε το άτομο του υδρογόνου, οπότε το ηλεκτρικό φορτίο στο  $\Pi \equiv \Theta$  είναι  $q = e > 0$ , ενώ στο  $H \equiv A$  είναι  $-q = -e < 0$ , και  $\vec{d} = A\vec{\Theta} = H\vec{\Pi}$ . Αν  $O$  είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων, ονομάζουμε  $\vec{r}_H$  το διάνυσμα θέσεως του ηλεκτρονίου ως προς  $O$ ,  $\vec{R}$  το διάνυσμα θέσεως του πυρήνα ως προς  $O$ , ενώ  $\vec{r} = \vec{\Pi H} = \vec{\Theta A}$  το διάνυσμα θέσεως του ηλεκτρονίου ως προς τον πυρήνα. Άρα  $\vec{d} = -\vec{r}$ , οπότε

$$\vec{\mathcal{P}} = q\vec{d} = e(-\vec{r}) = -e\vec{r} \quad (3.33)$$



Σχήμα 3.2: (Αριστερά) Αρχή αξόνων  $O$ , πυρήνας  $\Pi$ , ηλεκτρόνιο  $H$ . (Δεξιά) Πολύ σχηματικά: Στις παρούσες συνθήκες, με οπτικά μήκη κύματος, το ηλεκτρικό πεδίο είναι πρακτικά ομογενές. Αν π.χ.  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $\lambda/a_0 \approx 10^4$ .

Περιοριζόμαστε τώρα σε δυνάμεις που προέρχονται από το ηλεκτρικό πεδίο οδεύοντος μονοχρωματικού και πολωμένου ΗΜ κύματος

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_a \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r}_H - \omega t + \phi)]$$

όπου το  $\vec{\mathcal{E}}_a$  καθορίζει την πόλωση του κύματος και  $\omega = 2\pi\nu$  είναι η κυκλική συχνότητα,  $\nu$  είναι η συχνότητα.  $\vec{k}$  είναι το κυματόνυσμα με μέτρο  $k = 2\pi/\lambda$ , όπου  $\lambda$  είναι το μήκος κύματος.  $\phi$  είναι κάποια αυθαίρετη φάση. Όμως θα θεωρήσουμε ότι η

θέση του ηλεκτρονίου  $\vec{r}_H$  δεν διαφέρει σημαντικά από τη θέση του πυρήνα  $\vec{R}$  για την κλίμακα μεγέθους που μας αφορά εδώ. Δηλαδή  $\boxed{\vec{r}_H \simeq \vec{R}}$ . Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι ότι θεωρούμε οπτικά μήκη κύματος. Αν π.χ.  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , τότε, δεδομένου ότι το μέγεθος της “τροχιάς” του ηλεκτρονίου είναι της τάξεως της ακτίνας Bohr  $a_0 \simeq 0.529 \text{ \AA} = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m} \simeq 0.5 \cdot 10^{-1} \text{ nm}$ , προκύπτει

$$\frac{\lambda}{a_0} = \frac{500 \text{ nm}}{0.5 \cdot 10^{-1} \text{ nm}} = \frac{5 \cdot 10^2}{5 \cdot 10^{-2}} = 10^4 \Rightarrow \lambda \gg a_0 \sim |\vec{r}|$$

Δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι πρακτικά ομογενές. Δεν έχει πρακτικά χωρική εξάρτηση. Συνεπώς

$$\vec{\mathcal{E}} \approx \vec{\mathcal{E}}_a \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega t + \phi)] = \underbrace{\vec{\mathcal{E}}_a \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{R} + \phi)]}_{\vec{\mathcal{E}}_0} \exp(-i\omega t),$$

οπότε

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) = \vec{\mathcal{E}}(t)} \quad (3.34)$$

Δηλαδή συμπεριλάβαμε το  $\exp[i(\vec{k} \cdot \vec{R} + \phi)]$  στο πλάτος θεωρώντας ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει πρακτικά ΜΟΝΟ ΧΡΟΝΙΚΗ εξάρτηση.

Περαιτέρω, ας χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο  $V$  για το δυναμικό και το σύμβολο  $U$  για τη δυναμική ενέργεια. Μπορούμε να γράψουμε

$$\left. \begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= -\vec{\nabla} V \\ dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dV = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$$

$$V(\vec{r}, t) - \overset{\text{θέτουμε } 0}{V(\vec{0}, t)} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r}$$

Εννοείται ότι για να γίνει αυτό κατά την ολοκλήρωση υποθέσαμε ότι το  $\vec{\mathcal{E}}$  είναι ανεξάρτητο της θέσεως. Αν πολλαπλασιάσουμε με  $(-e)$  βρίσκουμε τη δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου λόγω της διαταραχής

$$U(\vec{r}, t) - \overset{\text{θέσαμε } 0}{U(\vec{0}, t)} = e\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r}$$

οπότε, εκ της Εξ. 3.33 προκύπτει

$$\boxed{U(\vec{r}, t) = e\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r} = -\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}}(t)} \quad (3.35)$$

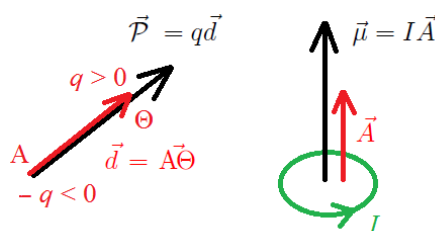
Το σύνολο των άνωθι υποθέσεων, οι οποίες οδήγησαν στη δυναμική ενέργεια διαταραχής της Εξ. 3.35, ονομάζεται **προσέγγιση διπόλου** (dipole approximation).

Ακολουθεί υπενθύμιση κάποιων αναλογιών μεταξύ ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου σχετικά με την ηλεκτρική διπολική ροπή (electric dipole moment) και τη μαγνητική διπολική ροπή (magnetic dipole moment), την ηλεκτρική και μαγνητική δυναμική ενέργεια διπόλου εντός πεδίου καθώς και τη (μηχανική) ροπή (torque).  $\vec{L}$  είναι η τροχιακή στροφορμή,  $\vec{S}$  η ιδιοστροφορμή και  $g$  ένας αδιάστατος παράγων.

### Υπενθύμιση Αναλογιών

$\vec{E}$  (Ηλεκτρικό Πεδίο)

$\vec{B}$  (Μαγνητικό Πεδίο)



Σχήμα 3.3: Ηλεκτρικό και μαγνητικό δίπολο.

$\vec{P} = q\vec{d}$  ηλεκτρική διπολική ροπή

$\vec{\mu} = I\vec{A}$  μαγνητική διπολική ροπή

$U_E = -\vec{P} \cdot \vec{E}$  δυναμική ενέργεια

[ή  $\vec{\mu} = \frac{q}{2m}(\vec{L} + g\vec{S})$  όπου  $m$  η μάζα του σωματιδίου]

$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E}$  (μηχανική) ροπή

$U_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  δυναμική ενέργεια

$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  (μηχανική) ροπή

$[\vec{P}] = \text{Cm}$

$[\vec{\mu}] = \text{Am}^2$

$[U_E] = \text{Cm} \frac{\text{N}}{\text{C}} = \text{Nm} = \text{J}$

$[U_B] = \text{Am}^2 \frac{\text{N}}{\text{Am}} = \text{Nm} = \text{J}$

$[\vec{\tau}] = \text{Cm} \frac{\text{N}}{\text{C}} = \text{Nm}$

$[\vec{\tau}] = \text{Am}^2 \frac{\text{N}}{\text{Am}} = \text{Nm}$

Σύμφωνα με το Σχήμα 3.2

$$\vec{P} := q\vec{d} = e(-\vec{r}) \Rightarrow \boxed{\vec{P} = -e\vec{r}} \quad (3.36)$$

$$\vec{P} \cdot \hat{z} = (-e)\vec{r} \cdot \hat{z} \Rightarrow \boxed{P_z = -ez} \quad (3.37)$$

Δείξαμε ότι για οπτικά μήκη κύματος μπορούμε να γράψουμε (Εξ. 3.34)

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) = \vec{\mathcal{E}}(t)$$

Θεωρώντας ότι η πόλωση είναι στην κατεύθυνση  $\hat{z}$  και παίρνοντας το πραγματικό μέρος της Εξ. 3.34 έχουμε

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 \hat{z} \cos \omega t$$

Άρα

$$U_{\mathcal{E}} = -\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}} = -(-e)\vec{r} \cdot \mathcal{E}_0 \hat{z} \cos \omega t \Rightarrow$$

$$U_{\mathcal{E}} = e\mathcal{E}_0 z \cos \omega t \quad (3.38)$$

Ας εστιάσουμε τώρα στα στοιχεία πίνακα της δυναμικής ενέργειας της διαταραχής

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r}) = \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) z \Phi_k(\vec{r}) e\mathcal{E}_0 \cos \omega t \Rightarrow$$

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) z \Phi_k(\vec{r}) \quad (3.39)$$

Ας ονομάσουμε και τα στοιχεία πίνακα της συντεταγμένης  $z$

$$z_{k'k} := \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) z \Phi_k(\vec{r}) \quad (3.40)$$

τα οποία έχουν τις ιδιότητες

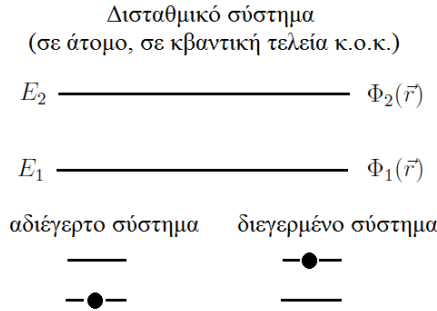
$$\begin{aligned} z_{k'k}^* &= z_{kk'} \\ z_{kk} &= \int dV \underbrace{|\Phi_k(\vec{r})|^2}_{\text{άρτια}} \underbrace{z}_{\text{περιττή}} = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Δηλαδή τα μη διαγώνια στοιχεία είναι συμμετρικά, ενώ τα διαγώνια στοιχεία μηδενίζονται. Η δεύτερη ιδιότητα οφείλεται στο ότι σε συστήματα όπως τα άτομα, τα χβαντικά φρέατα κ.ο.κ. οι ιδιοσυναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές. Οπότε, το τετράγωνο του μέτρου τους είναι άρτια συνάρτηση.

Εν τέλει, τα στοιχεία πίνακα της δυναμικής ενέργειας της διαταραχής μπορούν να γραφούν ως

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t z_{k'k} \quad (3.42)$$

Στο Σχήμα 3.4 παριστάνεται ένα δισταθμικό σύστημα. Αυτό μπορεί να αποτελείται από τις κατώτερες δύο στάθμες ενός ατόμου ή μιας κβαντικής τελείας κ.ο.κ.. Συνήθως διαλέγουμε τα φωτόνια του ΗΜ πεδίου να ταιριάζουν αρκετά ενεργειακά με την ενεργειακή διαφορά των δύο σταθμών, δηλαδή  $\hbar\omega = \hbar\nu \sim E_2 - E_1$ , χωρίς να είναι υποχρεωτικό να ταυτίζονται ακριβώς. Αυτή η υπόθεση θα μας χρειαστεί αργότερα στη Rotating Wave Approximation (Προσέγγιση Περιστρεφόμενου Κύματος). Στο δισταθμικό σύστημα ( $k = 1$  ή  $k = 2$ ) μπορούμε να γράψουμε



Σχήμα 3.4: Δισταθμικό σύστημα. Όταν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη  $E_1$  το σύστημα χαρακτηρίζεται αδιεγερτο, ενώ όταν βρίσκεται στην άνω στάθμη  $E_2$  διεγερμένο.

$$\begin{aligned} U_{E_{12}}(t) &= e\mathcal{E}_0 \cos \omega t z_{12} & U_{E_{12}}(t) &= -\mathcal{P}_{z_{12}} \mathcal{E}_0 \cos \omega t \\ U_{E_{21}}(t) &= e\mathcal{E}_0 \cos \omega t z_{21} & \text{ή} & U_{E_{21}}(t) = -\mathcal{P}_{z_{21}} \mathcal{E}_0 \cos \omega t \\ U_{E_{kk}}(t) &= e\mathcal{E}_0 \cos \omega t z_{kk} = 0 & U_{E_{kk}}(t) &= 0 \end{aligned}$$

Η 2η στήλη εξάγεται από την 1η επειδή  $\vec{\mathcal{P}} = -e\vec{r} \Rightarrow \mathcal{P}_z = -ez$ , οπότε τα αντίστοιχα στοιχεία πίνακα είναι  $\mathcal{P}_{z_{k'k}} = -ez_{k'k}$ . Άρα η 3.42 γίνεται

$$\boxed{U_{E_{k'k}}(t) = -\mathcal{P}_{z_{k'k}} \mathcal{E}_0 \cos \omega t} \quad (3.43)$$

Εάν οι ιδιοσυναρτήσεις μας είναι πραγματικές, τότε στο δισταθμικό μας σύστημα

$$\boxed{\mathcal{P}_{z_{12}} = -ez_{12} = -ez_{21} = \mathcal{P}_{z_{21}} := \mathcal{P}_z := \mathcal{P}} \quad (3.44)$$

και αυτό το  $\mathcal{P}$  χρησιμοποιούμε στην επόμενη Ενότητα. Οπότε

$$\begin{aligned} U_{E_{12}}(t) &= -\mathcal{P} \mathcal{E}_0 \cos \omega t \\ U_{E_{21}}(t) &= -\mathcal{P} \mathcal{E}_0 \cos \omega t \\ U_{E_{kk}}(t) &= 0, \quad k = 1 \text{ ή } k = 2 \end{aligned}$$

Οπότε, η 3.43 γίνεται

$$\boxed{\begin{array}{ll} U_{\varepsilon k'k}(t) = -\mathcal{P} \varepsilon_0 \cos \omega t & k \neq k' \\ U_{\varepsilon k'k}(t) = 0 & k = k' \end{array}} \quad (3.45)$$

που σημαίνει ότι **το μέγεθος της διαταραχής είναι ανάλογο του  $\mathcal{P} \varepsilon_0$**  πράγμα που εκφράζεται από τη **συχνότητα Rabi**  $\Omega_R = \frac{\mathcal{P} \varepsilon_0}{\hbar}$ . Ο αποσυντονισμός (detuning) (δείτε την Εξ. 3.51) και η συχνότητα Rabi (δείτε την Εξ. 3.52) καθορίζουν το πλάτος και την περίοδο των ταλαντώσεων του δισταθμικού συστήματος, όπως θα φανεί παρακάτω.



### 3.4 Εξισώσεις που περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη δισταθμικού συστήματος. Συχνότητα Rabi. Προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος (RWA, Rotating Wave Approximation).

Είχαμε καταλήξει σε ένα Γραμμικό Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων 1<sup>ης</sup> Τάξεως (Εξ. 3.28), το οποίο αν λύσουμε, ουσιαστικά λύνουμε το πρόβλημα (3.21), (3.22). Η Εξ. 3.28 ήταν

$$\dot{C}_{k'}(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_k C_k(t) e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k)t} U_{\mathcal{E}k'k}(t)$$

Τώρα θα τη λύσουμε σε ένα δισταθμικό σύστημα. Ορίζουμε

$$\Omega := \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \quad (3.46)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την Εξ. 3.12. Θα χρησιμοποιήσουμε και την ταυτότητα  $\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ .

$$\begin{aligned} \boxed{k' = 1} \quad \dot{C}_1(t) &= -\frac{i}{\hbar} C_1(t) e^{i(\Omega_1 - \Omega_1)t} U_{\mathcal{E}11}(t) - \frac{i}{\hbar} C_2(t) e^{i(\Omega_1 - \Omega_2)t} U_{\mathcal{E}12}(t) \\ \dot{C}_1(t) &= -\frac{i}{\hbar} C_2(t) e^{-i\Omega t} (-\mathcal{E}_0) \mathcal{P} \cos \omega t = \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{\hbar} C_2(t) e^{-i\Omega t} \left\{ \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right\} \\ \boxed{\dot{C}_1(t)} &= \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \left[ e^{-i(\Omega - \omega)t} + e^{-i(\Omega + \omega)t} \right] C_2(t) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \boxed{k' = 2} \quad \dot{C}_2(t) &= -\frac{i}{\hbar} C_1(t) e^{i(\Omega_2 - \Omega_1)t} U_{\mathcal{E}21}(t) - \frac{i}{\hbar} C_2(t) e^{i(\Omega_2 - \Omega_2)t} U_{\mathcal{E}22}(t) \\ \dot{C}_2(t) &= -\frac{i}{\hbar} C_1(t) e^{i\Omega t} (-\mathcal{E}_0) \mathcal{P} \cos \omega t = \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{\hbar} C_1(t) e^{i\Omega t} \left\{ \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right\} \\ \boxed{\dot{C}_2(t)} &= \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \left[ e^{i(\Omega + \omega)t} + e^{i(\Omega - \omega)t} \right] C_1(t) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Δηλαδή έχουμε τις ακόλουθες δύο εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη του δισταθμικού συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= C_2(t) \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \left[ e^{-i(\Omega-\omega)t} + e^{-i(\Omega+\omega)t} \right] \quad (0 \text{ RWA}) \\ \dot{C}_2(t) &= C_1(t) \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} \left[ e^{i(\Omega+\omega)t} + e^{i(\Omega-\omega)t} \right] \quad (0 \text{ RWA}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι τα φωτόνια του ΗΜ πεδίου ταιριάζουν αρκετά ενεργειακά με την ενεργειακή διαφορά των δύο σταθμών, χωρίς να είναι υποχρεωτικό να ταυτίζονται ακριβώς, δηλαδή  $\hbar\omega \sim E_2 - E_1$  συνεπάγεται ότι  $\omega \sim \Omega_2 - \Omega_1 = \Omega$ . Επομένως, οι όροι με  $(\Omega - \omega)$  μεταβάλλονται αργά ενώ οι όροι με  $(\Omega + \omega)$  μεταβάλλονται γρήγορα. Άρα σε οιαδήποτε αξιοσημείωτη χρονική κλίμακα, αυτές οι γρήγορες ταλαντώσεις θα έχουν κατά μέσο όρο μηδενική ή ας πούμε περίπου μηδενική επίδραση στο αποτέλεσμα. Η προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος (**rotating wave approximation, RWA**) είναι ο ισχυρισμός ότι μπορούμε να αγνοήσουμε αυτούς τους γρήγορους όρους. Άρα, μετά την RWA οι Εξισώσεις 3.49 γίνονται

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= C_2(t) \frac{i}{2} \underbrace{\frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{\hbar}}_{\Omega_R} e^{-i \underbrace{(\Omega - \omega)}_{-\Delta} t} \\ \dot{C}_2(t) &= C_1(t) \frac{i}{2} \underbrace{\frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{\hbar}}_{\Omega_R} e^{i \underbrace{(\Omega - \omega)}_{-\Delta} t} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ορίσαμε τον αποσυντονισμό (detuning) ως

$$\Delta := \omega - \Omega \quad (3.51)$$

και τη συχνότητα Rabi <sup>1</sup> ως

$$\Omega_R := \frac{\mathcal{P}\mathcal{E}_0}{\hbar} \quad (3.52)$$

<sup>1</sup>Από τον Isidor Isaak Rabi (1898-1988).

Εν συνεχεία, θα κάνουμε ένα μετασχηματισμό για να πάρουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές. Δηλαδή

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \mathbb{C}_1(t) e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} \\ C_2(t) &= \mathbb{C}_2(t) e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= \dot{\mathbb{C}}_1(t) e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} + \mathbb{C}_1(t) \left( \frac{-i(\Omega-\omega)}{2} \right) e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} \\ \dot{C}_2(t) &= \dot{\mathbb{C}}_2(t) e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} + \mathbb{C}_2(t) \left( \frac{i(\Omega-\omega)}{2} \right) e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} \end{aligned}$$

οπότε η (3.50) γίνεται

$$\begin{cases} \dot{\mathbb{C}}_1(t) e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} + \mathbb{C}_1(t) \left( \frac{-i(\Omega-\omega)}{2} \right) e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} = \mathbb{C}_2(t) e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} e^{-i(\Omega-\omega)t} \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} + \mathbb{C}_2(t) \left( \frac{i(\Omega-\omega)}{2} \right) e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} = \mathbb{C}_1(t) e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} e^{i(\Omega-\omega)t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbb{C}}_1(t) + \mathbb{C}_1(t) \left( \frac{-i(\Omega-\omega)}{2} \right) = \mathbb{C}_2(t) e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} e^{-i(\Omega-\omega)t} \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) + \mathbb{C}_2(t) \left( \frac{i(\Omega-\omega)}{2} \right) = \mathbb{C}_1(t) e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} \frac{i\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{2\hbar} e^{i(\Omega-\omega)t} \end{cases}$$

και έχοντας ορίσει  $\Delta := \omega - \Omega$  (Εξ. 3.51) και  $\Omega_R := \frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{P}}{\hbar}$  (Εξ. 3.52)

$$\begin{cases} \dot{\mathbb{C}}_1(t) = -\frac{i\Delta}{2} \mathbb{C}_1(t) + \frac{i\Omega_R}{2} \mathbb{C}_2(t) \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) = +\frac{i\Omega_R}{2} \mathbb{C}_1(t) + \frac{i\Delta}{2} \mathbb{C}_2(t) \end{cases}$$

οπότε καταλήγουμε σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{\mathbb{C}}_1(t) \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1(t) \\ \mathbb{C}_2(t) \end{bmatrix}} \quad (3.54)$$

Το άνω δεξιά στοιχείο μήτρας θα ήταν  $\frac{i\Omega_R^*}{2}$  εάν οι ιδιοσυναρτήσεις μας δεν ήταν πραγματικές οπότε τότε π.χ. θα ορίζαμε  $\mathcal{P}_{z21} = -ez_{21} := \mathcal{P}$ , οπότε  $\mathcal{P}_{z12} = -ez_{12} = \mathcal{P}_{z21}^* = \mathcal{P}^*$ .

Για να λύσουμε το σύστημα της Εξ. 3.54 εισάγουμε το διάνυσμα

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1(t) \\ \mathbb{C}_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

οπότε

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbb{C}}_1(t) \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

και ονομάζοντας

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} := -iA \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

το σύστημα της Εξ. 3.54 γράφεται

$$\boxed{\dot{\vec{x}}(t) = \tilde{A}\vec{x}(t)} \quad (3.58)$$

Ας δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής

$$\vec{x}(t) = \vec{v} e^{\tilde{\lambda}t} \quad (3.59)$$

οπότε

$$\vec{v} \tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda}t} = \tilde{A} \vec{v} e^{\tilde{\lambda}t} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \tilde{A}\vec{v} = \tilde{\lambda}\vec{v} \\ \tilde{\lambda} := -i\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow -iA\vec{v} = -i\lambda\vec{v} \Rightarrow \underbrace{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}_{\text{πρόβλημα ιδιοτιμών}}$$

Δηλαδή ουσιαστικά το όλο θέμα ανάγεται στο πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}} \quad (3.60)$$

από το οποίο θα προκύψουν τα κανονικοποιημένα ιδιοανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2$ . Έχοντας ελέγξει ότι τα κανονικοποιημένα ιδιοανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, η λύση του προβλήματός μας είναι

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^2 c_k \vec{v}_k e^{-i\lambda_k t}}$$

όπου βέβαια  $\tilde{\lambda}_k = -i\lambda_k$ . Από τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τα  $c_k$ . Πρώτα πρώτα, όμως, ας βρούμε τις ιδιοτιμές.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

όπου  $I$  ο μοναδιαίος  $2 \times 2$  πίνακας. Οπότε

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} - \lambda & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

στη γενική περίπτωση

$$\lambda_{2,1} = \pm \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}, \quad (3.61)$$

ενώ στην περίπτωση συντονισμού ( $\Delta = 0$ )

$$\lambda_{2,1} = \pm \frac{\Omega_R}{2}. \quad (3.62)$$

Στις επόμενες σελίδες θα βρούμε και τα ιδιοανύσματα καθώς και τη λύση του συστήματος 3.54 χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ , δηλαδή τοποθετώντας στην αρχή των χρόνων το ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη. Τότε, λόγω του μετασχηματισμού 3.53 συνάγεται ότι  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ .

ΛΥΣΗ για  $\Delta = 0$ . Οι πράξεις αναλυτικά παρατίθενται στο Παράρτημα Β'.5

Με  $\Delta = \omega - \Omega = 0$  και Αρχικές Συνθήκες  $C_1(0) = 1$ ,  $C_2(0) = 0$ , καταλήγουμε στην

$$\begin{cases} |C_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \\ |C_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \end{cases} \quad (3.63)$$

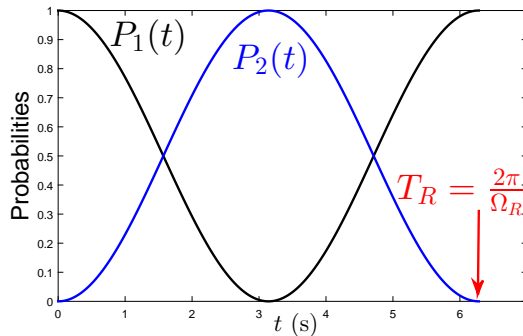
Φυσικά  $|C_k(t)|^2 := P_k(t)$  είναι η πιθανότητα να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο στη στάθμη  $k$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Η περίοδος των ταλαντώσεων είναι

$$T_R = \frac{2\pi}{\Omega_R} \quad (3.64)$$

Άρα, στο συντονισμό όπου  $\omega = \Omega \Leftrightarrow \Delta = 0$ , το πλάτος των ταλαντώσεων είναι

$$\star \quad \mathcal{A} = 1 \quad (3.65)$$

Στη γενικότερη περίπτωση, το πλάτος εξαρτάται από το detuning π.χ.  $\mathcal{A} = \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2 + \Omega_R^2}$ , όπως θα δούμε στις επόμενες σελίδες. Στο Σχήμα 3.5 παρουσιάζονται οι ταλαντώσεις δισταθμικού συστήματος σε συντονισμό.



Σχήμα 3.5: Ταλαντώσεις δισταθμικού συστήματος σε συντονισμό, δηλαδή με  $\omega = \Omega \Leftrightarrow \Delta = 0$ . Η περίοδος των ταλαντώσεων είναι  $T_R = \frac{2\pi}{\Omega_R}$ , ενώ το πλάτος τους  $\mathcal{A} = 1$ . Εντελώς τυπικά θέσαμε εδώ  $\Omega_R = 1 \text{ s}^{-1}$ , αλλά αυτή η τιμή δεν έχει σχέση με τις τιμές της  $\Omega_R$  σε πραγματικά συστήματα.

ΛΥΣΗ  $\gamma_{i\alpha} \Delta \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \lambda_{2,1} = \pm \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

$$\Gamma_{i\alpha} \quad \lambda_1 = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} := -\lambda < 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta}{2} v_{11} - \frac{\Omega_R}{2} v_{21} = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} v_{11} \Rightarrow \left( \frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \right) v_{11} = \frac{\Omega_R}{2} v_{21} \quad (1\eta)$$

$$-\frac{\Omega_R}{2} v_{11} - \frac{\Delta}{2} v_{21} = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} v_{21} \Rightarrow -\frac{\Omega_R}{2} v_{11} = \left( \frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \right) v_{21} \quad (2\eta)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \right) v_{11} = \frac{\Omega_R}{2} \frac{-\frac{\Omega_R}{2} v_{11}}{\left( \frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \right)} \quad * (\text{εάν } v_{11} \neq 0) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta^2}{4} - \frac{\Omega_R^2}{4} - \frac{\Delta^2}{4} = -\frac{\Omega_R^2}{4},$$

που ισχύει. Αρκεί δηλαδή  $v_{11} \neq 0$ ,<sup>\*</sup> οπότε π.χ. από την (1η) συνάγεται

$$v_{21} = \frac{\frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}} v_{11} \quad \text{ή} \quad v_{21} = \alpha v_{11} \quad \text{άρα} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha\beta \end{bmatrix}$$

Για να είναι κανονικοποιημένο θα πρέπει  $\beta^2 + \alpha^2\beta^2 = 1$  π.χ.  $\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \Rightarrow$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma\alpha \quad \boxed{\lambda_2 = +\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} := +\lambda > 0}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta}{2} v_{12} - \frac{\Omega_R}{2} v_{22} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} v_{12} \Rightarrow \left( \frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \right) v_{12} = \frac{\Omega_R}{2} v_{22} \quad (1\eta)$$

$$-\frac{\Omega_R}{2} v_{12} - \frac{\Delta}{2} v_{22} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} v_{22} \Rightarrow -\frac{\Omega_R}{2} v_{12} = \left( \frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \right) v_{22} \quad (2\eta)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \right) v_{12} = \frac{\Omega_R}{2} \frac{-\frac{\Omega_R}{2} v_{12}}{\left( \frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} \right)} \quad * (\text{εάν } v_{12} \neq 0) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta^2}{4} - \frac{\Omega_R^2}{4} - \frac{\Delta^2}{4} = -\frac{\Omega_R^2}{4},$$

που ισχύει. Αρκεί δηλαδή  $\boxed{v_{12} \neq 0}$ ,<sup>\*</sup> οπότε π.χ. από την (1η) συνάγεται

$$\Rightarrow \boxed{v_{22} = \frac{\frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}} v_{12}} \quad \text{ή} \quad v_{22} = \alpha' v_{12} \quad \text{άρα} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta' \\ \alpha' \beta' \end{bmatrix}$$

Για να είναι κανονικοποιημένο θα πρέπει  $\beta'^2 + \alpha'^2 \beta'^2 = 1$  π.χ.  $\beta' = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \Rightarrow$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \\ \frac{\alpha'}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \end{bmatrix}$$



Άρα

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = c_1\vec{v}_1e^{-i\lambda_1t} + c_2\vec{v}_2e^{-i\lambda_2t} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{1+\alpha^2}}e^{-i\lambda_1t} + \frac{c_2}{\sqrt{1+\alpha'^2}}e^{-i\lambda_2t} \\ \frac{c_1\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}e^{-i\lambda_1t} + \frac{c_2\alpha'}{\sqrt{1+\alpha'^2}}e^{-i\lambda_2t} \end{bmatrix}$$

Έστωσαν Αρχικές Συνθήκες  $C_1(0) = 1$  και  $C_2(0) = 0$ . Επομένως

$$\begin{cases} 1 = \frac{c_1}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{1+\alpha'^2}} \\ 0 = \frac{c_1\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{c_2\alpha'}{\sqrt{1+\alpha'^2}} \Rightarrow c_2 = -\frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\sqrt{1+\alpha'^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}} c_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{c_1}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\sqrt{1+\alpha'^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{c_1}{\sqrt{1+\alpha'^2}} = c_1 \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' \sqrt{1+\alpha^2}} \Rightarrow c_1 = \frac{\alpha' \sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha' - \alpha} \\ c_2 = -\frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\sqrt{1+\alpha'^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{\alpha' \sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha' - \alpha} \Rightarrow c_2 = -\frac{\alpha \sqrt{1+\alpha'^2}}{\alpha' - \alpha} \end{cases}$$

Επομένως

$$\begin{bmatrix} C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha'}{\alpha' - \alpha} e^{-i\lambda_1t} - \frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} e^{-i\lambda_2t} \\ \frac{\alpha\alpha'}{\alpha' - \alpha} e^{-i\lambda_1t} - \frac{\alpha\alpha'}{\alpha' - \alpha} e^{-i\lambda_2t} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές που εμφανίζονται στην άνω εξίσωση της 3.66.

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \frac{\frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}} - \frac{\frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}} = \frac{-2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{\Omega_R} \\ \frac{\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= -\frac{\cancel{\Omega_R}}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \frac{\Delta - \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{\cancel{\Omega_R}} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} - \Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \\ \frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} &= -\frac{\cancel{\Omega_R}}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \frac{\Delta + \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{\cancel{\Omega_R}} = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} + \Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} \end{aligned}$$

Οπότε η άνω εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned}
 C_1(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} &= \underbrace{\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} - \Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}}_{k_1} e^{i\lambda t} + \underbrace{\frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} + \Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}}_{k_2} e^{-i\lambda t} \Rightarrow \\
 C_1(t) &= (k_1 e^{i\lambda t} + k_2 e^{-i\lambda t}) e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \Rightarrow \\
 |C_1(t)|^2 &= k_1^2 + k_2^2 + k_1 k_2 e^{2i\lambda t} + k_1 k_2 e^{-2i\lambda t} = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \cos(2\lambda t) \Rightarrow \\
 |C_1(t)|^2 &= \frac{\Omega_R^2 + \Delta^2 + \Delta^2 - 2\Delta\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{4(\Omega_R^2 + \Delta^2)} + \frac{\Omega_R^2 + \Delta^2 + \Delta^2 + 2\Delta\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{4(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \\
 &\quad + 2\frac{\Omega_R^2 + \Delta^2 - \Delta^2}{4(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \cos(2\lambda t) \Rightarrow \\
 |C_1(t)|^2 &= \frac{2(\Omega_R^2 + 2\Delta^2)}{4(\Omega_R^2 + \Delta^2)} + \frac{2\Omega_R^2}{4(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \cos(2\lambda t) = \frac{\Omega_R^2 + 2\Delta^2 + \Omega_R^2 \cos(2\lambda t)}{2(\Omega_R^2 + \Delta^2)} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 P_1(t) = |C_1(t)|^2 &= 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t) \\
 \text{όπου } \lambda &= \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}
 \end{aligned}
 } \quad (3.67)$$

Η μέγιστη τιμή του  $|C_1(t)|^2$  είναι 1, ενώ η ελάχιστη τιμή του είναι  $1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2}$  και το πλάτος της ταλαντώσεως του είναι

$$\boxed{
 \mathcal{A} = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2}
 } \quad (3.68)$$

Για  $\Delta = 0$ ,  $\Rightarrow |C_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$ , όπως αναμενόταν (Εξ. 3.63).

Ας υπολογίσουμε τον συντελεστή που εμφανίζεται στην κάτω εξίσωση της 3.66.

$$\frac{\alpha\alpha'}{\alpha' - \alpha} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} + \Delta}{\Omega_R} \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} - \Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} = \frac{\Omega_R^2 + \Delta^2 - \Delta^2}{2\Omega_R\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} = \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}$$

$$\text{οπότε } C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} = \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}e^{+i\lambda t} - \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}e^{-i\lambda t} = \frac{\Omega_R}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}i\sin(\lambda t) \Rightarrow$$

$$\boxed{P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2(\lambda t)} \quad (3.69)$$

$$\text{όπου } \lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

Η μέγιστη τιμή του  $|C_2(t)|^2$  είναι  $\frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2}$  και η ελάχιστη 0, άρα το πλάτος της

ταλαντώσεως είναι  $\mathcal{A} = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2}$  σε συμφωνία με την Εξ. 3.68.

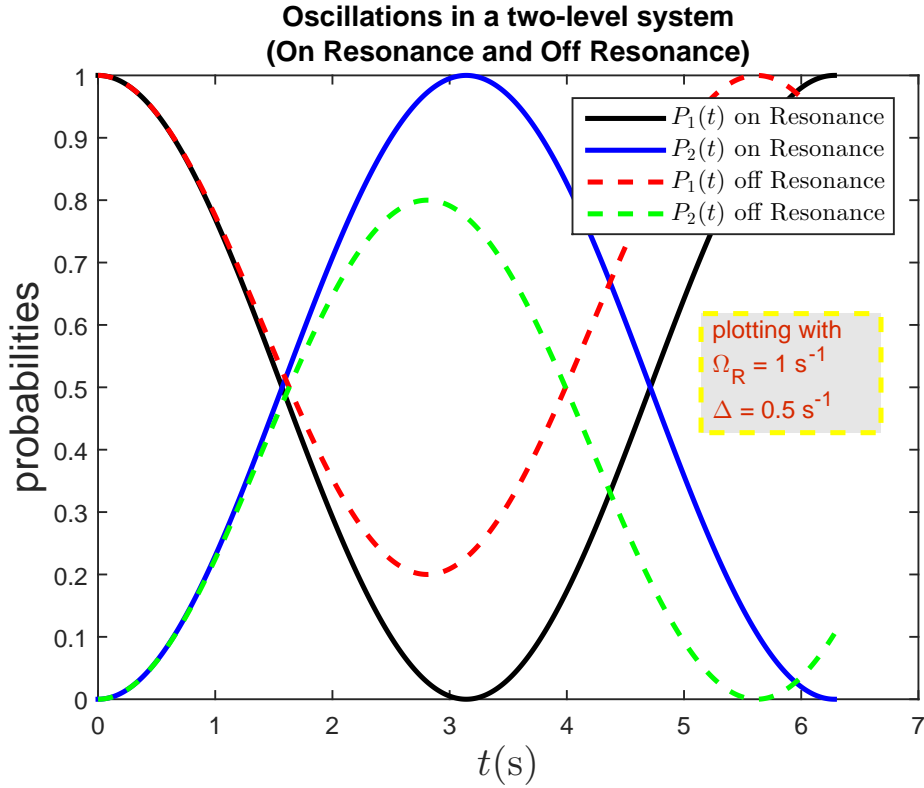
Για  $\Delta = 0$ ,  $|C_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$  όπως αναμενόταν (Εξ. 3.63).

Όπως φαίνεται από τις Εξ. 3.67 και 3.69 η περίοδος των ταλαντώσεων είναι

$$\boxed{T_R = \frac{2\pi}{2\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}} \quad (3.70)$$

και για  $\Delta = 0$  προκύπτει  $T = \frac{2\pi}{\Omega_R}$  σε συμφωνία με την Εξ. 3.64. Επίσης, το πλάτος των ταλαντώσεων που δίνεται από την Εξ. 3.68, για  $\Delta = 0$  συμπίπτει με την Εξ. 3.65. Ταλαντώσεις δισταθμικού συστήματος σε συντονισμό και εκτός συντονισμού παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.6. Υπενθυμίζεται ότι  $P_k(t) = |C_k(t)|^2$ ,  $k = 1, 2$  είναι οι πιθανότητες παρουσίας του ηλεκτρονίου στη στάθμη  $k$ . Από τις Εξ. 3.70 και 3.68 είναι φανερό ότι καθώς απομακρυνόμαστε από τον συντονισμό, δηλαδή καθώς αυξάνεται το  $|\Delta|$ , η περίοδος και το πλάτος των ταλαντώσεων μικραίνουν, πράγμα που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.6.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν μικρύνουμε το μέγεθος της διαταραχής, δηλαδή τη συχνότητα Rabi  $\Omega_R$ , σε σχέση με την απόλυτη τιμή του detuning  $|\Delta|$  ( $\Omega_R \ll$



Σχήμα 3.6: Ταλαντώσεις δισταθμικού συστήματος σε συντονισμό ( $\Delta = 0$ , συνεχείς γραμμές) και εκτός συντονισμού ( $\Delta \neq 0$ , διακεκομμένες γραμμές). Η περίοδος των ταλαντώσεων είναι  $T_R = \frac{2\pi}{2\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}$ , ενώ το πλάτος τους  $A = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2}$ . Εντελώς τυπικά θέσαμε στο σχήμα  $\Omega_R = 1 \text{ s}^{-1}$ , και  $\Delta = 0.5 \text{ s}^{-1}$  αλλά αυτές οι τιμές δεν έχουν κάποια σχέση με τις τιμές των  $\Omega_R, \Delta$  σε πραγματικά συστήματα. Παρατηρούμε τις αλλαγές στην περίοδο και στο πλάτος όταν το δισταθμικό σύστημα βρίσκεται εκτός συντονισμού. Στο Παράρτημα Γ' υπάρχει το πρόγραμμα matlab *Oscillations.m* που δημιουργεί την παρούσα εικόνα.

$|\Delta|$ ).

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} t \right) \approx \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2} \sin^2 \left( \frac{\Delta t}{2} \right), \quad \Omega_R \ll |\Delta| \quad (3.71)$$

Οπότε η περίοδος γίνεται  $T_R = 2\pi/|\Delta|$ . Η Εξ. 3.71 ταυτίζεται με την Εξ. 3.74

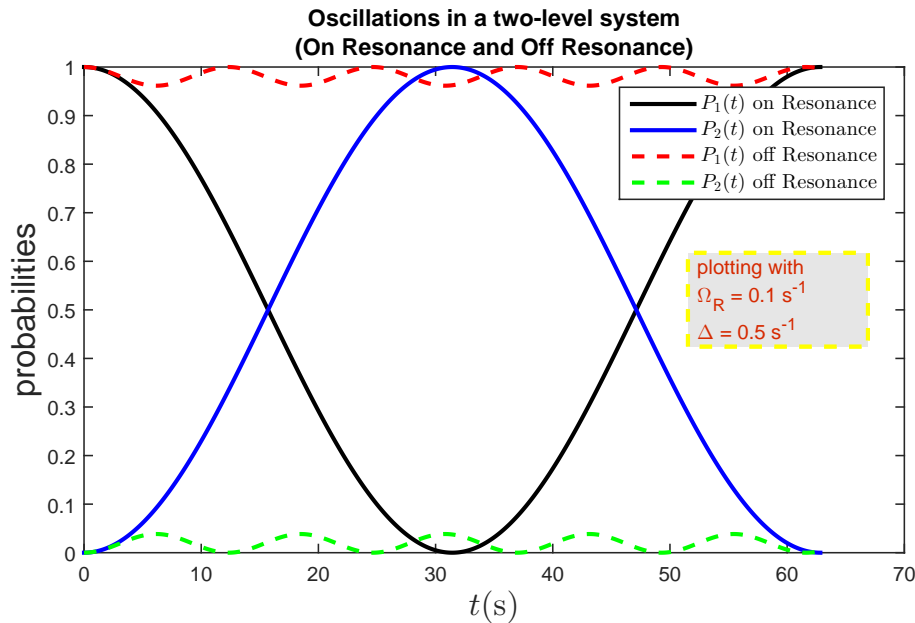
της Ενότητας 3.5 η οποία προκύπτει με την παραδοχή ότι μιλάμε για πολύ μικρούς χρόνους ώστε η λύση να μην απέχει πολύ από τις αρχικές συνθήκες. Αυτή η ταύτιση οφείλεται στο ότι για πολύ μικρό  $\Omega_R$  προκύπτει πολύ μεγάλη περίοδος  $T_R$  πράγμα το οποίο σημαίνει αργή χρονική εξέλιξη.

Περαιτέρω ας δούμε τι συμβαίνει στο όριο απειροελάχιστης διαταραχής.

$$\lim_{\Omega_R \rightarrow 0} T_R = \lim_{\Omega_R \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}} = \frac{2\pi}{|\Delta|} \quad (3.72)$$

$$\lim_{\Omega_R \rightarrow 0} \mathcal{A} = \lim_{\Omega_R \rightarrow 0} \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} = 0 \quad (3.73)$$

Δηλαδή στο όριο απειροελάχιστης διαταραχής το πλάτος των ταλαντώσεων μηδενίζεται, ενώ η περίοδός τους τείνει στο  $\frac{2\pi}{|\Delta|}$ , δηλαδή εξαρτάται μόνο από το detuning. Για να πάρουμε μια ιδέα του τι συμβαίνει για μικρά  $\Omega_R$ , παραθέτουμε το Σχήμα 3.7.



Σχήμα 3.7: Ταλαντώσεις διαταθμικού συστήματος σε συντονισμό ( $\Delta = 0$ , συνεχείς γραμμές) και εκτός συντονισμού ( $\Delta \neq 0$ , διακεκομμένες γραμμές). Η περίοδος των ταλαντώσεων είναι  $T_R = \frac{2\pi}{2\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}$ , ενώ το πλάτος τους  $\mathcal{A} = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2}$ . Εντελώς τυπικά θέσαμε στο σχήμα  $\Omega_R = 0.1 \text{ s}^{-1}$ , και  $\Delta = 0.5 \text{ s}^{-1}$ , δηλαδή σχετικά μικρό  $\Omega_R$ . Στο Παράρτημα Γ' υπάρχει το πρόγραμμα matlab *Oscillations.m* που δημιουργεί την παρούσα εικόνα.

### 3.5 Λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν μετά την RWA με την απλοϊκή επαναληπτική μέθοδο Newton.

Ας θυμηθούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που προέκυψε μετά την RWA (Εξ. 3.50) το οποίο λύσαμε ακριβώς στην Ενότητα 3.4:

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= C_2(t) \frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{P}}{2\hbar} e^{-i(\Omega-\omega)t} & \Omega_R &:= \frac{\mathcal{P}\mathcal{E}_0}{\hbar} \\ \dot{C}_2(t) &= C_1(t) \frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{P}}{2\hbar} e^{i(\Omega-\omega)t} & \Delta &:= \omega - \Omega \end{aligned}$$

Εδώ θα λύσουμε τις Εξισώσεις 3.50 για αρχικές συνθήκες  $C_1(0) = 1$  και  $C_2(0) = 0$ , ακολουθώντας την προσεγγιστική επαναληπτική μέθοδο Newton, παίρνοντας ως μηδενικής τάξεως προσέγγιση

$$\begin{aligned} C_1^{(0)}(t) &\approx C_1(0) = 1 \\ C_2^{(0)}(t) &\approx C_2(0) = 0 \end{aligned}$$

δηλαδή με την υπόθεση ότι για μικρούς χρόνους η λύση δεν απέχει πολύ από τις αρχικές συνθήκες. Άρα η πρώτη τάξεως προσέγγιση είναι

$$\begin{aligned} \dot{C}_1^{(1)}(t) &= \cancel{C_2^{(0)}(t)} \overset{0}{\nearrow} \frac{i\Omega_R}{2} e^{i\Delta t} = 0 \\ \dot{C}_2^{(1)}(t) &= \cancel{C_1^{(0)}(t)} \overset{1}{\nearrow} \frac{i\Omega_R}{2} e^{-i\Delta t} \Rightarrow \int_0^t \frac{dC_2^{(1)}(t)}{dt} dt = \frac{i\Omega_R}{2} \int_0^t e^{-i\Delta t} dt \Rightarrow \\ C_2^{(1)}(t') - \cancel{C_2^{(1)}(0)} \overset{0}{\nearrow} &= \frac{i\Omega_R}{2} \frac{1}{-i\Delta} [e^{-i\Delta t}]_0^{t'} = -\frac{\Omega_R}{2\Delta} (e^{-i\Delta t'} - 1) \Rightarrow \\ \left. \begin{aligned} C_2^{(1)}(t) &= -\frac{\Omega_R}{2\Delta} (e^{-i\Delta t} - 1) \\ \star e^{ix} - 1 &= 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_2^{(1)}(t) &= -\frac{\Omega_R}{2\Delta} 2i \sin\left(\frac{-\Delta t}{2}\right) e^{-\frac{i\Delta t}{2}} \Rightarrow \\ &= \frac{\Omega_R}{\Delta} i \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) e^{-\frac{i\Delta t}{2}}. \end{aligned}$$

★ Η απόδειξη στο Παράρτημα Β'.6. Συνεπώς

$$P_2^{(1)}(t) = |C_2^{(1)}(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2} \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \quad \text{ή} \quad P_2^{(1)}(t) = |C_2^{(1)}(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{4} \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} t^2 \quad (3.74)$$

Η Εξ. 3.74 ταυτίζεται με την Εξ. 3.71 της Ενότητας 3.4 η οποία ισχύει για πολύ μικρό  $\Omega_R$  οπότε προκύπτει πολύ μεγάλη περίοδος  $T_R$  πράγμα το οποίο σημαίνει αργή χρονική εξέλιξη.

### 3.6 Υπολογισμός των συντελεστών Einstein.

Ας λάβουμε ως αφετηρία τις εξισώσεις

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2} \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \quad \text{ή} \quad P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{4} \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} t^2 \quad (3.75)$$

οι οποίες ισχύουν για πολύ μικρό μέγεθος διαταραχής, το οποίο εκφράζει η  $\Omega_R$ , οπότε προκύπτει πολύ μεγάλη περίοδος  $T_R = 2\pi/|\Delta|$ , πράγμα το οποίο σημαίνει αργή χρονική εξέλιξη. (Όπως είδαμε στην προηγούμενη Ενότητα τα ίδια ισχύουν και για πολύ μικρούς χρόνους με την απλοϊκή μέθοδο Newton). Δεδομένου ότι στην αρχή το ηλεκτρόνιο βρισκόταν στην 1η στάθμη, η  $P_2(t)$  ουσιαστικά περιγράφει την πιθανότητα απορροφήσεως σε δισταθμικό σύστημα για πολωμένο, μονοχρωματικό αλλά και κοντά στο ορατό φως.

Αν όμως μας ενδιαφέρει η πιθανότητα απορροφήσεως σε δισταθμικό σύστημα για πολωμένο αλλά όχι μονοχρωματικό (να προέρχεται από μεγάλη περιοχή κυκλικών συχνοτήτων γύρω από το  $\omega_0 = \Omega$ ) κοντά στο ορατό φως ★ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΟΤΜΕ ★

$$\mathcal{E}_0^2 = \int_{\Omega-\text{κάτι}}^{\Omega+\text{κάτι}} d\omega \frac{\rho(\omega)}{\varepsilon_0}.$$

$\varepsilon_0$  είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού με μονάδες  $[\varepsilon_0] = \frac{C^2}{Nm^2}$  και  $\rho$  η πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή κυκλικής συχνότητας με μονάδες

$$[\rho] = \frac{Js}{m^3}. \quad \text{Άρα} \quad \left[ \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\varepsilon_0} \right] = \frac{(1/s) J Nm^2}{m^3 (1/s) C^2} = \frac{JN}{mC^2} = \frac{N^2 m}{mC^2} = \frac{N^2}{C^2} = \left[ \mathcal{E}_0^2 \right].$$

Άρα, από την Εξ. 3.75 καταλήγουμε στην

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\mathcal{P}^2}{4\hbar^2} \int_{\Omega-\kappa\acute{\alpha}\tau\iota}^{\Omega+\kappa\acute{\alpha}\tau\iota} d\omega \frac{\rho(\omega)}{\varepsilon_0} \frac{\sin^2\left(\frac{(\omega-\Omega)t}{2}\right)}{\left(\frac{(\omega-\Omega)t}{2}\right)^2} t^2. \quad (3.76)$$

Θέτουμε

$$x := \frac{(\omega - \Omega)t}{2} \Rightarrow \omega = \frac{2x}{t} + \Omega \Rightarrow d\omega = \frac{2}{t} dx. \quad (3.77)$$

Άρα

$$P_2(t) = \frac{\mathcal{P}^2}{4\hbar^2} \frac{2}{t} \frac{t^2}{\varepsilon_0} \int_{-\kappa\acute{\alpha}\tau\iota(t/2)}^{+\kappa\acute{\alpha}\tau\iota(t/2)} dx \rho(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} \Rightarrow$$

$$P_2(t) = \frac{\mathcal{P}^2 t}{2\hbar^2 \varepsilon_0} \int_{-\kappa\acute{\alpha}\tau\iota(t/2)}^{+\kappa\acute{\alpha}\tau\iota(t/2)} dx \rho(x) \boxed{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \simeq \pi \delta(x) \star$$

★ Για την προσέγγιση της  $\delta(x)$  συμβουλευθείτε το Παράρτημα Β'3.

$$\left. \begin{array}{l} P_2(t) = \frac{\mathcal{P}^2 t}{2\hbar^2 \varepsilon_0} \rho(x=0) \pi \\ x=0 \Rightarrow \frac{\omega - \Omega}{2} t = 0 \\ \text{όμως } t \text{ πεπερασμένος} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = \Omega \Rightarrow P_2(t) = \frac{\mathcal{P}^2 t \pi}{2\hbar^2 \varepsilon_0} \rho(\Omega) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dP_2(t)}{dt} = \frac{\mathcal{P}^2 \pi}{2\hbar^2 \varepsilon_0} \rho(\Omega)}$$

Η ΗΜ ακτινοβολία που προέρχεται από μέλαν σώμα δεν είναι πολωμένη, εν γένει. Συνεπώς, κατά ένα τρόπο το  $\rho(\Omega)$  μιας πολώσεως θα πρέπει να αντικατασταθεί με το  $\frac{\rho(\Omega)}{3}$  σύμφωνα με τη σχέση

$$\langle \mathcal{E}_0^2 \rangle = \langle \mathcal{E}_{0x}^2 + \mathcal{E}_{0y}^2 + \mathcal{E}_{0z}^2 \rangle = 3 \langle \mathcal{E}_{0z}^2 \rangle \Rightarrow \langle \mathcal{E}_{0z}^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \mathcal{E}_0^2 \rangle$$



Άρα θα έπρεπε

$$\boxed{\frac{dP_2(t)}{dt} = \frac{\mathcal{P}^2 \pi}{2\hbar^2 \varepsilon_0} \frac{\rho(\Omega)}{3}}$$

Αλλά η πιθανότητα απορροφήσεως είναι

$$\begin{aligned} dW_{\text{απορ}}^{\varepsilon\xi} &= B_{12} \rho(\nu) dt \Rightarrow \\ \frac{dW_{\text{απορ}}^{\varepsilon\xi}}{dt} &= B_{12} \rho(\nu) \\ \text{για } \omega &= \Omega \quad \boxed{\frac{dW_{\text{απορ}}^{\varepsilon\xi}}{dt} = B_{12} \rho(\Omega)} \end{aligned}$$

Άρα

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_2(t)}{dt} &= \frac{\mathcal{P}^2 \pi}{2\hbar^2 \varepsilon_0} \frac{\rho(\Omega)}{3} \\ \frac{dW_{\text{απορ}}^{\varepsilon\xi}}{dt} &= B_{12} \rho(\Omega) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (3.78)$$

$$\boxed{B_{12} = \frac{\mathcal{P}^2 \pi}{6\hbar^2 \varepsilon_0}} \quad (3.79)$$

ενώ υπενθυμίζεται ότι είχαμε βρει

$$\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}} \quad (3.80)$$

και

$$\boxed{B_{12} = B_{21}} \quad (3.81)$$

Παρά τις απλουστεύσεις που χρειάστηκαν για τον υπολογισμό, η ουσία είναι ότι είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι συντελεστές Einstein ενός δισταθμικού συστήματος.

### 3.7 Υπολογισμός των συντελεστών Einstein χρησιμοποιώντας τις λύσεις που προέκυψαν στην Ενότητα 3.4.

Ας παραθέσουμε την Εξ. 3.69 της Ενότητας 3.4 και την Εξ. 3.75 της Ενότητας 3.6. Η Εξ. 3.69 μπορεί κι αυτή να γραφεί με ανάλογο τρόπο με την Εξ. 3.75 ήτοι

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} t \right) \quad \text{ή}$$

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{4} \frac{\sin^2 \left( \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} t \right)}{\left( \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} t \right)^2} t^2 \quad (3.82)$$

όπως δηλαδή γράφαμε

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2} \sin^2 \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \quad \text{ή}$$

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{4} \frac{\sin^2 \left( \frac{\Delta t}{2} \right)}{\left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2} t^2 \quad (3.83)$$

Όπως είναι φανερό, υπάρχει αναλογία μεταξύ των δευτέρων εκδοχών των  $P_2(t)$ . Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε

$$x := \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} t \quad (3.84)$$

όπως είχαμε ορίσει

$$x := \frac{\Delta t}{2} \quad (3.85)$$

στην προηγούμενη Ενότητα 3.6 (Εξ. 3.77). Οπότε ο υπολογισμός του  $B_{12}$  θα γινόταν όπως έγινε και στην προηγούμενη Ενότητα 3.6.

### 3.8 Επιτρεπόμενες και Απαγορευμένες Οπτικές Μεταβάσεις εντός της Προσεγγίσεως Διπόλου.

Υπενθυμίζουμε τα έως τώρα βήματα στην προσέγγιση διπόλου τα οποία αναφέρθηκαν στην Ενότητα 3.3

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_a \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r}_H - \omega t + \phi)] \\ \vec{r}_H \simeq \vec{R} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) = \vec{\mathcal{E}}(t) \\ \vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla} V \\ dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} \end{array} \right\} dV = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{r} \left. \right\} \dots \Rightarrow \underset{\text{δυναμικό}}{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{δυναμική ενέργεια} \\ U \\ \text{ηλεκτρονίου} \end{array} = e \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r} = -\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad (\clubsuit)}$$

δηλαδή η Εξ. 3.35. Το στοιχείο πίνακα της δυναμικής ενέργειας της διαταραχής

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = \int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r})$$

λόγω της ( $\clubsuit$ ) γράφεται

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = -\vec{\mathcal{E}} \cdot \underbrace{\int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \vec{\mathcal{P}} \Phi_k(\vec{r})}_{\vec{\mathcal{P}}_{k'k}} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{P}}_{k'k}$$

όπου  $\vec{\mathcal{P}}_{k'k}$  είναι το στοιχείο πίνακα της διπολικής ροπής ή αλλιώς

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = e \vec{\mathcal{E}} \cdot \underbrace{\int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \vec{r} \Phi_k(\vec{r})}_{\vec{r}_{k'k}} = e \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r}_{k'k}$$

όπου  $\vec{r}_{k'k}$  είναι το στοιχείο πίνακα της θέσεως του αρνητικού φορτίου ως προς το θετικό π.χ. της θέσεως του ηλεκτρονίου ως προς τον πυρήνα. Προφανώς  $\vec{\mathcal{P}}_{k'k} = -e \vec{r}_{k'k}$ .

Όπως βλέπουμε, εν τέλει, όλα ανάγονται στη συμμετρία των ιδιοσυναρτήσεων του αδιατάρακτου προβλήματος, διότι το ποιές από αυτές είναι άρτιες ή περιττές καθορίζει το αν θα μηδενίζεται ή όχι το στοιχείο πίνακα  $\vec{r}_{k'k}$ , δεδομένου ότι η συνάρτηση  $\vec{r}$  είναι προφανώς περιττή.

Αν  $U_{\varepsilon k'k}(t) = 0$ , τότε η διαταραχή δεν συζευγνύει τις καταστάσεις  $k'$  και  $k$ , οπότε, εάν το ηλεκτρόνιο ήταν στην  $k$  δεν θα μεταβεί στην  $k'$ , και αντιστρόφως. Οπότε εάν  $U_{\varepsilon k'k}(t) = 0$  λέμε ότι “απαγορεύεται η μετάβαση”  $k' \longleftrightarrow k$ .

### 3.9 “Ιδιοενέργειες” διαταραγμένου δισταθμικού συστήματος (δηλαδή με ΗΜ πεδίο).

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα  $\hat{H}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$ , υποθέτοντας ότι μπορούμε να αναπτύξουμε την  $\Psi(\vec{r})$  συναρτήσεως των ιδιοσυναρτήσεων του αδιατάρακτου προβλήματος  $\Phi_k(\vec{r})$  με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές  $g_k$ . Τότε

$$\left. \begin{array}{l} \hat{H} = \hat{H}_0 + U_{\varepsilon}(\vec{r}, t) \\ \hat{H}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \\ \Psi(\vec{r}) = \sum_k g_k \Phi_k(\vec{r}) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \left[ \hat{H}_0 + U_{\varepsilon}(\vec{r}, t) \right] \sum_k g_k \Phi_k(\vec{r}) = E \left[ \sum_k g_k \Phi_k(\vec{r}) \right] \\ \text{Ας εκμεταλλευτούμε ότι οι } \Phi_k(\vec{r}) \text{ είναι ορθοκανονικές.} \\ \text{Πολλαπλασιάζουμε με } \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \text{ και ολοκληρώνουμε στο χώρο.} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

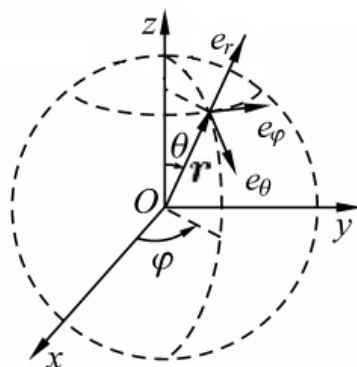
$$\left. \begin{array}{l} \sum_k g_k \int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \hat{H}_0 \Phi_k(\vec{r}) + \sum_k g_k \int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) U_{\varepsilon}(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r}) = E \sum_k g_k \int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \Phi_k(\vec{r}) \\ \Rightarrow \sum_k g_k E_k \delta_{k'k} + \sum_k g_k U_{\varepsilon k'k}(t) = E \sum_k g_k \delta_{k'k} \Rightarrow \boxed{g_{k'} E_{k'} + \sum_k g_k U_{\varepsilon k'k}(t) = E g_{k'}} \\ \left. \begin{array}{l} \text{εάν έχουμε προσέγγιση διπόλου } U = -\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}} = +e\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} = U_{\varepsilon}(\vec{r}, t) \\ U_{\varepsilon k'k}(t) = e e^{-i\omega t} \vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \vec{r}_{k'k} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

αν λάβουμε τη μέση χρονική τιμή σε μια περίοδο  $\frac{2\pi}{\omega}$  του ΗΜ πεδίου, τότε  $\boxed{\langle E \rangle = E_{k'}}$

Δηλαδή κατά μέσο όρο δεν επηρεάζονται οι ιδιοενέργειες.

### 3.10 Άτομο Υδρογόνου: Μορφή ατομικών τροχιακών.

Στο Σχήμα 3.8 φαίνονται οι σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \varphi)$  όπως συνήθως χρησιμοποιούνται στη φυσική: η απόσταση  $r$  από την αρχή των αξόνων  $O$ , η πολική γωνία  $\theta$ , η αζιμουθιακή γωνία  $\varphi$ . Σημειώνονται και τα μοναδιαία ανύσματα  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$ .



Σχήμα 3.8: Οι σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \varphi)$ : η απόσταση από το κέντρο  $r$ , η πολική γωνία  $\theta$ , η αζιμουθιακή γωνία  $\varphi$ . Σημειώνονται και τα μοναδιαία ανύσματα  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$ .

Οι ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του Υδρογόνου σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουν τη μορφή

$$\Psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r)\Theta_{\ell m}(\theta)\Phi_m(\varphi)$$

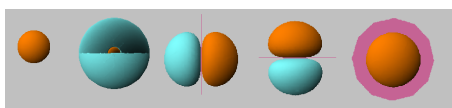
οι οποίες είναι δηλαδή τα  $\Phi_k(\vec{r})$  του γενικού συμβολισμού, όπου  $k = \{n, \ell, m\}$  είναι ο συλλογικός κβαντικός αριθμός. Αναλυτικότερα

- $n = 1, 2, 3, \dots$  είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός
- $\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  είναι ο τροχιακός κβαντικός αριθμός, και
- $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$  είναι ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός

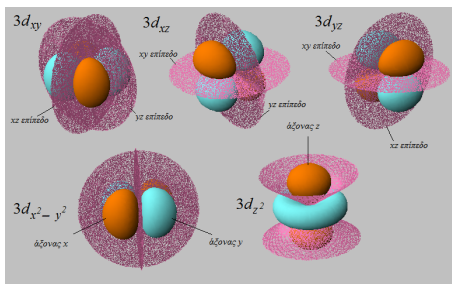
Συγκεκριμένα παρατίθενται παρακάτω τα ατομικά τροχιακά  $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d$  [30].

$$\begin{aligned}
 \Psi_{100}(r, \theta, \varphi) &= (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} & \Psi_{100} &:= 1s \\
 \Psi_{200}(r, \theta, \varphi) &= (32 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} & \Psi_{200} &:= 2s \\
 \Psi_{210}(r, \theta, \varphi) &= (32 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{a_0} \cos \theta e^{-\frac{r}{2a_0}} & \Psi_{210} &:= 2p_z \\
 \Psi_{21\pm 1}(r, \theta, \varphi) &= (64 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{a_0} \sin \theta e^{\pm i\varphi} e^{-\frac{r}{2a_0}} & (\Psi_{21+1} + \Psi_{21-1})/\sqrt{2} &:= 2p_x \\
 & & (\Psi_{21+1} - \Psi_{21-1})/(i\sqrt{2}) &:= 2p_y \\
 \Psi_{300}(r, \theta, \varphi) &= (19683 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\frac{r^2}{a_0^2}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}} & \Psi_{300} &:= 3s \\
 \Psi_{310}(r, \theta, \varphi) &= (6561 \pi a_0^3/2)^{-\frac{1}{2}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} \cos \theta & \Psi_{310} &:= 3p_z \\
 \Psi_{31\pm 1}(r, \theta, \varphi) &= (6561 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} & (\Psi_{31+1} + \Psi_{31-1})/\sqrt{2} &:= 3p_x \\
 & & (\Psi_{31+1} - \Psi_{31-1})/(i\sqrt{2}) &:= 3p_y \\
 \Psi_{320}(r, \theta, \varphi) &= (39366 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} (3 \cos^2 \theta - 1) & \Psi_{320} &:= 3d_{z^2} \\
 \Psi_{32\pm 1}(r, \theta, \varphi) &= (6561 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi} & (\Psi_{32+1} + \Psi_{32-1})/\sqrt{2} &:= 3d_{xz} \\
 & & (\Psi_{32+1} - \Psi_{32-1})/(i\sqrt{2}) &:= 3d_{yz} \\
 \Psi_{32\pm 2}(r, \theta, \varphi) &= (26244 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi} & (\Psi_{32+2} + \Psi_{32-2})/\sqrt{2} &:= 3d_{x^2-y^2} \\
 & & (\Psi_{32+2} - \Psi_{32-2})/(i\sqrt{2}) &:= 3d_{xy}
 \end{aligned}$$

Εννοείται ότι οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να πολλαπλασιαστούν με ένα παράγοντα  $e^{ia}$ , όπου  $a$  μια αυθαίρετη φάση, παραμένοντας ιδιοσυναρτήσεις. Οι αντίστοιχες ιδιοενέργειες είναι  $E_k = \hbar\Omega_k = -\frac{R_E}{n^2} = E_n$ , δηλαδή υπάρχει εκφυλισμός ως προς  $\ell, m$ .  $R_E = 13.6$  eV είναι η ενέργεια Rydberg και  $a_0$  είναι η ακτίνα Bohr. Τα πέντε πρώτα ατομικά τροχιακά  $1s, 2s, 2p_x, 2p_y, 2p_z$  απεικονίζονται στο Σχήμα 3.9, τα πέντε ατομικά τροχιακά  $3d$  στο Σχήμα 3.10, ενώ όλα τα ατομικά τροχιακά υδρογονοειδών κυματοσυναρτήσεων έως το  $7s$ , απεικονίζονται στο Σχήμα 3.11.



Σχήμα 3.9: Τα πέντε πρώτα ατομικά τροχιακά  $1s, 2s, 2p_x, 2p_y, 2p_z$  [31]. Τα χρώματα (πορτοκαλί, γαλανό) αντιστοιχούν σε διαφορετικά πρόσημα, αν π.χ. η πορτοκαλί περιοχή είναι θετική, η γαλανή είναι αρνητική. Θεωρούμε τον παράγοντα  $e^{ia} = 1$ .



Σχήμα 3.10: Τα πέντε ατομικά τροχιακά  $3d$  [31]. Τα χρώματα (πορτοκαλί, γαλανό) αντιστοιχούν σε διαφορετικά πρόσημα, αν π.χ. η πορτοκαλί περιοχή είναι θετική, η γαλανή είναι αρνητική. Θεωρούμε τον παράγοντα  $e^{ia} = 1$ .

	$s$ ( $l = 0$ )	$p$ ( $l = 1$ )			$d$ ( $l = 2$ )					$f$ ( $l = 3$ )						
	$m = 0$	$m = 0$	$m = \pm 1$		$m = 0$	$m = \pm 1$		$m = \pm 2$		$m = 0$	$m = \pm 1$		$m = \pm 2$		$m = \pm 3$	
	$s$	$p_z$	$p_x$	$p_y$	$d_{z^2}$	$d_{xz}$	$d_{yz}$	$d_{xy}$	$d_{x^2-y^2}$	$f_{z^3}$	$f_{xz^2}$	$f_{yz^2}$	$f_{xyz}$	$f_{z(x^2-y^2)}$	$f_{x(x^2-3y^2)}$	$f_{y(3x^2-y^2)}$
$n = 1$	•															
$n = 2$	•															
$n = 3$	•															
$n = 4$																
$n = 5$										...	...	...	...	...	...	...
$n = 6$					...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$n = 7$		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Σχήμα 3.11: Όλα τα ατομικά τροχιακά υδρογονοειδών κυματοσυναρτήσεων έως το  $7s$ . Τα χρώματα (κόκκινο, μπλε) αντιστοιχούν σε διαφορετικά πρόσημα, αν π.χ. η κόκκινη περιοχή είναι θετική, η μπλε είναι αρνητική. Θεωρούμε τον παράγοντα  $e^{ia} = 1$ . Εικόνα από wikipedia [32].

### 3.11 Άτομο Υδρογόνου:

Υπολογισμός των στοιχείων πίνακα της διπολικής ροπής.

Επιτρεπόμενες και απαγορευμένες οπτικές μεταβάσεις. Κανόνες επιλογής.

Θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα - άσκηση το άτομο του Υδρογόνου. Θεωρήστε τις ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του Υδρογόνου

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)\Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\varphi) = \Phi_k(\vec{r})$$

όπου

- $k = \{n, \ell, m\}$  ο συλλογικός κβαντικός αριθμός. Δηλαδή
- $n = 1, 2, 3, \dots$  είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός
- $\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  είναι ο τροχιακός κβαντικός αριθμός, και
- $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$  είναι ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός

Συγκεκριμένα δίνονται οι

$$\Psi_{100}(r, \theta, \varphi) = (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} \quad \Psi_{100} := 1s$$

$$\Psi_{200}(r, \theta, \varphi) = (32 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \quad \Psi_{200} := 2s$$

$$\Psi_{210}(r, \theta, \varphi) = (32 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{a_0} \cos \theta e^{-\frac{r}{2a_0}} \quad \Psi_{210} := 2p_z$$

$$\Psi_{21\pm 1}(r, \theta, \varphi) = (64 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{a_0} \sin \theta e^{\pm i\varphi} e^{-\frac{r}{2a_0}} \quad (\Psi_{21+1} + \Psi_{21-1})/\sqrt{2} := 2p_x$$

$$(\Psi_{21+1} - \Psi_{21-1})/(i\sqrt{2}) := 2p_y$$

$$\Psi_{300}(r, \theta, \varphi) = (19683 \pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \left(27 - 18 \frac{r}{a_0} + 2 \frac{r^2}{a_0^2}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}} \quad \Psi_{300} := 3s$$

Οι αντίστοιχες ιδιοενέργειες είναι  $E_k = \hbar\Omega_k = -\frac{R_E}{n^2} = E_n$ , δηλαδή υπάρχει εκφυλισμός ως προς  $\ell, m$ .  $R_E = 13.6$  eV είναι η ενέργεια Rydberg και  $a_0$  είναι η ακτίνα Bohr.



- 1) Να ελεγχθεί αν όλες οι παραπάνω δεδομένες κυματοσυναρτήσεις είναι κανονικοποιημένες.
- 2) Να ελεγχθεί αν είναι άρτιες ή περιττές.
- 3) Να αποφανθείτε αν μηδενίζονται ή όχι τα ολοκληρώματα  
 $\vec{r}_{k_1 k_2} := \int_{\text{παντού}} dV \Phi_{k_1}^*(\vec{r}) \vec{r} \Phi_{k_2}(\vec{r})$ , δηλαδή τα στοιχεία πίνακα της θέσεως του ηλεκτρονίου ως προς τον πυρήνα. Τα ολοκληρώματα αυτά είναι ανάλογα με τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής  $\vec{P} = -e\vec{r}$ , δηλαδή τα  
 $\vec{P}_{k_1 k_2} := \int_{\text{παντού}} dV \Phi_{k_1}^*(\vec{r}) (-e)\vec{r} \Phi_{k_2}(\vec{r})$ .  
 Υπενθυμίζεται ότι εάν  $\vec{r}_{k_1 k_2} = \vec{0}$ , “ απαγορεύεται ” η οπτική μετάβαση  $k_1 \leftrightarrow k_2$ .
- 4) Προβλέψτε λοιπόν ποιες από τις μεταβάσεις μεταξύ των ιδιοκαταστάσεων που δίνονται επιτρέπονται και ελέγξτε αν ισχύουν οι “ κανόνες επιλογής ”  
 $\Delta l = \pm 1, \Delta m = 0, \pm 1$ .
- 5) Ελέγξτε αν οι δεδομένες  $\Phi_k(\vec{r})$  είναι ορθογώνιες.
- 6) Υπολογίστε τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής  $\vec{P}_{100\ 210}$  και  $\vec{P}_{100\ 21\pm 1}$
- 7) Είναι τα μέτρα των  $\vec{P}_{100\ 210}$  και  $\vec{P}_{100\ 21\pm 1}$  ίσα;

Θεωρήστε δεδομένα

$$A') \int_0^{\infty} e^{-\gamma r} r^n dr = \gamma^{-(n+1)} n! \quad \text{όπου } n = 1, 2, 3, \dots \text{ και } \gamma > 0.$$

B') σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \varphi)$ , η αντιστροφή ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς, δηλαδή η πράξη  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r}$ , αντιστοιχεί στις αλλαγές  $r' = r, \theta' = \pi - \theta$ , και  $\varphi' = \varphi + \pi$ .

Γ') Ισχύει η παρακάτω έκφραση για το διάνυσμα θέσεως

$$\vec{r} = \frac{r}{2} \sin \theta [(\hat{x} - i\hat{y})e^{i\varphi} + (\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\varphi}] + r \cos \theta \hat{z}.$$

Χρησιμοποιούμε την **αλλαγή μεταβλητής**  $q = \frac{r}{a_0}$  και τις **συντομογραφίες**  
 $n'l'm'n\ell m := \int d^3r \Psi_{n'l'm'}^*(\vec{r}) \Psi_{n\ell m}(\vec{r})$  και  $n'l'm'\vec{r}n\ell m := \int d^3r \Psi_{n'l'm'}^*(\vec{r}) \vec{r} \Psi_{n\ell m}(\vec{r})$ .

[Απάντηση 1]

$$\begin{aligned}
 100100 &:= \int d^3r \Psi_{100}^*(\vec{r}) \Psi_{100}(\vec{r}) = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} = \\
 &= \frac{1}{\pi a_0^3} \int_0^\infty dr r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{a_0^3}{\pi a_0^3} \int_0^\infty dq q^2 e^{-2q} [-\cos \theta]_0^\pi 2\pi \\
 &= 2 \int_0^\infty dq q^2 e^{-2q} [-\cos \pi + \cos 0] = 4 \int_0^\infty dq q^2 e^{-2q} \stackrel{*}{=} 4 \frac{2!}{2^{2+1}} = 1
 \end{aligned}$$

\* Χρησιμοποιήσαμε το δεδομένο  $A'$  με  $\gamma = 2, n = 2$ . Δηλαδή η 100 είναι κανονικοποιημένη, όπως αναμενόταν. Ομοίως ελέγχεται η κανονικοποίηση των υπολοίπων, υπολογίζοντας τα 200200, 210210, 21±121±1, 300300.

[Απάντηση 2] Ο έλεγχος της ομοτιμίας γίνεται με τη βοήθεια του δεδομένου  $B'$ . Να σημειωθεί ότι  $\sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ ,  $\cos \theta' = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ , ενώ  $e^{\pm i\varphi'} = e^{\pm i(\varphi+\pi)} = e^{\pm i\varphi} e^{\pm i\pi} = (-1)e^{\pm i\varphi}$ . Οπότε

$\Psi_{100}(-\vec{r}) = \Psi_{100}(\vec{r})$	*	άρτια
$\Psi_{200}(-\vec{r}) = \Psi_{200}(\vec{r})$	*	άρτια
$\Psi_{300}(-\vec{r}) = \Psi_{300}(\vec{r})$	*	άρτια
$\Psi_{210}(-\vec{r}) = -\Psi_{210}(\vec{r})$	**	περιττή
$\Psi_{21\pm 1}(-\vec{r}) = -\Psi_{21\pm 1}(\vec{r})$	***	περιττή

\* διότι εξαρτάται μόνο από το  $r$  και αυτό δεν αλλάζει με την πράξη  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r}$   
 \*\* επειδή εξαρτάται όχι μόνο από το  $r$  που δεν αλλάζει με την πράξη  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r}$ , αλλά και από το  $\cos \theta$  το οποίο θα γίνει  $\cos \theta' = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$   
 \*\*\* εξαρτάται από το  $r$  που δεν αλλάζει με την πράξη  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r}$ , από το  $\sin \theta$  που πάει στο  $\sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ , δηλαδή και αυτό δεν αλλάζει, αλλά το  $e^{\pm i\varphi'} = e^{\pm i(\varphi+\pi)} = e^{\pm i\varphi} e^{\pm i\pi} = (-1)e^{\pm i\varphi}$ , δηλαδή η περιττότητα της οφείλεται στο  $\varphi$ . Δηλαδή δείξαμε ότι οι 1s, 2s, 3s είναι άρτιες, ενώ η 2p<sub>z</sub> περιττή. Οι 2p<sub>x</sub> και 2p<sub>y</sub> είναι και αυτές περιττές αφού προκύπτουν από το άθροισμα ή τη διαφορά των περιττών συναρτήσεων  $\Psi_{21\pm 1}$ . Όπως άλλωστε γνωρίζουμε “εγκυκλοπαιδικά”, οι τύπου  $s$  είναι άρτιες και οι τύπου  $p$  περιττές.

[Απάντηση 3]  $\vec{r}_{k_1 k_2} := \int_{\text{παντού}} d^3r \Phi_{k_1}^*(\vec{r}) \vec{r} \Phi_{k_2}(\vec{r})$ . Στον Πίνακα 3.1 περιγράφονται συνοπτικά οι μεταβάσεις μεταξύ των πρώτων δύο φλοιών, δηλαδή για  $n = 1, 2$ . (Α) σημαίνει άρτια και (Β) περιττή. Παρατηρούμε ότι ισχύει ο **κανόνας επιλογής**  $\Delta\ell = \pm 1, \Delta m = 0, \pm 1$ , δηλαδή όταν αυτά ισχύουν, η μετάβαση επιτρέπεται.

$k_1 = \{n_1, \ell_1, m_1\}$	$k_2 = \{n_2, \ell_2, m_2\}$	$\Phi_{k_1}^*(\vec{r})$	$\Phi_{k_2}(\vec{r})$	$\Phi_{k_1}^*(\vec{r}) \vec{r} \Phi_{k_2}(\vec{r})$	$\vec{r}_{k_1 k_2}$	$\Delta\ell$	$\Delta m$
100 1s	200 2s	(Α)	(Α)	(Β) ΑΠΑΓ.	0	0	0
100 1s	210 2p <sub>z</sub>	(Α)	(Β)	(Α) ΕΠΙΤΡ.	≠ 0	1	0
100 1s	21 ± 1 2p <sub>x</sub> , 2p <sub>y</sub>	(Α)	(Β)	(Α) ΕΠΙΤΡ.	≠ 0	1	±1
100 1s	300 3s	(Α)	(Α)	(Β) ΑΠΑΓ.	0	0	0
200 2s	210 2p <sub>z</sub>	(Α)	(Β)	(Α) ΕΠΙΤΡ. *	≠ 0	1	0
200 2s	21 ± 1 2p <sub>x</sub> , 2p <sub>y</sub>	(Α)	(Β)	(Α) ΕΠΙΤΡ. *	≠ 0	1	±1
200 2s	300 3s	(Α)	(Α)	(Β) ΑΠΑΓ.	0	0	0
210 2p <sub>z</sub>	21 ± 1 2p <sub>x</sub> , 2p <sub>y</sub>	(Β)	(Β)	(Β) ΑΠΑΓ.	0	0	±1
210 2p <sub>z</sub>	300 3s	(Β)	(Α)	(Α) ΕΠΙΤΡ.	≠ 0	-1	0
21 ± 1 2p <sub>x</sub> , 2p <sub>y</sub>	300 3s	(Β)	(Α)	(Α) ΕΠΙΤΡ.	≠ 0	-1	∓1

Πίνακας 3.1: Επιτρεπόμενες (ΕΠΙΤΡ.) και απαγορευμένες (ΑΠΑΓ.) οπτικές μεταβάσεις στο άτομο του Υδρογόνου, μεταξύ των φλοιών 1 και 2, στα πλαίσια της προσεγγίσεως διπόλου. Το \* σημαίνει ότι στο άτομο του υδρογόνου η αρχική και η τελική κατάσταση αντιστοιχούν στην ίδια ενέργεια, είναι δηλαδή εκφυλισμένες, οπότε δεν υπάρχουν τέτοιες μεταβάσεις. Οι 2p<sub>x</sub> και 2p<sub>y</sub> κατασκευάζονται από το άθροισμα ή την διαφορά των 21 ± 1.

[Απάντηση 4]

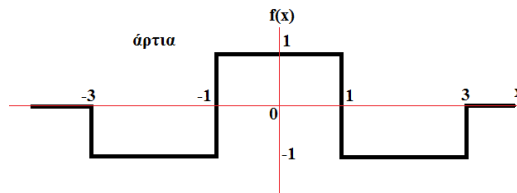
$$\begin{aligned}
 100200 &:= \int d^3r \Psi_{100}^{(A)*} \Psi_{200}^{(A)} = \frac{1}{\pi a_0^3 \sqrt{32}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi e^{-\frac{r}{a_0}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} = \\
 &= \frac{1}{4\pi a_0^3 \sqrt{2}} 4\pi \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} dr \stackrel{\text{θέτουμε}}{q=\frac{r}{a_0}} \frac{a_0^3}{a_0^3 \sqrt{2}} \int_0^\infty q^2 \cdot e^{-q} (2 - q) e^{-\frac{q}{2}} dq \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{3q}{2}} q^2 dq - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{3q}{2}} q^3 dq = \sqrt{2} \frac{2!}{\frac{3}{2}^{2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3!}{\frac{3}{2}^{3+1}} = 0
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το δεδομένο Α', εδώ με  $\gamma = \frac{3}{2}$ ,  $n = 2$  και  $\gamma = \frac{3}{2}$ ,  $n = 3$ . Δείξαμε δηλαδή ότι  $100200 = 0$ , άρα οι  $\Psi_{100}$  και  $\Psi_{200}$  είναι ορθογώνιες, όπως αναμενόταν. Ομοίως υπολογίζονται και τα υπόλοιπα εσωτερικά γινόμενα μεταξύ των διαφορετικών ιδιοσυναρτήσεων, τα οποία πράγματι μηδενίζονται.

Υπενθύμιση: Το ολοκλήρωμα σε όλο το χώρο μιας άρτιας συναρτήσεως δεν είναι εκ ταυτότητας μηδέν. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να μηδενίζεται, π.χ. δείτε το Σχήμα 3.12. Ενώ, το ολοκλήρωμα σε όλο το χώρο μιας περιττής συναρτήσεως εκ ταυτότητας μηδενίζεται διότι π.χ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) = \int_{-\infty}^0 dx f(x) + \int_0^{+\infty} dx f(x) = -\int_0^0 dy f(-y) + \int_0^{+\infty} dx f(x) = -\int_0^0 dy f(y) + \int_0^{+\infty} dx f(x) = 0$$

θέτουμε  $y = -x$



Σχήμα 3.12: Το ολοκλήρωμα σε όλο το χώρο μιας άρτιας συναρτήσεως δεν είναι εκ ταυτότητας μηδέν, αλλά μπορεί να μηδενίζεται, όπως π.χ. της εικονιζομένης άρτιας συναρτήσεως.

[Απάντηση 5]  $\vec{P}_{k'k} = -e\vec{r}_{k'k}$ , οπότε ο υπολογισμός των  $\vec{P}_{100210}$  και  $\vec{P}_{10021\pm 1}$  ανάγεται στον υπολογισμό των  $\vec{r}_{100210}$  και  $\vec{r}_{10021\pm 1}$ , αντιστοίχως.

$$\vec{r}_{100210} = 100 \vec{r}^2 10 =$$

$$\begin{aligned} \int d^3r \Psi_{100}^* \vec{r} \Psi_{210} &= \frac{1}{\pi a_0^3 \sqrt{32}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi e^{-\frac{r}{a_0}} \underbrace{\vec{r}}_{\text{δεδομένο } \Gamma'} \frac{r}{a_0} \cos \theta e^{-\frac{r}{2a_0}} \\ &= \frac{1}{4\pi a_0^3 \sqrt{2}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi e^{-\frac{r}{a_0}} \left\{ \frac{r}{2} \sin \theta [(\hat{x} - i\hat{y})e^{i\varphi} + (\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\varphi}] + r \cos \theta \hat{z} \right\} \\ &\quad \frac{r}{a_0} \cos \theta e^{-\frac{r}{2a_0}} \\ &= \frac{1}{4\pi a_0^3 \sqrt{2}} \underbrace{\int_0^\infty r^2 dr e^{-\frac{r}{a_0}} r \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}}}_{I(r)} \left\{ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta d\varphi \frac{1}{2} [(\hat{x} - i\hat{y})e^{i\varphi} + (\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\varphi}] \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi \cos^2 \theta \hat{z} \right\} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα το δεδομένο  $A'$ , εδώ με  $\gamma = \frac{3}{2}$  και  $n = 4$ .

$$I(r) = a_0^4 \int_0^\infty q^2 dq e^{-q} q q e^{-\frac{q}{2}} = a_0^4 \int_0^\infty q^4 dq e^{-\frac{3q}{2}} = a_0^4 \frac{4!}{\left(\frac{3}{2}\right)^{4+1}} = a_0^4 \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3^5} 2^5 = a_0^4 \frac{2^8}{3^4}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm i\varphi} d\varphi = \left[ \frac{e^{\pm i\varphi}}{i} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \hat{z} = 2\pi \hat{z} \int_1^{-1} \frac{d(\cos^3 \theta)}{3} \cdot (-1) = \frac{2\pi \hat{z}}{3} \int_1^{-1} 1^1 dy = \frac{2\pi \hat{z}}{3} [y]_{-1}^1 = \frac{4\pi \hat{z}}{3}$$

$$\frac{d(\cos^3 \theta)}{3} = 3 \cos^2 \theta (-1) \sin \theta \Rightarrow \frac{d(\cos^3 \theta)}{-3} = \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

Άρα

$$\vec{r}_{100210} = \frac{1}{4\pi a_0^3 \sqrt{2}} a_0^4 \cdot \frac{2^8}{3^4} \frac{4\pi \hat{z}}{3} = a_0 \hat{z} \frac{2^{15/2}}{3^5} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{100210} = 100 \vec{r}_{210} = \frac{2^{15/2}}{3^5} a_0 \hat{z}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{P}}_{100210} = -\frac{2^{15/2}}{3^5} e a_0 \hat{z}},$$

$$\boxed{|\vec{\mathcal{P}}_{100210}| = \frac{2^{15/2}}{3^5} e a_0}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{10021\pm 1} &= 100 \vec{r}_{21\pm 1} = \int d^3r \Psi_{100}^* \vec{r} \Psi_{21\pm 1} \\ &= \frac{1}{(\pi a_0^3)^{1/2}} \frac{1}{8(\pi a_0^3)^{1/2}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi e^{-\frac{r}{a_0}} \left\{ \frac{r}{2} \sin \theta [(\hat{x} - i\hat{y})e^{i\varphi} + (\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\varphi}] \right. \\ &\quad \left. + r \cos \theta \hat{z} \right\} \frac{r}{a_0} \sin \theta e^{\pm i\varphi} e^{-\frac{r}{2a_0}} = \\ &= \frac{1}{8\pi a_0^3} \int_0^\infty dr r^2 e^{-\frac{r}{a_0}} r \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi \left\{ \frac{\sin \theta}{2} [(\hat{x} - i\hat{y})e^{i\varphi} + (\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\varphi}] + \cos \theta \hat{z} \right\} \sin \theta e^{\pm i\varphi} \\ &= \frac{a_0}{8\pi} \int_0^\infty dq q^4 e^{-\frac{3q}{2}} \cdot \text{γωνιακή εξάρτηση} = \frac{a_0}{8\pi} \frac{4!}{\left(\frac{3}{2}\right)^{4+1}} \cdot \text{γωνιακή εξάρτηση} \\ &= \frac{a_0}{\pi} \frac{2^5}{3^4} \cdot \text{γωνιακή εξάρτηση} \end{aligned}$$

Αλλά

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm 2i\varphi} d\varphi = \left[ \frac{e^{\pm 2i\varphi}}{\pm 2i} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^{2\pi} e^{\pm i\varphi} d\varphi = \left[ \frac{e^{\pm i\varphi}}{\pm i} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\text{γωνιακή εξάρτηση} = \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^3 \theta}{2} \left[ 2\pi(\hat{x} \pm i\hat{y}) \right] = \pi[\hat{x} \pm i\hat{y}] \int_0^{\pi} d\theta \sin^3 \theta = \frac{4\pi}{3}[\hat{x} \pm i\hat{y}]$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin^3 \theta = \left[ \frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$\text{διότι} \quad \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right) = -\cos^2 \theta \cdot \sin \theta + \sin \theta = \sin \theta [1 - \cos^2 \theta] = \sin^3 \theta$$

Άρα

$$\vec{r}_{10021\pm 1} = \frac{a_0}{\pi} \cdot \frac{2^5}{3^4} \frac{4\pi}{3} (\hat{x} \pm i\hat{y}) \Rightarrow \vec{r}_{10021\pm 1} = a_0 \frac{2^7}{3^5} (\hat{x} \pm i\hat{y})$$

$$\vec{\mathcal{P}}_{10021\pm 1} = -\frac{2^7}{3^5} (\hat{x} \pm i\hat{y}) e a_0, \quad |\vec{\mathcal{P}}_{10021\pm 1}| = \frac{2^{15/2}}{3^5} e a_0$$

$$[\text{Απάντηση 6}] \quad \text{Άρα} \quad |\vec{\mathcal{P}}_{100210}| = |\vec{\mathcal{P}}_{10021\pm 1}|$$

Περισσότερες ενδεικτικές πράξεις στο τέλος των ασκήσεων του παρόντος κεφαλαίου.

### 3.12 Αναφορές 3ου Κεφαλαίου.

Η αρίθμηση αναφέρεται στη βιβλιογραφία όπως αυτή παρατίθεται συνολικά πριν από τα Παραρτήματα.

[30] R.M. Eisberg, Θεμελιώδης Σύγχρονη Φυσική, Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού, 4η έκδοση (1995), Αθήνα, ISBN: 9607258142.

[31] Created in Orbital viewer, free to use (<http://www.orbitals.com/orb/ov.htm>).

[32] Wikipedia Atomic orbital. Created in Orbital viewer (<http://www.orbitals.com/orb/ov.htm>) Electron orbital series. Dhatfield - Own work, Public Domain, many files, Uploaded by Dhatfield, Uploaded: September 25, 2008.

# Κεφάλαιο 4

## ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ - ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ. ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ.

### 4.1 Πλήρης Κβαντική Προσέγγιση έναντι Ημικλασικής Προσεγγίσεως.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο κάναμε τη λεγόμενη Ημικλασική Προσέγγιση (δισταθμικό σύστημα κβαντικά - ΗΜ πεδίο κλασικά). Για το ΗΜ πεδίο χρησιμοποιήσαμε τη γλώσσα των ανυσματικών μεγεθών  $\vec{E}, \vec{B}$ . Υποθέσαμε, λοιπόν, ότι το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερό. Έπρεπε η ΗΜ ακτινοβολία να είναι αρκετά πυκνή ώστε το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου να μην επηρεάζεται πρακτικά από την απορρόφηση ή την εκπομπή φωτονίου.

Στο παρόν κεφάλαιο κάνουμε Πλήρη Κβαντική Προσέγγιση, δηλαδή αντιμετωπίζουμε δισταθμικό σύστημα και ΗΜ πεδίο κβαντικά. Θα λέγαμε ότι προσπαθούμε να εκφράσουμε το ΗΜ πεδίο στη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων. Θα πρέπει επομένως να βρεθεί μια έκφραση της Χαμιλτονιανής του ΗΜ πεδίου που να επιτρέπει το μετασχηματισμό της στη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων αντί της γλώσσας που χρησιμοποιεί τα ανυσματικά μεγέθη  $\vec{E}, \vec{B}$ . Αυτό θα γίνει στο παράδειγμα του στάσιμου ΗΜ κύματος σε κοιλότητα, στην Ενότητα 4.3. Πριν από αυτό, στην Ενότητα 4.2, θα διερευνήσουμε τη σχέση μεταξύ κυματανυσμάτων, κυκλικών συχνοτήτων και αρχικών φάσεων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Στη συνέχεια, στην Ενότητα 4.4 θα θυμηθούμε τους τελεστές καταστροφής και δημιουργίας φωτονίων και θα κβαντωθεί η Χαμιλτονιανή που περιγράφει το ΗΜ πεδίο, καθώς και το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, ξεχωριστά, με τη βοήθεια των τελεστών αυτών.



Άρα θα έχουμε μια Χαμιλτονιανή για το ΗΜ πεδίο. Κατόπιν, στην Ενότητα 4.5 θα περιγράψουμε με τη βοήθεια σπινόρων το δισταθμικό σύστημα και ειδικότερα την αναβίβαση και την καταβίβαση ενός ηλεκτρονίου μεταξύ των δύο ενεργειακών σταθμών του. Άρα, θα έχουμε και μια Χαμιλτονιανή για το δισταθμικό σύστημα. Μετά, θα κατασκευάσουμε και τη Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου, στην Ενότητα 4.8. Οπότε, θα είμαστε σε θέση να ορίσουμε μια Ολική Χαμιλτονιανή που να περιγράφει το ΗΜ πεδίο, το δισταθμικό σύστημα, αλλά και τη μεταξύ τους αλληλεπίδραση (Χαμιλτονιανές Rabi και Jaynes-Cummings). Στην Ενότητα 4.6 συνοψίζουμε τις σχέσεις μεταθέσεως για μποζόνια (π.χ. φωτόνια) και αντιμεταθέσεως για φερμιόνια (π.χ. ηλεκτρόνια). Στην Ενότητα 4.9 συνοψίζονται οι Χαμιλτονιανές. Στην Ενότητα 4.10 υπολογίζονται μέσες (αναμενόμενες) τιμές χρησιμων μεγεθών για τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings στην απορρόφηση και στην εκπομπή φωτονίου. Ακολουθούν δύο παραδείγματα εφαρμογής της Χαμιλτονιανής Jaynes-Cummings στην απορρόφηση φωτονίου (Ενότητα 4.11) και στην εκπομπή φωτονίου (Ενότητα 4.12), τα οποία καταλήγουν στην περιγραφή των ταλαντώσεων του πληθυσμού των φωτονίων και της καταλήψεως των ενεργειακών σταθμών.

## 4.2 Σχέση μεταξύ κυματανυσμάτων, κυκλικών συχνοτήτων και φάσεων ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου.

Ας θυμηθούμε τις Εξισώσεις Maxwell στη διατύπωση με όρους ολικού φορτίου και ολικού ρεύματος και συγκεκριμένα στη διαφορική μορφή

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \text{νόμος Gauss ηλεκτρισμού} \quad (4.1\alpha')$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{νόμος Gauss μαγνητισμού} \quad (4.1\beta')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{νόμος Faraday} \quad (4.1\gamma')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{νόμος Ampère και διόρθωση Maxwell} \quad (4.1\delta')$$

Στο κενό όπου  $\rho = 0$  και  $\vec{J} = \vec{0}$  οι Εξ. 4.1α', 4.1β', 4.1γ', 4.1δ' γίνονται

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.2\alpha')$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.2\beta')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.2\gamma')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.2\delta')$$

Ισχύουν οι ταυτότητες

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Delta}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Delta}) - \nabla^2 \vec{\Delta} \quad (4.3)$$

$$\nabla^2 \vec{\Delta} := (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Delta} \quad (4.4)$$

Οπότε από τις Εξ. 4.2 προκύπτει

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

Δοκιμάζοντας στην Εξ. 4.5 λύσεις της μορφής

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} \quad (4.6)$$

προκύπτει

$$|\vec{k}| := k = \frac{\omega}{c}. \quad (4.7)$$

Ομοίως από τις Εξ. 4.2 προκύπτει

$$\nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (4.8)$$

Δοκιμάζοντας στην Εξ. 4.8 λύσεις της μορφής

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta')} \quad (4.9)$$

προκύπτει πάλι η εξίσωση Εξ. 4.7. Επειδή  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $c = \lambda\nu$ , από την Εξ. 4.7 προκύπτει  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Σημειωτέον ότι δεδομένου ότι παραγωγίζουμε ως προς  $x, y, z, t$ , οι “αρχικές φάσεις”  $\delta, \delta'$  παραμένουν αυθαίρετες, δηλαδή δεν προσδιορίζονται από τις έως τώρα πράξεις.

Για τις λύσεις 4.6 και 4.9, μετά από πράξεις, διαπιστώνουμε ότι ο τελεστής  $\vec{\nabla}$  μπορεί να αντικατασταθεί με  $i\vec{k}$ , σχηματικά

$$\boxed{\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}} \quad (4.10)$$

Διότι αν θεωρήσουμε πεδίο της μορφής

$$\vec{\Delta} = \vec{\Delta}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} := (\Delta_{0x}, \Delta_{0y}, \Delta_{0z}) e^{\odot} \quad (4.11)$$

τότε

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Delta} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) = \frac{\partial \Delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta_z}{\partial z} = \\ &\Delta_{0x} e^{\odot} i k_x + \Delta_{0y} e^{\odot} i k_y + \Delta_{0z} e^{\odot} i k_z = i(k_x, k_y, k_z) \cdot (\Delta_{0x}, \Delta_{0y}, \Delta_{0z}) e^{\odot} = i\vec{k} \cdot \vec{\Delta}, \end{aligned}$$

αλλά και

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{\Delta} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Delta_{0x}e^{\odot} & \Delta_{0y}e^{\odot} & \Delta_{0z}e^{\odot} \end{vmatrix} \\
&= \hat{i} \left( \frac{\partial \Delta_{0z}e^{\odot}}{\partial y} - \frac{\partial \Delta_{0y}e^{\odot}}{\partial z} \right) - \hat{j} \left( \frac{\partial \Delta_{0z}e^{\odot}}{\partial x} - \frac{\partial \Delta_{0x}e^{\odot}}{\partial z} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial \Delta_{0x}e^{\odot}}{\partial y} - \frac{\partial \Delta_{0y}e^{\odot}}{\partial x} \right) \\
&= \hat{i} \left( ik_y \Delta_z - ik_z \Delta_y \right) - \hat{j} \left( ik_x \Delta_z - ik_z \Delta_x \right) + \hat{k} \left( ik_y \Delta_x - ik_x \Delta_y \right) \\
&= i \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ k_x & k_y & k_z \\ \Delta_x & \Delta_y & \Delta_z \end{vmatrix} = i \vec{k} \times \vec{\Delta}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\text{Εξ. 4.2}\alpha', 4.6 \quad \Rightarrow \quad i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.12\alpha')$$

$$\text{Εξ. 4.2}\beta', 4.9 \quad \Rightarrow \quad i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.12\beta')$$

$$\text{Εξ. 4.2}\gamma', 4.6, 4.9 \Rightarrow \quad i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega\vec{B} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega\vec{B} \quad (4.12\gamma')$$

$$\text{Εξ. 4.2}\delta', 4.6, 4.9 \Rightarrow \quad i\vec{k} \times \vec{B} = \mu_0\epsilon_0(-i\omega)\vec{E} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{B} = -\mu_0\epsilon_0\omega\vec{E} \quad (4.12\delta')$$

Από τις Εξ. 4.12α', 4.12β', 4.12γ', 4.12δ', με ένα σύντομο λογικό παιχνίδι, προκύπτει η σχέση των κατευθύνσεων των διανυσμάτων  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{k}$ , συγκεκριμένα προκύπτει ότι το εξωτερικό γινόμενο του  $\vec{E}$  με το  $\vec{B}$  είναι ομόρροπο του  $\vec{k}$ , δηλαδή

$$\boxed{\vec{E} \times \vec{B} \uparrow\uparrow \vec{k}} \quad (4.13)$$

και μάλιστα τα  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{k}$  έχουν τη σχέση κατευθύνσεων και καθετοτήτων που αποδίδεται στο Σχήμα 4.1. Η σχέση 4.13 μπορεί να αποδειχθεί και εξειδικευτεί και με μαθηματικά, χρήσει της ταυτότητας

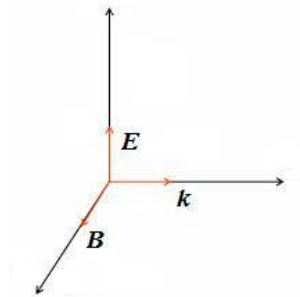
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \quad (4.14)$$

Για παράδειγμα, ξεκινώντας από την Εξ. 4.12γ' έχουμε  $\vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega \vec{E} \times \vec{B} \Rightarrow (\vec{E} \cdot \vec{E})\vec{k} - (\vec{E} \cdot \vec{k})\vec{E} = \omega \vec{E} \times \vec{B}$ , αλλά λόγω της Εξ. 4.12α' προκύπτει

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{|\vec{E}|^2}{\omega} \vec{k} \quad (4.15)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ήδη αποδεδειγμένες καθετότητες των κατευθύνσεων των  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{k}$ , από τις Εξ. 4.12γ'-4.12δ' προκύπτει

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = c \quad (4.16)$$



Σχήμα 4.1:  $\vec{E} \times \vec{B} \uparrow \vec{k}$ .

Ας δοκιμάσουμε τώρα στις Εξ. 4.5 και 4.8, αντί των λύσεων 4.6 και 4.9, λύσεις της μορφής

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega_e t + \delta_e)} = \vec{E}_0 e^{\textcircled{\ominus}}, \quad (4.17)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}_b \cdot \vec{r} - \omega_b t + \delta_b)} = \vec{B}_0 e^{\textcircled{\textcircled{B}}}, \quad (4.18)$$

δηλαδή **ας θεωρήσουμε ότι τα  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  και  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  δεν έχουν κατ' ανάγκην ίσα κυματανύσματα  $\vec{k}_e$  και  $\vec{k}_b$ , κυκλικές συχνότητες  $\omega_e$  και  $\omega_b$  και "αρχικές φάσεις"  $\delta_e$  και  $\delta_b$ . Τότε**

$$\text{Εξ. 4.2α'}, 4.17 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_e \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.19\alpha')$$

$$\text{Εξ. 4.2β'}, 4.18 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_b \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.19\beta')$$

$$\text{Εξ. 4.2γ'}, 4.17, 4.18 \Rightarrow \quad \vec{k}_e \times \vec{E} = \omega_b \vec{B} \quad (4.19\gamma')$$

$$\text{Εξ. 4.2δ'}, 4.17, 4.18 \Rightarrow \quad \vec{k}_b \times \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega_e \vec{E} \quad (4.19\delta')$$

και δεν προκύπτει κάποια σχέση μεταξύ των  $\delta_e, \delta_b$ . Από την Εξ. 4.19γ' προκύπτει

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ k_{ex} & k_{ey} & k_{ez} \\ E_{0x}e^{\ominus} & E_{0y}e^{\ominus} & E_{0z}e^{\ominus} \end{vmatrix} = (\omega_b B_{0x}e^{\oplus}, \omega_b B_{0y}e^{\oplus}, \omega_b B_{0z}e^{\oplus}) \Rightarrow \quad (4.20\alpha')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{ey}E_{0z}e^{\ominus} - k_{ez}E_{0y}e^{\ominus} = \omega_b B_{0x}e^{\oplus} \\ k_{ez}E_{0x}e^{\ominus} - k_{ex}E_{0z}e^{\ominus} = \omega_b B_{0y}e^{\oplus} \\ k_{ex}E_{0y}e^{\ominus} - k_{ey}E_{0x}e^{\ominus} = \omega_b B_{0z}e^{\oplus} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (4.20\beta')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{ey}E_{0z} - k_{ez}E_{0y}}{\omega_b B_{0x}} = e^{\oplus}e^{\ominus*} = e^{i[(\vec{k}_b - \vec{k}_e) \cdot \vec{r} - (\omega_b - \omega_e)t + (\delta_b - \delta_e)]} \\ \frac{k_{ez}E_{0x} - k_{ex}E_{0z}}{\omega_b B_{0y}} = e^{\oplus}e^{\ominus*} = \text{το ίδιο} \\ \frac{k_{ex}E_{0y} - k_{ey}E_{0x}}{\omega_b B_{0z}} = e^{\oplus}e^{\ominus*} = \text{το ίδιο} \end{array} \right\} \quad (4.20\gamma')$$

σταθερές συναρτήσεις των  $\vec{r}, t$

Αν θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t$ , επειδή τα αριστερά μέρη είναι σταθερά, θα πρέπει και τα δεξιά να είναι, δηλαδή να μην εξαρτώνται από το  $\vec{r}$ , άρα

$$\vec{k}_b = \vec{k}_e. \quad (4.21)$$

Αν θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη θέση  $\vec{r}$ , επειδή τα αριστερά μέρη είναι σταθερά, θα πρέπει και τα δεξιά να είναι, δηλαδή να μην εξαρτώνται από το  $t$ , άρα

$$\omega_b = \omega_e. \quad (4.22)$$

Τέλος, από τις Εξ. 4.21-4.22 έπεται ότι τα δεξιά μέρη θα ισούνται με  $e^{i(\delta_b - \delta_e)} = \cos(\delta_b - \delta_e) + i \sin(\delta_b - \delta_e)$ . Αν τα αριστερά μέρη ήταν πραγματικά, τότε  $\sin(\delta_b - \delta_e) = 0 \Rightarrow \delta_b - \delta_e = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ , οπότε υπάρχει μερική λύση  $\delta_b = \delta_e$ . Τα  $\vec{E}_0, \vec{B}_0$  όμως είναι εν γένει μιγαδικά, άρα καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{k_{ey}E_{0z} - k_{ez}E_{0y}}{\omega_b B_{0x}} &= e^{i(\delta_b - \delta_e)} \\ \frac{k_{ez}E_{0x} - k_{ex}E_{0z}}{\omega_b B_{0y}} &= e^{i(\delta_b - \delta_e)} \\ \frac{k_{ex}E_{0y} - k_{ey}E_{0x}}{\omega_b B_{0z}} &= e^{i(\delta_b - \delta_e)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

### 4.3 Στάσιμο ΗΜ κύμα σε κοιλότητα.

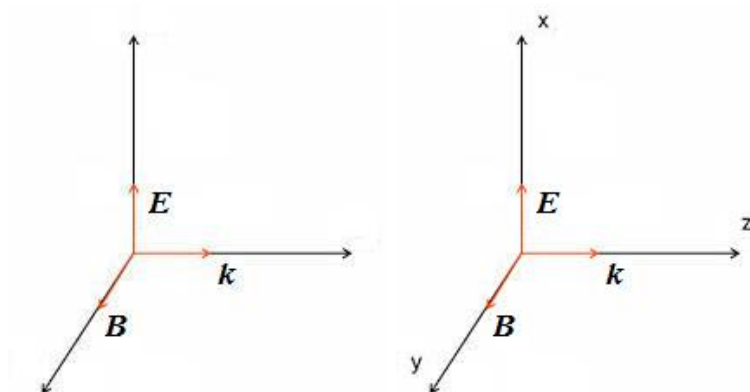
Στην Ενότητα αυτό θα κατασκευάσουμε μια έκφραση της Χαμιλτονιανής του ΗΜ πεδίου που να επιτρέπει το μετασχηματισμό της στη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων αντί της γλώσσας που χρησιμοποιεί τα ανυσματικά μεγέθη  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ . Αυτό θα γίνει στο παράδειγμα του στάσιμου ΗΜ κύματος σε κοιλότητα.

Πριν από αυτό, ας θυμηθούμε ότι για τρέχοντα ΗΜ κύματα, με τις προϋποθέσεις της Ενότητας 4.2, έχουμε

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} \quad (4.24)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} \quad (4.25)$$

και  $\vec{E} \times \vec{B} \uparrow \uparrow \vec{k}$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2 αριστερά. Πρόκειται για κυματικές εξισώσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, αντιστοίχως, σε 3 διαστάσεις και τις λύσεις τους.



Σχήμα 4.2: [Αριστερά] Για τρέχοντα ΗΜ κύματα έχουμε  $\vec{E} \times \vec{B} \uparrow \uparrow \vec{k}$ . [Δεξιά] Υποθέτουμε ότι  $\vec{E} \times \vec{B} \uparrow \uparrow \vec{k}$  με τον προσανατολισμό σε άξονες που δείχνει το σχήμα.

Αν ο προσανατολισμός σε άξονες είναι αυτός που δείχνει το Σχήμα 4.2 δεξιά, τότε

$$\nabla^2 \vec{E}_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial t^2} \quad (4.26)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{x0} e^{i(k_z z - \omega t + \delta)} = \vec{E}_x(z, t) \quad (4.27)$$

$$\nabla^2 \vec{B}_y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_y}{\partial t^2} \quad (4.28)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_{0y} e^{i(k_z z - \omega t + \delta)} = \vec{B}_y(z, t) \quad (4.29)$$

οπότε

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \quad (4.31)$$

Πρόκειται για κυματικές εξισώσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, αντιστοίχως, σε 1 διάσταση. Ας δούμε τώρα αν βγαίνει κάποιο συμπέρασμα από τις εξισώσεις του Maxwell στο κενό.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{Εξ. 4.2}\alpha') &\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial z}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \\ &\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \text{ πράγμα αναμενόμενο.} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Εξ. 4.2}\beta') &\Rightarrow \cancel{\frac{\partial B_x}{\partial x}} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial z}} = 0 \Rightarrow 0 + \frac{\partial B_y}{\partial y} + 0 = 0 \Rightarrow \\ &\frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \text{ πράγμα αναμενόμενο.} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Εξ. 4.2}\gamma') &\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{j} \frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \hat{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\hat{j} \frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \\ &\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Εξ. 4.2}\delta') \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{i} \Rightarrow i \left( -\frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = i \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow$$



$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (4.35)$$

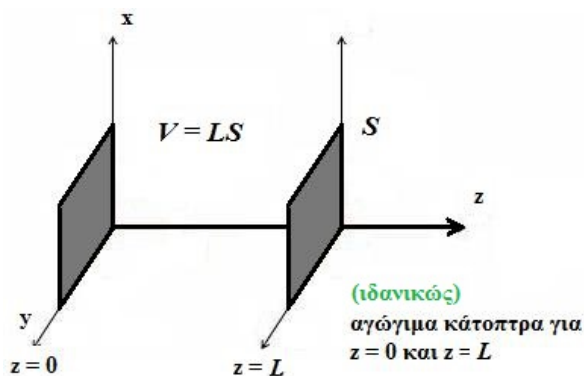
♠ Τώρα βάζουμε ιδανικώς αγωγίμα **κάτοπτρα** στις θέσεις  $z = 0$  και  $z = L$  (Σχήμα 4.3). Το προσπίπτον σε κάθε κάτοπτρο κύμα θα συμβάλει με το ανακλώμενο, άρα θα δημιουργηθούν **στάσιμα κύματα**.

Οι Εξ. 4.30 και 4.34 εξασκολουθούν να ισχύουν

Οι Εξ. 4.31 και 4.35 για το γραμμικό συνδυασμό

των προσπιπτόντων και ανακλωμένων κυμάτων

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} & \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} & \frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned}$$

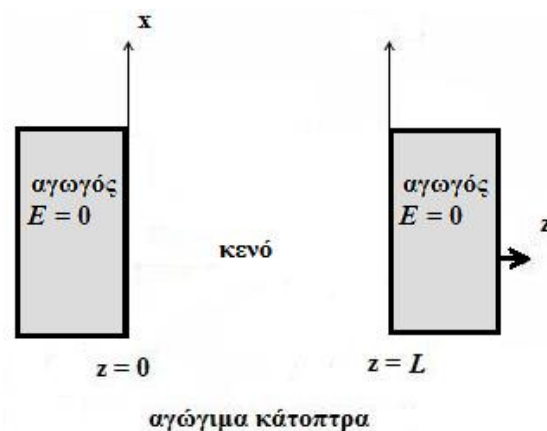


Σχήμα 4.3: Στις θέσεις  $z = 0$  και  $z = L$  τοποθετούνται επίπεδα, ιδανικώς αγωγίμα κάτοπτρα.

Αναζητούμε λύση με μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών, υποθέτοντας ότι

$$E_x(z, t) = \mathcal{N}Z(z)T(t) \quad (4.36)$$

Ας θυμηθούμε τις συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια ιδανικού αγωγού - κενού ή κατά προσέγγιση αέρα (θυμηθείτε το Σχήμα 1.10). Η εφαπτομενική συνιστώσα του



Σχήμα 4.4: Αγωγή κάτοπτρα πριν από  $z = 0$  και μετά από  $z = L$ .

$\vec{E}$  μηδενίζεται στη διεπιφάνεια αυτή. Επειδή το  $\vec{E}$  έχει μόνο  $x$  συνιστώσα (Εξ. 4.27), και τα επίπεδα, ιδανικώς αγωγή κάτοπτρα τοποθετούνται στις θέσεις  $z = 0$  και  $z = L$ , οπότε το  $\vec{E}$  είναι παράλληλο σε αυτά, έπεται ότι

$$E_x(0, t) = 0 = E_x(L, t), \forall t. \quad (4.37)$$

Από τις Εξ. 4.30 και 4.36 έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{N}T(t) \frac{d^2 Z}{dz^2} &= \mathcal{N} \frac{1}{c^2} Z(z) \frac{d^2 T}{dt^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2}}_{f(z)} &= \underbrace{\frac{1}{T(t)} \frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2}}_{g(t)} \stackrel{\text{άρα}}{=} \text{σταθερά} := -k^2, \end{aligned}$$

$\forall z, \forall t$

αρκεί  $Z(z) \neq 0$  και  $T(t) \neq 0$ , ενώ για  $Z(z) = 0$  και  $T(t) = 0$  ισχύει η τετριμμένη λύση. Άρα

$$\boxed{\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z(z) = 0} \quad (4.38)$$

και

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 c^2 T(t) = 0}. \quad (4.39)$$

• Ας λύσουμε αρχικά την Εξ. 4.38, δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής  $e^{\tilde{\lambda}z}$ , οπότε προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\tilde{\lambda}^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda}^2 = -k^2 \Rightarrow \tilde{\lambda} = \pm ik, \quad \text{π.χ. ας διαλέξουμε } k \in \mathfrak{R}_+$$

Άρα, ουσιαστικά, η λύση θα είναι της μορφής

$$Z(z) = Ae^{ikz} + Be^{-ikz} \quad (4.40)$$

$$Z(0) = 0 \quad \text{συνοριακή συνθήκη 1} \quad (4.41)$$

$$Z(L) = 0 \quad \text{συνοριακή συνθήκη 2} \quad (4.42)$$

όπου λάβαμε υπ' όψιν τις συνοριακές συνθήκες 4.37. Από τις Εξ. 4.40 και 4.41 συνεπάγεται ότι  $A + B = 0 \Rightarrow B = -A$ , οπότε η Εξ. 4.40 γίνεται

$$Z(z) = Ae^{ikz} - Ae^{-ikz} = 2iA \sin(kz) \quad (4.43)$$

και εφαρμόζοντας την Εξ. 4.42

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = m\pi, m \in \mathcal{Z}. \quad (4.44)$$

Δεδομένου όμως ότι διαλέξαμε παραπάνω  $k \in \mathfrak{R}_+$  θα πρέπει  $m \in \mathcal{N}$ , και για μη μηδενική λύση θα πρέπει  $m \in \mathcal{N}^*$ , οπότε  $k \in \mathfrak{R}_+^*$ . Συνοπτικά το  $k$  εξαρτάται από ένα φυσικό, μη μηδενικό δείκτη, δηλαδή

$$\boxed{k_m = \frac{m\pi}{L}, m \in \mathcal{N}^*} \quad (4.45)$$

Άρα

$$Z_m(z) = 2Ai \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left. \vphantom{Z_m(z)} \right\} \Rightarrow$$

Κι αν απαιτήσουμε οι  $Z_m$  να είναι ορθοκανονικές

$$\int_0^L dz Z_m^*(z) Z_l(z) = \delta_{ml}$$

$$\Rightarrow \int_0^L dz |2iA|^2 \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{L}\right) = \delta_{ml} \Rightarrow \int_0^\pi \frac{L}{\pi} d\psi |2iA|^2 \sin(m\psi) \sin(l\psi) = \delta_{ml}$$

όπου ορίσαμε  $\psi = \frac{\pi z}{L}$ , οπότε  $d\psi = \frac{\pi}{L} dz$ . Τότε

$$\frac{L}{\pi} 4 |A|^2 \int_0^\pi d\psi \sin(m\psi) \sin(l\psi) = \delta_{ml}.$$

Αλλά

$$\int_0^\pi d\psi \sin(m\psi) \sin(l\psi) = \frac{\pi}{2} \delta_{ml}, \quad (4.46)$$

ενώ ισχύει επίσης

$$\int_0^\pi d\psi \cos(m\psi) \cos(l\psi) = \frac{\pi}{2} \delta_{ml}. \quad (4.47)$$

Επομένως

$$\frac{L}{\pi} 4 |A|^2 \frac{\pi}{2} \delta_{ml} = \delta_{ml} \Rightarrow |A|^2 = \frac{1}{2L}.$$

Ας διαλέξουμε κάτι βολικό, π.χ.  $A = \frac{1}{\sqrt{2L}}(-i)$ .

Συνεπώς

$$\boxed{Z_m(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)} \quad (4.48)$$

• Στη συνέχεια ας λύσουμε την Εξ. 4.39. Ας ορίσουμε

$$\omega := kc > 0, \quad (4.49)$$

οπότε  $\omega^2 = k^2 c^2$ . Χρησιμοποιώντας την Εξ. 4.45

$$\boxed{\omega_m = \frac{m\pi c}{L}, m \in \mathcal{N}^*} \quad (4.50)$$

Δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής  $e^{\tilde{\lambda}t}$ , προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\tilde{\lambda}^2 + \omega_m^2 = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda} = \pm i\omega_m, \quad \omega_m \in \mathfrak{R}_+^*. \quad (4.51)$$

Άρα, ουσιαστικά, η λύση θα είναι της μορφής

$$T(t) = \Gamma e^{i\omega_m t} + \Delta e^{-i\omega_m t} \quad (4.52)$$

Κι αν θέσουμε την αρχική συνθήκη

$$T(0) = 0, \quad (4.53)$$

προκύπτει  $\Gamma + \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = -\Gamma$ , οπότε

$$T(t) = \Gamma e^{i\omega_m t} - \Gamma e^{-i\omega_m t} = 2i\Gamma \sin(\omega_m t) \Rightarrow \quad (4.54)$$

$$T_m(t) = 2i\Gamma \sin\left(\frac{m\pi c}{L}t\right) \quad (4.55)$$

Κι αν απαιτήσουμε οι  $T_m$  να είναι ορθοκανονικές, σε ένα χρονικό πλαίσιο από το χρόνο 0 έως κάποιο χρόνο  $t_\kappa$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_0^{t_\kappa} dt T_m^*(t) T_l(t) = \delta_{ml} &\Rightarrow \int_0^{t_\kappa} dt |2i\Gamma|^2 \sin\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{l\pi ct}{L}\right) = \delta_{ml} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4|\Gamma|^2 \int_0^{t_\kappa} dt \sin\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{l\pi ct}{L}\right) = \delta_{ml}. \end{aligned}$$

Θέτοντας  $\chi = \frac{\pi ct}{L}$ , οπότε  $d\chi = \frac{\pi c}{L} dt$ , καταλήγουμε στη σχέση

$$4|\Gamma|^2 \frac{L}{\pi c} \int_0^{\frac{\pi c}{L} \cdot t_\kappa} d\chi \sin(m\chi) \sin(l\chi) = \delta_{ml} \quad (4.56)$$

Άρα, έχοντας υπό όψη την Εξ. 4.46, είναι βολικό να θέσουμε  $\frac{\pi c}{L} \cdot t_\kappa = \pi \Rightarrow$

$$\boxed{t_\kappa = \frac{L}{c} := \tau} \quad (4.57)$$

Έτσι ορισμένο το  $\tau$  είναι ο χρόνος πτήσεως του φωτονίου διαμέσου της κοιλότητας (time of photon flight through cavity), άρα δεν ήταν παράλογο που το θέσαμε έτσι. Συνεπώς, εν τέλει, η ορθοκανονικοποίηση είναι

$$\int_0^\tau dt T_m^*(t) T_l(t) = \delta_{ml}. \quad (4.58)$$

Τελικά έχουμε

$$4|\Gamma|^2 \frac{L}{\pi c} \int_0^\pi d\chi \sin(m\chi) \sin(l\chi) = \delta_{ml} \Rightarrow |\Gamma| = \sqrt{\frac{c}{2L}}$$

Κι αν διαλέξουμε κάτι βολικό π.χ.  $\Gamma = (-i)\sqrt{\frac{c}{2L}}$ , τελικά έχουμε

$$\boxed{T_m(t) = \sqrt{\frac{2c}{L}} \sin\left(\frac{m\pi c}{L}t\right)} \quad (4.59)$$

Άρα, συνοψίζοντας, με τη βοήθεια των Εξ. 4.36, 4.48, 4.59 καταλήγουμε στην

$$\boxed{E_x^m(z, t) = \frac{2\sqrt{c}}{L} \mathcal{N} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi ct}{L}\right)} \quad (4.60)$$

Όσον αφορά τις μονάδες, θα πρέπει  $[\frac{2\sqrt{c}}{L}\mathcal{N}] = \frac{V}{m} = \frac{N}{C} \Rightarrow$

$$[\mathcal{N}] = \frac{V}{\sqrt{m/s}}. \quad (4.61)$$

Για να προσδιορίσουμε το μαγνητικό πεδίο θα χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 4.35 σε συνδυασμό με την Εξ. 4.60, οπότε προκύπτει

$$\frac{\partial B_y^m}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{2\sqrt{c}}{L} \mathcal{N} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \frac{m\pi c}{L} \cos\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \Rightarrow \quad (4.62)$$

$$\int_0^{z'} dz \frac{\partial B_y^m}{\partial z} = -\frac{2m\pi}{\sqrt{c}L^2} \mathcal{N} \cos\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \int_0^{z'} dz \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \Rightarrow \quad (4.63)$$

$$B_y^m(z', t) - B_y^m(0, t) = -\frac{2m\pi}{\sqrt{c}L^2} \mathcal{N} \cos\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \frac{L}{m\pi} \left[ -\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \right]_0^{z'} \Rightarrow \quad (4.64)$$

$$B_y^m(z', t) - B_y^m(0, t) = \frac{2\mathcal{N}}{\sqrt{c}L} \cos\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \left[ \cos\left(\frac{m\pi z'}{L}\right) - \cos 0 \right] \cdot 1 \quad (4.65)$$

Άρα, ορίζοντας κατάλληλα την τιμή του  $B_y^m(0, t)$  προκύπτει

$$\boxed{B_y^m(z, t) = \frac{2\mathcal{N}}{\sqrt{c}L} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi ct}{L}\right)} \quad (4.66)$$

Για την πυκνότητα ενέργειας ισχύει

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\epsilon_0}{2} [E^2 + c^2 B^2]. \quad (4.67)$$

Σημειώνουμε ότι οι μονάδες για την πυκνότητα ενέργειας είναι  $[U] = \frac{J}{m^3}$ . Για παράδειγμα  $[\frac{\epsilon_0}{2} E^2] = \frac{F}{m} \frac{V^2}{m^2} = \frac{CV^2}{Vm^3} = \frac{J}{m^3}$  και  $[\frac{B^2}{2\mu_0}] = \frac{T^2 A}{Tm} = \frac{TA}{m} = \frac{N}{m^2} = \frac{Nm}{m^3} = \frac{J}{m^3}$ , π.χ. λόγω των γνωστών σχέσεων  $B = \mu_0 H$ ,  $F = BI l$  και  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ . Άρα, από τις Εξ. 4.60, 4.66, 4.67 βρίσκουμε την πυκνότητα ενέργειας του  $m$  τρόπου

$$U_m = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{4c\mathcal{N}^2}{L^2} \left[ \sin^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin^2\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos^2\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \right]. \quad (4.68)$$

Άρα, η ενέργεια του  $m$  τρόπου, η οποία υπολογίζεται ολοκληρώνοντας την πυκνότητα ενέργειας του  $m$  τρόπου στην κοιλότητα όγκου  $V = LS$ ,

$$E_m = \int_{V=LS} d^3r U_m, \quad (4.69)$$

είναι

$$E_m = \frac{2\epsilon_0 c \mathcal{N}^2 S}{L^2} \left[ \sin^2 \left( \frac{m\pi ct}{L} \right) \int_0^L dz \sin^2 \left( \frac{m\pi z}{L} \right) + \cos^2 \left( \frac{m\pi ct}{L} \right) \int_0^L dz \cos^2 \left( \frac{m\pi z}{L} \right) \right].$$

Θέτουμε  $\psi = \frac{\pi z}{L} \Rightarrow d\psi = \frac{\pi}{L} dz$ , άρα με τη βοήθεια των Εξ. 4.46-4.47, τα ολοκληρώματα στο  $z$  γίνονται  $\frac{L}{\pi} \int_0^\pi d\psi \sin^2(m\psi) = \frac{L}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{L}{2}$  και  $\frac{L}{\pi} \int_0^\pi d\psi \cos^2(m\psi) = \frac{L}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{L}{2}$ . Αντικαθιστούμε στην παραπάνω εξίσωση και τελικά έχοντας ακολουθήσει αυτή την κλασική προσέγγιση έχουμε

$$E_m = \frac{\epsilon_0 c \mathcal{N}^2 S}{L} \left[ \sin^2 \left( \frac{m\pi ct}{L} \right) + \cos^2 \left( \frac{m\pi ct}{L} \right) \right] = \frac{\epsilon_0 c \mathcal{N}^2 S}{L} \quad (4.70)$$

Ας δούμε τώρα λίγο αλλιώς την  $E_m$

$$E_m = \frac{\epsilon_0 c \mathcal{N}^2 S}{L^3} \left[ L^2 \sin^2 \left( \frac{m\pi ct}{L} \right) + L^2 \cos^2 \left( \frac{m\pi ct}{L} \right) \right], \quad (4.71)$$

ορίζοντας “ γενικευμένη θέση και ταχύτητα ”. Καλούμε λοιπόν “ γενικευμένη θέση ”

$$q_m(t) := L \sin \left( \frac{m\pi ct}{L} \right) \quad (4.72)$$

και “ γενικευμένη ταχύτητα ”

$$\dot{q}_m(t) := m\pi c \cos \left( \frac{m\pi ct}{L} \right) \quad (4.73)$$

ούτως ώστε  $[q_m(t)] = m$  και  $[\dot{q}_m(t)] = m/s$ . Τότε η Εξ. 4.71 γράφεται

$$E_m = \frac{\epsilon_0 c \mathcal{N}^2 S}{L^3} \left[ (q_m(t))^2 + \frac{L^2}{m^2 \pi^2 c^2} (\dot{q}_m(t))^2 \right], \quad (4.74)$$

Θα μπορούσαμε εδώ να θεωρήσουμε μια αναλογία της Εξ. 4.74 με Απλό Αρμονικό Ταλαντωτή (ΑΑΤ), του οποίου η ενέργεια θα ήταν

$$E = \frac{K}{2} x^2 + \frac{M}{2} v^2 = \frac{K}{2} \left[ x^2 + \frac{M}{K} v^2 \right]. \quad (4.75)$$

Επομένως,

$$\frac{\epsilon_0 c \mathcal{N}^2 S}{L^3} = \frac{K}{2}, \quad (4.76)$$

$$\frac{L^2}{m^2\pi^2c^2} = \frac{M}{K}. \quad (4.77)$$

Δηλαδή προκύπτει η “σταθερά ελατηρίου”

$$K = \frac{2\epsilon_0c\mathcal{N}^2S}{L^3}, \quad (4.78)$$

και η “μάζα” (η οποία, σημειωτέο, εξαρτάται από το  $m$ , είναι δηλαδή διαφορετική για κάθε τρόπο του ΗΜ πεδίου  $m$ )

$$M_m = \frac{2\epsilon_0\mathcal{N}^2S}{cLm^2\pi^2}. \quad (4.79)$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η  $M_m$  έχει διαστάσεις μάζας (θα χρειαστεί και η Εξ. 4.61) και πως ισχύει  $K = M_m\omega_m^2$ . Άρα, κλασικά, υπάρχει μία τυπική ομοιότητα με ΑΑΤ με κυκλική συχνότητα  $\omega_m$  (Εξ. 4.50) και “μάζα”  $M_m$  (Εξ. 4.79), δηλαδή η Εξ. 4.71 ή 4.74 γράφεται

$$E_m = \frac{M_m\omega_m^2}{2} q_m^2 + \frac{M_m}{2} \dot{q}_m^2 \quad (4.80)$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι το κβαντικό αντίστοιχο, για ένα τρόπο ΗΜ πεδίου  $m$ , δηλαδή η Χαμιλτονιανή του ΗΜ πεδίου για τον τρόπο  $m$ , θα είναι

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \frac{M_m\omega_m^2}{2} \hat{q}_m^2 + \frac{M_m}{2} \hat{\dot{q}}_m^2, \quad (4.81)$$

με ιδιοτιμές ενέργειας

$$E_{m,n_m} = \hbar\omega_m\left(n_m + \frac{1}{2}\right) \quad (4.82)$$

όπου ο δείκτης  $m \in \mathcal{N}^*$  αφορά τον τρόπο του ΗΜ πεδίου και ο δείκτης  $n_m \in \mathcal{N}$  αφορά τον αριθμό των φωτονίων στον τρόπο  $m$ . Συνεπώς, η Χαμιλτονιανή για όλους τους τρόπους του ΗΜ πεδίου θα είναι

$$\hat{H}_{\text{HM}} = \sum_m \hat{H}_{\text{HM}, m} \quad (4.83)$$

Κατόπιν, σημειώνουμε ότι από τις Εξ. 4.60 και 4.72 συνεπάγεται ότι

$$E_x^m(z, t) = \frac{2\sqrt{c}}{L^2} \mathcal{N} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) q_m(t), \quad (4.84)$$



οπότε το κβαντικό ανάλογο είναι

$$\hat{E}_x^m(z, t) = \frac{2\sqrt{c}}{L^2} \mathcal{N} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \hat{q}_m(t). \quad (4.85)$$

Επίσης, από τις Εξ. 4.66 και 4.73 συνεπάγεται ότι

$$B_y^m(z, t) = \frac{2\mathcal{N}}{L\sqrt{c}} \frac{1}{m\pi c} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \dot{q}_m(t), \quad (4.86)$$

οπότε το κβαντικό ανάλογο είναι

$$\hat{B}_y^m(z, t) = \frac{2\mathcal{N}}{L\sqrt{c}} \frac{1}{m\pi c} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \hat{q}_m(t). \quad (4.87)$$

Από τις Έξ. 4.84, 4.79 και 4.50 προκύπτει

$$\boxed{E_x^m(z, t) = \left(\frac{2M_m\omega_m^2}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) q_m(t)}, \quad (4.88)$$

οπότε το κβαντικό ανάλογο είναι

$$\boxed{\hat{E}_x^m(z, t) = \left(\frac{2M_m\omega_m^2}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \hat{q}_m(t)} \quad (4.89)$$

Από τις Έξ. 4.86, 4.79 και 4.50 προκύπτει

$$\boxed{B_y^m(z, t) = \frac{1}{c} \left(\frac{2M_m}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \dot{q}_m(t)}, \quad (4.90)$$

οπότε το κβαντικό ανάλογο είναι

$$\boxed{\hat{B}_y^m(z, t) = \frac{1}{c} \left(\frac{2M_m}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \hat{q}_m(t)}. \quad (4.91)$$

Τέλος, από τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει, όπως αναμενόταν,  $[\frac{E_x}{B_y}] = [c]$ .

#### 4.4 Χαμιλτονιανή ΗΜ πεδίου με τελεστές καταστροφής και δημιουργίας φωτονίων.

Ας μιλήσουμε τώρα για τελεστές καταστροφής και δημιουργίας φωτονίων (photon creation and annihilation operators). Είναι τώρα εύκολο να χβαντωθεί η Χαμιλτονιανή που περιγράφει το ΗΜ πεδίο, αρκεί να εφαρμοστεί η αντιστοιχία τελεστών

$$\hat{q}_m = q_m \quad (4.92)$$

$$\hat{p}_m = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_m} \quad (4.93)$$

Εισάγουμε τους τελεστές:

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}(M_m\omega_m\hat{q}_m + i\hat{p}_m) \quad \text{“καταστροφής”} \quad (4.94)$$

$$\hat{a}_m^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}(M_m\omega_m\hat{q}_m - i\hat{p}_m) \quad \text{“δημιουργίας”} \quad (4.95)$$

Ισχύουν οι ιδιότητες

$$\underbrace{[\hat{a}_m, \hat{a}_m^\dagger]}_{\text{μεταθέτης}} = \hat{a}_m\hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m = 1 \quad (4.96)$$

$$\underbrace{[\hat{q}_m, \hat{p}_m]}_{\text{μεταθέτης}} = i\hbar \quad (4.97)$$

Έτσι, οι τελεστές  $\hat{q}_m, \hat{p}_m$  μπορούν τώρα να γραφούν

$$\hat{q}_m = \left(\frac{\hbar}{2M_m\omega_m}\right)^{1/2} (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m) \quad (4.98)$$

$$\hat{p}_m = i \left(\frac{M_m\hbar\omega_m}{2}\right)^{1/2} (\hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_m) \quad (4.99)$$

Συνεπώς η Χαμιλτονιανή του ΗΜ πεδίου για τον τρόπο  $m$  είναι

$$\boxed{\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \left(\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m + \frac{1}{2}\right)} \quad (4.100)$$

Ας συμβολίσουμε με  $|n_m\rangle$  την κατάσταση του ΗΜ πεδίου με  $n_m$  αριθμό φωτονίων στον ΗΜ τρόπο  $m$ . Λέμε ότι είναι μια “κατάσταση φωτονικών αριθμών”. Τα  $|n_m\rangle$  αποτελούν ένα πλήρες σύστημα, δηλαδή ισχύει  $\langle n_m|l_m\rangle = \delta_{nl}$ .

Οι τελεστές  $\hat{a}_m^\dagger$  και  $\hat{a}_m$  έχουν τις ιδιότητες

$$\hat{a}_m^\dagger |n_m\rangle = \sqrt{n_m + 1} |n_m + 1\rangle, \quad (4.101)$$

$$\hat{a}_m |n_m\rangle = \sqrt{n_m} |n_m - 1\rangle, \quad (4.102)$$

$$\hat{a}_m |0\rangle = 0. \quad (4.103)$$

Από τις Εξ. 4.101 και 4.102 προκύπτει

$$\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m |n_m\rangle = n_m |n_m\rangle, \quad (4.104)$$

δηλαδή ο τελεστής  $\hat{N}_m = \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m$  μετρά τον αριθμό των φωτονίων του ΗΜ τρόπου  $m$ , οπότε μπορεί να αποκληθεί τελεστής του αριθμού των φωτονίων στον ΗΜ τρόπο  $m$ . Ακόμα, επαγωγικά προκύπτει

$$|n_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_m!}} (\hat{a}_m^\dagger)^{n_m} |0\rangle. \quad (4.105)$$

Λόγω των Εξ. 4.100 και 4.104 προκύπτει

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} |n_m\rangle = \hbar\omega_m \left(n_m + \frac{1}{2}\right) |n_m\rangle \quad (4.106)$$

δηλαδή η Χαμιλτονιανή  $\hat{H}_{\text{HM}, m}$  δίνει ιδιοτιμές ενέργειας

$$E_{m, n_m} = \hbar\omega_m \left(n_m + \frac{1}{2}\right) \quad (4.107)$$

Η θεμελιώδης κατάσταση του ΑΑΤ  $|0\rangle$  με ιδιοενέργεια  $\frac{1}{2}\hbar\omega_m$  αντιστοιχεί στο κενό, δηλαδή χωρίς σωματίο, η 1η διεγερμένη κατάσταση του ΑΑΤ  $|1\rangle$  με ιδιοενέργεια  $\frac{3}{2}\hbar\omega_m$  αντιστοιχεί σε ένα σωματίο, η 2η διεγερμένη κατάσταση του ΑΑΤ  $|2\rangle$  με ιδιοενέργεια  $\frac{5}{2}\hbar\omega_m$  αντιστοιχεί σε δύο σωματίια κ.ο.κ.. Αυτά τα σωματίια εν προκειμένω τα λέμε φωτόνια. Δημιουργούνται και καταστρέφονται με τους τελεστές αναβιβάσεως και καταβιβάσεως ξεκινώντας από ένα επίπεδο αναφοράς που εδώ είναι το κενό. Υπακούουν στις μποζονικές σχέσεις μεταθέσεως (δείτε Ενότητα 4.6). Αυτή η αναπαράσταση είναι γνωστή και ως δεύτερη κβάντωση (second quantization).

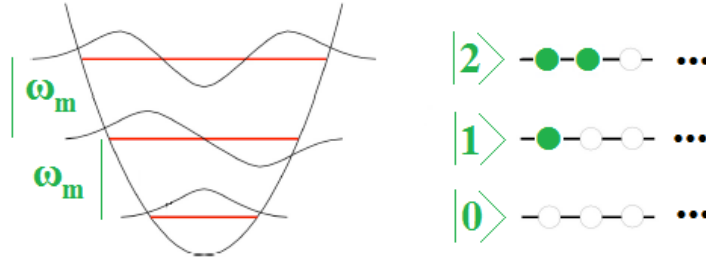
Η Χαμιλτονιανή του ΗΜ πεδίου για τον τρόπο  $m$

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \left(\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega_m \left(\hat{N}_m + \frac{1}{2}\right), \quad (4.108)$$

αγνοώντας τον όρο  $\frac{\hbar\omega_m}{2}$ , μπορεί να γραφτεί

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m = \hbar\omega_m \hat{N}_m. \quad (4.109)$$

Μπορούμε να έχουμε οσαδήποτε φωτόνια στην ενεργειακή κατάσταση  $\hbar\omega_m$  διότι είναι μποζόνια. Ο  $\hat{a}_m^\dagger$  είναι τελεστής αναβιβάσεως (raising operator) διότι αναβιβάζει την ενέργεια, δημιουργώντας φωτόνιο με ενέργεια  $\hbar\omega_m$  εξ ου και η ονομασία τελεστής δημιουργίας (creation operator). Ο  $\hat{a}_m$  είναι τελεστής καταβιβάσεως (lowering operator) διότι καταβιβάζει την ενέργεια, καταστρέφοντας φωτόνιο με ενέργεια  $\hbar\omega_m$  εξ ου και η ονομασία τελεστής καταστροφής (annihilation operator).



Σχήμα 4.5: Σωματία (εδώ φωτόνια, απεικονίζονται με πράσινες βούλες) δημιουργούνται και καταστρέφονται μέσω των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Υπακούουν στις μποζονικές σχέσεις μεταθέσεως (δείτε Ενότητα 4.6). Αυτή η αναπαράσταση είναι γνωστή και ως δεύτερη κβάντωση (second quantization). Ο αριθμός των φωτονίων είναι ίσος με τον αριθμό των κόμβων της ιδιοσυναρτήσεως.

Τέλος, ας σημειώσουμε ότι από τις Εξ. 4.89 και 4.98 προκύπτει

$$\hat{E}_x^m(z, t) = \left( \frac{\hbar\omega_m}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin \left( \frac{m\pi z}{L} \right) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m) \quad (4.110)$$

ενώ από τις Εξ. 4.91 και 4.99 προκύπτει

$$\hat{B}_y^m(z, t) = \frac{i}{c} \left( \frac{\hbar\omega_m}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \cos \left( \frac{m\pi z}{L} \right) (\hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_m) \quad (4.111)$$

## 4.5 Χαμιλτονιανή δισταθμικού συστήματος με σπίνορες.

Θα περιγράψουμε την αναβίβαση και την καταβίβαση ενός ηλεκτρονίου μεταξύ των ενεργειακών σταθμών ενός δισταθμικού συστήματος π.χ. ενός ατόμου με τη βοήθεια σπινόρων (spinors). Σπίνορας είναι ένα διάνυσμα - στήλη με δύο συνιστώσες. Ας αρχίσουμε με ορισμούς (π.χ. [33]):

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle, \quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle, \quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle \quad (4.112)$$

Το πρώτο παριστά το άδειο δισταθμικό σύστημα, το δεύτερο δηλώνει το δισταθμικό σύστημα με το ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη όπου έχει ενέργεια  $E_1$  και το τρίτο δηλώνει το δισταθμικό σύστημα με το ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη όπου έχει ενέργεια  $E_2$ . Ας ορίσουμε τώρα τους τελεστές

$$\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.113)$$

για τους οποίους μάλιστα ισχύει  $\hat{S}_+^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_-$ . Ας δούμε ποιο είναι το αποτέλεσμα της δράσεώς τους στους σπίνορες που ορίσαμε μόλις προ ολίγου.

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ |0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle && \text{καμία δράση} \\ \hat{S}_+ |\downarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle && \text{το ανεβάζει} \\ \hat{S}_+ |\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle && \text{το πετά έξω} \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}_- |0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle && \text{καμία δράση} \\
\hat{S}_- |\downarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle && \text{το πετά έξω} \\
\hat{S}_- |\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle && \text{το κατεβάζει}
\end{aligned} \tag{4.115}$$

Έτσι, ο  $\hat{S}_+$  ονομάζεται τελεστής αναβιβάσεως (raising operator) ενώ ο  $\hat{S}_-$  ονομάζεται τελεστής καταβιβάσεως (lowering operator) του ηλεκτρονίου. Ας δούμε μερικές ακόμα ιδιότητες.

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x \tag{4.116}$$

που είναι ένας από τους πίνακες Pauli που παρατίθενται λίγο παρακάτω (Εξ. 4.133, 4.134, 4.135).  
Ακόμα,

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.117}$$

$$\hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.118}$$

Άρα, από τις Εξ. 4.117-4.118 συνεπάγεται ότι

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{I}} \tag{4.119}$$

που είναι ο διαγώνιος μοναδιαίος πίνακας. Μπορούμε να το γράψουμε και στη μορφή

$$\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{\mathbf{I}}. \tag{4.120}$$

$\{A, B\}$  ή  $[A, B]_+$  είναι η αγκύλη Poisson ή αντιμεταθέτης (anticommutator) που ορίζεται ως

$$\{A, B\} = AB + BA, \quad (4.121)$$

ενώ  $[A, B]$  ή  $[A, B]_-$  είναι ο μεταθέτης (commutator) που ορίζεται ως

$$[A, B] = AB - BA. \quad (4.122)$$

Όταν  $\{A, B\} = 0 \Rightarrow AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA$ , δηλαδή οι ποσότητες  $A, B$  αντιμετατίθενται, ενώ όταν  $[A, B] = 0 \Rightarrow AB - BA = 0 \Rightarrow AB = BA$ , δηλαδή οι ποσότητες μετατίθενται, πράγμα που δείχνει την προέλευση των ονομασιών. Όπως θα δούμε παρακάτω, η αγκύλη Poisson ή αντιμεταθέτης χρησιμοποιείται στις σχέσεις αντιμεταθέσεως τις οποίες ακολουθούν τα ηλεκτρόνια που είναι φερμιόνια, ενώ ο μεταθέτης χρησιμοποιείται στις σχέσεις μεταθέσεως τις οποίες ακολουθούν τα φωτόνια που είναι μποζόνια. Συχνά, στα ελληνικά συγγράμματα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, πολύ κακώς, εδώ και δεκαετίες ονομάζεται “αντιμεταθετική” η μεταθετική (commutative) ιδιότητα, χαθήκαμε δηλαδή στη μετάφραση...

Η Χαμιλτονιανή του Δισταθμικού Συστήματος  $\hat{H}_{\Delta\Sigma}$  είναι η

$$E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+ = E_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \quad (4.123)$$

αφού

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = E_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.124)$$

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \end{pmatrix} = E_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.125)$$

Άρα, συνοπτικά, δείξαμε ότι

$$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+} \quad (4.126)$$

Αν τώρα θέσουμε  $E_1 = 0 \Rightarrow E_2 = \hbar\Omega$  (θυμηθείτε την Εξ. 3.46 και την Εξ. 3.12), οπότε

$$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-} \quad (4.127)$$

Ο τελεστής  $\hat{S}_+\hat{S}_-$  μετρά τον αριθμό των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη, αφού

$$\hat{S}_+\hat{S}_- |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \Rightarrow \hat{S}_+\hat{S}_- |1\rangle = 0 |1\rangle, \quad (4.128)$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_- |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle \Rightarrow \hat{S}_+\hat{S}_- |2\rangle = 1 |2\rangle. \quad (4.129)$$

Ο τελεστής  $\hat{S}_-\hat{S}_+$  μετρά τον αριθμό των ηλεκτρονίων στην κάτω στάθμη, αφού

$$\hat{S}_-\hat{S}_+ |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \Rightarrow \hat{S}_-\hat{S}_+ |1\rangle = 1 |1\rangle, \quad (4.130)$$

$$\hat{S}_-\hat{S}_+ |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \Rightarrow \hat{S}_-\hat{S}_+ |2\rangle = 0 |2\rangle. \quad (4.131)$$

Συνοπτικά, για τους τελεστές  $\hat{S}_+$  και  $\hat{S}_-$  μπορούμε να αποδείξουμε ότι  $(\hat{S}_+)^\dagger = \hat{S}_-$  αλλά και ότι

$$\begin{aligned} \{\hat{S}_+, \hat{S}_+^\dagger\} &= \{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+ = \hat{\mathbf{I}} \\ \{\hat{S}_-, \hat{S}_-^\dagger\} &= \{\hat{S}_-, \hat{S}_+\} = \hat{S}_-\hat{S}_+ + \hat{S}_+\hat{S}_- = \hat{\mathbf{I}} \\ \{\hat{S}_+, \hat{S}_+\} &= \{\hat{S}_-^\dagger, \hat{S}_-^\dagger\} = \hat{S}_+\hat{S}_+ + \hat{S}_+\hat{S}_+ = \hat{\mathbf{0}} \\ \{\hat{S}_-, \hat{S}_-\} &= \{\hat{S}_+^\dagger, \hat{S}_+^\dagger\} = \hat{S}_-\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_- = \hat{\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (4.132)$$

όπου  $\hat{\mathbf{I}}$  είναι ο διαγώνιος μοναδιαίος πίνακας  $2 \times 2$  και  $\hat{\mathbf{0}}$  είναι ο μηδενικός πίνακας  $2 \times 2$ . Οι Εξ. 4.132 δείχνουν ότι οι τελεστές  $\hat{S}_+$  και  $\hat{S}_-$  υπακούουν στις σχέσεις αντι-μεταθέσεως φερμιονίων που αναφέρουμε στην Υποενότητα 4.6.2 της Ενότητας 4.6. Ο  $\hat{S}_+$  είναι τελεστής αναβιβάσεως (raising operator) διότι αναβιβάζει την ενέργεια δημιουργώντας ηλεκτρόνιο με ενέργεια  $\hbar\Omega$  εξ ου και η ονομασία τελεστής δημιουργίας (creation operator). Ο  $\hat{S}_-$  είναι τελεστής καταβιβάσεως (lowering operator) διότι καταβιβάζει την ενέργεια, καταστρέφοντας ηλεκτρόνιο με ενέργεια  $\hbar\Omega$  εξ ου και η ονομασία τελεστής καταστροφής (annihilation operator). Μπορούμε να έχουμε μόνο ένα ηλεκτρόνιο με ενέργεια  $\hbar\Omega$  διότι τα ηλεκτρόνια είναι φερμιόνια.



Ας θυμηθούμε τώρα τους πίνακες Pauli  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$ ,  $\hat{\sigma}_z$  και ας δούμε τη σχέση τους με τους τελεστές αναβιβάσεως και καταβιβάσεως ηλεκτρονίων  $\hat{S}_+$  και  $\hat{S}_-$ , αντιστοίχως.

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.133)$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.134)$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.135)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει η ιδιότητα

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z, \quad (4.136)$$

καθώς και οι κυκλικές εναλλαγές της. Επίσης,

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{I}}. \quad (4.137)$$

και

$$\begin{aligned} \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\} &= \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = \hat{0} \\ \{\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\} &= \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = \hat{0} \\ \{\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x\} &= \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = \hat{0} \end{aligned} \quad (4.138)$$

δηλαδή οι πίνακες Pauli αντιμετατίθενται. Επί παραδείγματι,

$$\begin{aligned} \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\} &= \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{0} \end{aligned}$$

Ακόμα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ + \hat{S}_- &= \hat{\sigma}_x \\ \hat{S}_+ - \hat{S}_- &= i\hat{\sigma}_y \end{aligned}$$

## 4.6 Σχέσεις μεταθέσεως μποζονίων και σχέσεις αντιμεταθέσεως φερμιονίων.

### 4.6.1 Σχέσεις μεταθέσεως μποζονίων π.χ. φωτονίων.

Ας ονομαστεί  $\hat{a}_m$  ο τελεστής καταστροφής μποζονίων και  $\hat{a}_m^\dagger$  ο τελεστής δημιουργίας μποζονίων στην κατάσταση  $m$ . Για τα μποζόνια ισχύουν οι σχέσεις μεταθέσεως (commutation relations)

$$\begin{aligned} [\hat{a}_m, \hat{a}_\ell] &= 0 \\ [\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_\ell^\dagger] &= 0 \end{aligned} \quad (4.139)$$

$[A, B]$  ή  $[A, B]_-$  είναι ο μεταθέτης (commutator) που όπως είπαμε ορίζεται ως

$$[A, B] = AB - BA, \quad (4.140)$$

οπότε, όταν  $[A, B] = 0 \Rightarrow AB - BA = 0 \Rightarrow AB = BA$ , δηλαδή οι ποσότητες μετατίθενται, πράγμα που δείχνει την προέλευση της ονομασίας.

### 4.6.2 Σχέσεις αντιμεταθέσεως φερμιονίων π.χ. ηλεκτρονίων.

Ας ονομαστεί  $\hat{a}_i$  ο τελεστής καταστροφής φερμιονίων και  $\hat{a}_i^\dagger$  ο τελεστής δημιουργίας φερμιονίων στην κατάσταση  $i$ . Για τα φερμιόνια ισχύουν οι σχέσεις αντιμεταθέσεως (anticommutation relations)

$$\begin{aligned} \{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} &= \delta_{ij} \\ \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} &= 0 \\ \{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.141)$$

$\{A, B\}$  ή  $[A, B]_+$  είναι η αγκύλη Poisson ή αντιμεταθέτης (anticommutator) που όπως είπαμε ορίζεται ως

$$\{A, B\} = AB + BA, \quad (4.142)$$

οπότε, όταν  $\{A, B\} = 0 \Rightarrow AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA$ , δηλαδή οι ποσότητες  $A, B$  αντιμετατίθενται, πράγμα που δείχνει την προέλευση της ονομασίας. Αν εφαρμόσουμε τη σχέση  $\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0$  για την ίδια κατάσταση π.χ.  $i = j = r$ , έχουμε  $\{\hat{a}_r^\dagger, \hat{a}_r^\dagger\} = 0 \Rightarrow \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r^\dagger = 0$ , που σημαίνει ότι δεν μπορούμε να βάλουμε δύο φερμιόνια στην ίδια κατάσταση, πράγμα που είναι η απαγορευτική αρχή Pauli.

## 4.7 Τελεστές κλίμακας.

Στη γραμμική άλγεβρα καθώς και στις εφαρμογές της στην κβαντική μηχανική, ορίζεται ο τελεστής αναβιβάσεως (raising operator) ο οποίος αυξάνει την ιδιοτιμή ενός άλλου τελεστή και ο τελεστής καταβιβάσεως (lowering operator) ο οποίος μειώνει την ιδιοτιμή ενός άλλου τελεστή. Αυτοί συλλογικά ονομάζονται τελεστές κλίμακας (ladder operators). Στην κβαντομηχανική, ο τελεστής αναβιβάσεως καλείται συχνά τελεστής δημιουργίας (creation operator), και ο τελεστής καταβιβάσεως καλείται συχνά τελεστής καταστροφής (annihilation operator). Γνωστές εφαρμογές των τελεστών κλίμακας είναι στον απλό αρμονικό ταλαντωτή και στη στροφορμή. Σε πολλές περιοχές της φυσικής και της χημείας η χρήση αυτών των τελεστών αντί κυματοσυναρτήσεων είναι γνωστή ως δεύτερη κβάντωση (second quantization).

## 4.8 Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου.

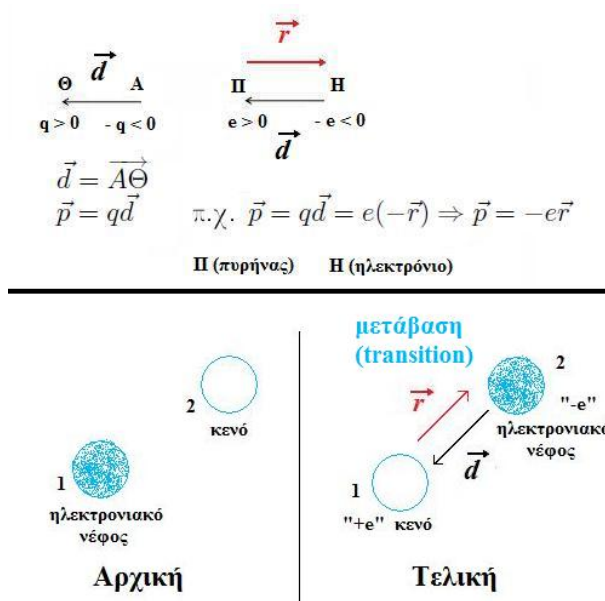
Έστω δύο αντίθετα ηλεκτρικά φορτία,  $q > 0$  και  $-q < 0$ , στα σημεία  $\Theta$  και  $A$ , αντιστοίχως. Αν  $\vec{d} = \vec{A\Theta}$  είναι το διάνυσμα θέσεως του θετικού φορτίου ως προς το αρνητικό, τότε η **ηλεκτρική διπολική ροπή** (electric dipole moment) ορίζεται ως

$$\vec{P} = q\vec{d} \quad (4.143)$$

π.χ. για το άτομο του υδρογόνου, αν το  $\Pi$  παριστάνει τον πυρήνα και το  $H$  παριστάνει το ηλεκτρόνιο και ως συνήθως ορίσουμε  $\vec{r} = \vec{\Pi H}$ , τότε  $\vec{P} = q\vec{d} = e(-\vec{r}) \Rightarrow$

$$\vec{P} = -e\vec{r}. \quad (4.144)$$

Αυτό αποδίδεται άνω τμήμα του Σχήματος 4.6. Η **δυναμική ενέργεια** (potential



Σχήμα 4.6: Άνω. Ηλεκτρική διπολική ροπή (electric dipole moment). Κάτω. (Ηλεκτρική) διπολική ροπή μεταβάσεως (transition (electric) dipole moment)

energy)  $U_{\mathcal{E}}$  του ηλεκτρικού διπόλου εντός ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{\mathcal{E}}$  είναι

$$U_{\mathcal{E}} = -\vec{P} \cdot \vec{\mathcal{E}}. \quad (4.145)$$

Ανάλογος με τον παραπάνω ορισμό μπορεί να δοθεί και για την περίπτωση της μεταβάσεως ενός τμήματος του ηλεκτρονιακού νέφους από μία αρχική σε μια τελική περιοχή. Έτσι ορίζεται η **(ηλεκτρική) διπολική ροπή μεταβάσεως** [transition (electric) dipole moment].<sup>1</sup> Αυτό αποδίδεται στο κάτω τμήμα του Σχήματος 4.6. Αν το φορτίο που μεταφέρεται είναι  $-e$ , πάλι  $\vec{p} = q\vec{d} = e(-\vec{r}) \Rightarrow \vec{p} = -e\vec{r}$ . Δηλαδή, εννοείται, ότι για την περιοχή 2 τελική μείον αρχική κατάσταση ισοδυναμεί με μετάβαση φορτίου  $-e$ , ενώ για την περιοχή 1 τελική μείον αρχική κατάσταση ισοδυναμεί με μετάβαση φορτίου  $+e$ .

Ο **τελεστής (ηλεκτρικής) διπολικής ροπής μεταβάσεως** [transition (electric) dipole moment operator] σημειώνεται εναλλακτικά με  $\hat{d}$  ή  $\hat{p}$ . Στη βάση των ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας του αδιατάρακτου ατόμου ή συστήματος ορίζεται ως

$$\hat{d} = \hat{p} := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{d}_{ij} |\Phi_i\rangle\langle\Phi_j| \quad (4.146)$$

με τους επίσης εναλλακτικούς συμβολισμούς

$$\vec{d}_{ij} = \vec{p}_{ij} := -e\langle\Phi_i | \hat{r} | \Phi_j\rangle \quad (4.147)$$

για το στοιχείο πίνακα της (ηλεκτρικής) διπολικής ροπής μεταβάσεως μεταξύ των καταστάσεων  $|\Phi_i\rangle$  και  $|\Phi_j\rangle$ . Υπενθυμίζεται ότι ο τελεστής θέσεως (position operator)  $\hat{r}$  είναι τέτοιος ώστε

$$\hat{r} | \vec{r}\rangle = \vec{r} | \vec{r}\rangle. \quad (4.148)$$

Υπενθυμίζεται για τον συμβολισμό Dirac ότι

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \langle A| = (\alpha_1^* \quad \alpha_2^*). \quad (4.149)$$

Υπενθυμίζεται ακόμα ότι

$$\begin{aligned} \langle\Phi_i | \hat{r} | \Phi_j\rangle &= \sum_{|\vec{r}'\rangle, |\vec{r}''\rangle} \langle\Phi_i | \vec{r}'\rangle \langle\vec{r}' | \hat{r} | \vec{r}''\rangle \langle\vec{r}'' | \Phi_j\rangle = \sum_{|\vec{r}'\rangle} \langle\Phi_i | \vec{r}'\rangle \langle\vec{r}' | \Phi_j\rangle \\ &= \sum_{|\vec{r}\rangle} \langle\Phi_i | \vec{r}\rangle \langle\vec{r} | \Phi_j\rangle = \int dV \Phi_i(\vec{r})^* \vec{r} \Phi_j(\vec{r}) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Η λέξη “ηλεκτρική” είναι εντός παρενθέσεως επειδή συνήθως, επειδή εννοείται, παραλείπεται.

διότι

$$\langle \vec{r}' | \hat{r} | \vec{r}'' \rangle = \vec{r}'' \langle \vec{r}' | \vec{r}'' \rangle = \vec{r}'' \delta_{\vec{r}', \vec{r}''}. \quad (4.150)$$

Άρα

$$\vec{d}_{11} = -e \langle \Phi_1 | \hat{r} | \Phi_1 \rangle = -e \int dV \underbrace{\Phi_1(\vec{r})^* \vec{r} \Phi_1(\vec{r})}_{\text{περιττή}} = 0, \quad \star \quad (4.151)$$

$$\vec{d}_{12} = -e \langle \Phi_1 | \hat{r} | \Phi_2 \rangle = -e \int dV \Phi_1(\vec{r})^* \vec{r} \Phi_2(\vec{r}) \neq 0, \quad (4.152)$$

$$\vec{d}_{21} = -e \langle \Phi_2 | \hat{r} | \Phi_1 \rangle = -e \int dV \Phi_2(\vec{r})^* \vec{r} \Phi_1(\vec{r}) \neq 0, \quad (4.153)$$

$$\vec{d}_{22} = -e \langle \Phi_2 | \hat{r} | \Phi_2 \rangle = -e \int dV \underbrace{\Phi_2(\vec{r})^* \vec{r} \Phi_2(\vec{r})}_{\text{περιττή}} = 0. \quad \star \quad (4.154)$$

Δηλαδή ενώ τα διαγώνια στοιχεία μηδενίζονται, τα  $\vec{d}_{12}$  και  $\vec{d}_{21}$  δεν είναι (“εξ ταυτότητος”) μηδέν. Ας δούμε τώρα ποιος είναι ο  $\hat{p}$  σε δισταθμικό σύστημα.

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \vec{d}_{11} | \Phi_1 \rangle \langle \Phi_1 | + \vec{d}_{12} | \Phi_1 \rangle \langle \Phi_2 | + \vec{d}_{21} | \Phi_2 \rangle \langle \Phi_1 | + \vec{d}_{22} | \Phi_2 \rangle \langle \Phi_2 | \\ &= \vec{d}_{11} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \vec{d}_{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \vec{d}_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \vec{d}_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\vec{d}_{11}^0}_{\text{διαγώνιο στοιχείο}} \star \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{τμήμα διαγώνιου πίνακα}} + \underbrace{\vec{d}_{12}}_{\text{μη διαγώνιο στοιχείο}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{τμήμα αντιδιαγώνιου πίνακα}} \\ &+ \underbrace{\vec{d}_{21}}_{\text{μη διαγώνιο στοιχείο}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{τμήμα αντιδιαγώνιου πίνακα}} + \underbrace{\vec{d}_{22}^0}_{\text{διαγώνιο στοιχείο}} \star \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{τμήμα διαγώνιου πίνακα}} \end{aligned}$$

Από τις Εξ. (4.152)-(4.153) συμπεραίνουμε ότι  $\vec{d}_{12} = \vec{d}_{21}$ , με την προϋπόθεση ότι οι  $\Phi_i(\vec{r})$  είναι πραγματικές, οπότε

$$\hat{p} = \vec{d}_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.155)$$

Ερώτηση: Και τι κάνει ο τελεστής  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;

Απάντηση:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή μεταφέρει από τη μία ενεργειακή στάθμη στην άλλη, όπως θα έπρεπε!

Τώρα μπορεί να οριστεί ο **τελεστής δυναμικής ενέργειας** (potential energy operator). Θεωρούμε ότι η αλληλεπίδραση δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου έχει τη μορφή μηχανισμού ηλεκτρικού διπόλου. Αγνοούμε άλλης μορφής αλληλεπιδράσεις, όπως π.χ. ηλεκτρικού τετραπόλου ή μαγνητικού διπόλου. Αφού  $U_{\mathcal{E}} = -\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ , συνεπάγεται

$$U_{\mathcal{E}}^m = -\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^m, \quad (4.156)$$

όπου ο δείκτης  $m$  δηλώνει τον  $m$  τρόπο του ΗΜ πεδίου, ο αντίστοιχος τελεστής μπορεί να οριστεί ως

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = -\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{\mathcal{E}}}^m. \quad (4.157)$$

Επομένως,

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{d}_{ij} |\Phi_i\rangle \langle \Phi_j| \cdot \hat{E}_x^m(z, t) \hat{i}.$$

$\hat{i}$  είναι το μοναδιαίο άνυσμα του άξονα  $x$ , αφού έχουμε υποθέσει αυτόν τον προσανατολισμό για το ηλεκτρικό πεδίο (δείτε Σχήμα 4.2). Ή, λόγω της Εξ. 4.155,

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = -\vec{d}_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{E}_x^m(z, t) \hat{i}. \quad (4.158)$$

Αλλά

$$\vec{d}_{12} \cdot \hat{i} = -e \int dV \Phi_1(\vec{r})^* (\vec{r} \cdot \hat{i}) \Phi_2(\vec{r}) = -ex_{12} = \mathcal{P}_{x_{12}} := \mathcal{P}. \quad (4.159)$$

Συνεπώς,

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = ex_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{E}_x^m(z, t). \quad (4.160)$$

Υπενθυμίζονται οι Εξ. 4.110 και 4.111

$$\hat{E}_x^m(z, t) = \left( \frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m) \quad (4.161)$$

$$\hat{B}_y^m(z, t) = \left( \frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{c} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) i(\hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_m). \quad (4.162)$$

από τις οποίες, όμως, στα πλαίσια των υποθέσεών μας χρειαζόμαστε τώρα μόνον την πρώτη. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.163)$$

Άρα εν τέλει

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = ex_{12} \left( \frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) (\hat{S}_+ + \hat{S}_-)(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m). \quad (4.164)$$

Εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{\hbar g^m = ex_{12} \left( \frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)} \quad (4.165)$$

$$\boxed{\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-)(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m)} \quad (4.166)$$

Αυτή είναι λοιπόν η **Χαμιλτονιανή αλληλεπιδράσεως δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου για τον ΗΜ τρόπο  $m$** . Εάν βρισκόμαστε στα πλαίσια της ατομικής φυσικής, τότε συμβολίζεται και  $\hat{H}_{\text{AF}}^m$  όπου οι δείκτες σημαίνουν Atom-Field.

Από την Εξ. 4.165 προκύπτει

$$\hbar |g^m| = |\mathcal{P}| \left| \left( \frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \right| := |\mathcal{P}| E_0^m. \quad (4.167)$$

όπου όμως το “πλάτος”  $E_0^m$  εξαρτάται από τη θέση  $z$  του ατόμου στην κοιλότητα είναι δηλαδή  $E_0^m = E_0^m(z)$ . Η  $|g^m|$  (ή οποία συμβολίζεται και με  $\Omega_R^m$ ) είναι η λεγόμενη



συχνότητα Rabi. Εάν εννοείται σε ποιον HM τρόπο  $m$  αναφερόμαστε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σκέτο το  $|g\rangle$  ή το  $\Omega_R$ . Άρα,

$$|g^m| \quad \text{ή} \quad \Omega_R^m := \frac{|\mathcal{P}|E_0^m}{\hbar} \quad (4.168)$$

Για να μη γράφουμε απόλυτα, μπορούμε σε κάθε θέση να διαλέγουμε τη φάση των κυματοσυναρτήσεων τέτοια ώστε το  $g$  να είναι θετικό και πραγματικό [34]. Συνοπτικά

$$\boxed{g^m \quad \text{ή} \quad \Omega_R^m := \frac{|\mathcal{P}|E_0^m}{\hbar}} \quad (4.169)$$

Μέχρι τώρα είδαμε την Εξ. 4.100 στην Ενότητα 4.4, η οποία περιγράφει έναν HM τρόπο  $m$ , δηλαδή την

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \left( \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \frac{1}{2} \right),$$

η οποία αγνοώντας τον όρο  $\frac{\hbar\omega_m}{2}$  γίνεται η Εξ. 4.109

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m = \hbar\omega_m \hat{N}_m.$$

Ακόμα είδαμε την Εξ. 4.126 στην Ενότητα 4.5, η οποία περιγράφει ένα δισταθμικό σύστημα, δηλαδή την

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+,$$

η οποία θέτοντας  $E_1 = 0 \Rightarrow E_2 = \hbar\Omega$  (θυμηθείτε την Εξ. 3.46 και την Εξ. 3.12) γίνεται η Εξ. 4.127

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-.$$

Τώρα συμπληρώνεται η εικόνα με την Εξ. 4.166, η οποία περιγράφει την αλληλεπίδραση ενός HM τρόπου  $m$  με ένα δισταθμικό σύστημα, δηλαδή την

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m). \quad (4.170)$$

Άρα, η Χαμιλτονιανή που περιγράφει έναν HM τρόπο  $m$ , ένα δισταθμικό σύστημα και την μεταξύ τους αλληλεπίδραση (ονομάζεται συχνά Χαμιλτονιανή Rabi) μπορεί να γραφτεί

$$\boxed{\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m)} \quad (4.171)$$

Επομένως, οι ολικές ιδιοκαταστάσεις (ηλεκτρονίου και HM τρόπου  $m$ ) είναι

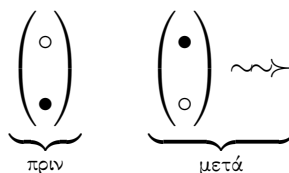
$$|\uparrow, n_m\rangle, \quad (4.172)$$

$$|\downarrow, n_m\rangle. \quad (4.173)$$

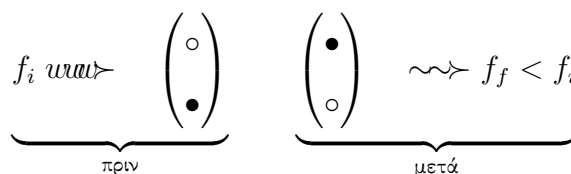
Ας δούμε λίγο προσεκτικότερα τη Χαμιλτονιανή αλληλεπιδράσεως δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου (Εξ. 4.166). Για έναν, μοναδικό τρόπο  $m$  η Χαμιλτονιανή αυτή αναλύεται σε τέσσερις όρους

$$\begin{aligned}\hat{U}_\varepsilon^m &= \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m) = \\ &= \hbar g^m \left\{ \underbrace{\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger}_{1\text{ος}} + \underbrace{\hat{S}_+ \hat{a}_m}_{2\text{ος}} + \underbrace{\hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger}_{3\text{ος}} + \underbrace{\hat{S}_- \hat{a}_m}_{4\text{ος}} \right\}.\end{aligned}$$

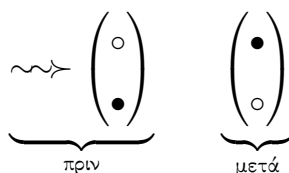
- 1ος ΟΡΟΣ. Το ηλεκτρόνιο ανεβαίνει και δημιουργείται / εκπέμπεται φωτόνιο. Άρα η μεταβολή της ενέργειας  $\Delta E > 0$ . Επομένως, αυτός ο όρος, μόνος του, δεν διατηρεί την ενέργεια και φαντάζει παράλογος. Σχηματικά:



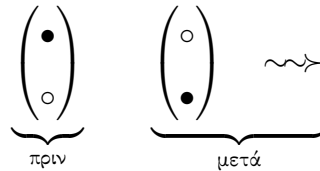
Πλην όμως, είναι δυνατόν να κρατηθούν τέτοιοι όροι όταν υποστηρίζονται πολλοί τρόποι ( $m$ ) άρα πολλές συχνότητες (Εξ. 4.50). Δηλαδή όταν η Χαμιλτονιανή αλληλεπιδράσεως δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου αποτελείται από άθροισμα όρων όπως η Εξ. 4.166. Τότε είναι δυνατόν το δισταθμικό σύστημα να απορροφήσει ένα φωτόνιο υψηλής συχνότητας και να ανεβεί ενώ παράλληλα δημιουργείται / εκπέμπεται φωτόνιο χαμηλότερης συχνότητας. Σχηματικά:



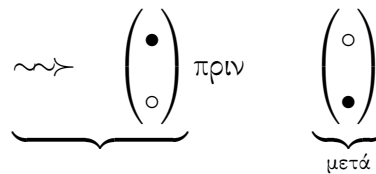
- 2ος ΟΡΟΣ. Το ηλεκτρόνιο ανεβαίνει και καταστρέφεται / απορροφάται φωτόνιο. Αυτός ο όρος, ακόμα κι αν υπάρχει μόνο ένας τρόπος ( $m$ ), μπορεί να διατηρεί την ενέργεια. Σχηματικά:



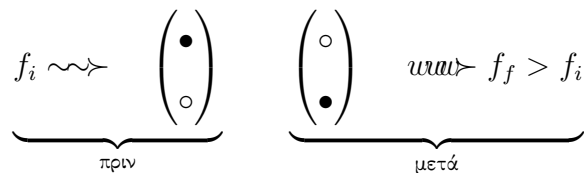
- 3ος ΟΡΟΣ. Το ηλεκτρόνιο κατεβαίνει και δημιουργείται / εκπέμπεται φωτόνιο. Και αυτός ο όρος, ακόμα κι αν υπάρχει μόνο ένας τρόπος ( $m$ ), μπορεί να διατηρεί την ενέργεια. Σχηματικά:



- 4ος ΟΡΟΣ. Το ηλεκτρόνιο κατεβαίνει και καταστρέφεται / απορροφάται φωτόνιο. Άρα η μεταβολή της ενέργειας  $\Delta E < 0$ . Επομένως, και αυτός ο όρος, μόνος του, δεν διατηρεί την ενέργεια και φαντάζει παράλογος. Σχηματικά:



Πλην όμως, είναι δυνατόν να κρατηθούν τέτοιοι όροι όταν υποστηρίζονται πολλοί τρόποι ( $m$ ) άρα πολλές συχνότητες (Εξ. 4.50). Δηλαδή όταν η Χαμιλτονιανή αλληλεπιδράσεως δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου αποτελείται από άθροισμα όρων όπως η Εξ. 4.166. Τότε είναι δυνατόν το δισταθμικό σύστημα να απορροφήσει ένα φωτόνιο χαμηλής συχνότητας και να κατεβεί ενώ παράλληλα δημιουργείται / εκπέμπεται φωτόνιο υψηλότερης συχνότητας. Σχηματικά:



Αν αγνοήσουμε τον 1ο και 4ο όρο που ο καθένας μόνος του δεν διατηρεί την ενέργεια, τότε

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = \hbar g^m \left( \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \right). \quad (4.174)$$

Η προσέγγιση είναι κατά κάποιο τρόπο ανάλογη της RWA (Rotating Wave Approximation) του Κεφαλαίου 3. Εκεί, στις εξισώσεις Rabi κρατήσαμε μόνο τους αργούς όρους όπου ΗΜ πεδίο και το δισταθμικό σύστημα βρίσκονται σε περίπου συντονισμό,

δηλαδή  $\Omega \simeq \omega$ . Τότε κρατήσαμε τους αργούς όρους  $e^{\pm i(\Omega-\omega)t}$  και αγνοήσαμε τους γρήγορους όρους  $e^{\pm i(\Omega+\omega)t}$ .

Συνοπτικά, ενώ για την ολική Χαμιλτονιανή ενός τρόπου  $m$  έχουμε την λεγόμενη Χαμιλτονιανή Rabi

$$\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m), \quad (4.175)$$

κατά την παραπάνω συζήτηση αγνοούμε σε πρώτη προσέγγιση τους λεγόμενους counter-rotating terms

$$\hat{H}_{\text{counter-rotating}} = \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m) \quad (4.176)$$

οπότε λαμβάνουμε τη λεγόμενη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings [35]

$$\boxed{\hat{H}_{JC}^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger)}. \quad (4.177)$$

Ας σημειωθεί ότι στο άρθρο [35] οι συγγραφείς παίρνουν ως μηδενικό επίπεδο αναφοράς το μέσον μεταξύ των δύο ενεργειακών σταθμών, οπότε τότε ο μεσαίος όρος, ο οποίος αρχικά δίνεται από την Εξ. 4.126

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+,$$

αν θέσουμε  $E_1 = -\frac{\hbar\Omega}{2}$  και  $E_2 = \frac{\hbar\Omega}{2}$  (θυμηθείτε την Εξ. 3.46 και την Εξ. 4.135), θα γινόταν

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (4.178)$$

Εμείς, όμως, θα εξακολουθήσουμε να χρησιμοποιούμε ως μηδενικό επίπεδο αναφοράς την  $E_1$ , οπότε ο μεσαίος όρος μας θα είναι

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-.$$

Στην **Άσκηση 1** (παραλείπουμε για απλότητα τον δείκτη του HM τρόπου  $m$ ) βρίσκουμε (A) τι κάνουν οι όροι  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $\hat{a} \hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{S}_+ \hat{S}_-$ ,  $\hat{S}_- \hat{S}_+$ ,  $\hat{S}_+ \hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{S}_+ \hat{a}$ ,  $\hat{S}_- \hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{S}_- \hat{a}$ , στις καταστάσεις  $|\downarrow, n\rangle$  και  $|\uparrow, n\rangle$ , και (B) υπολογίζουμε τα  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ ,  $\langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_+ \hat{a} \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_- \hat{a} \rangle$ , για τις καταστάσεις  $|\downarrow, n\rangle$  και  $|\uparrow, n\rangle$ .

## 4.9 Σύνοψη Χαμιλτονιανών.

Μέχρι τώρα είδαμε την Εξ. 4.100 στην Ενότητα 4.4, η οποία περιγράφει έναν HM τρόπο  $m$ , δηλαδή την

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \left( \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \frac{1}{2} \right),$$

η οποία αγνοώντας τον όρο  $\frac{\hbar\omega_m}{2}$  γίνεται η Εξ. 4.109

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m.$$

Ακόμα είδαμε την Εξ. 4.126 στην Ενότητα 4.5, η οποία περιγράφει ένα δισταθμικό σύστημα, δηλαδή την

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+,$$

η οποία θέτοντας  $E_1 = 0 \Rightarrow E_2 = \hbar\Omega$  (θυμηθείτε την Εξ. 3.46 και την Εξ. 3.12) γίνεται η Εξ. 4.127

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-.$$

Ακόμα είδαμε την Εξ. 4.166, η οποία περιγράφει την αλληλεπίδραση ενός HM τρόπου  $m$  με ένα δισταθμικό σύστημα, δηλαδή την

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m).$$

Οπότε, η Χαμιλτονιανή που περιγράφει έναν HM τρόπο  $m$ , ένα δισταθμικό σύστημα και την μεταξύ τους αλληλεπίδραση (ονομάζεται συχνά Χαμιλτονιανή Rabi) μπορεί να γραφτεί (Εξ. 4.171)

$$\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m)$$

και οι ολικές ιδιοκαταστάσεις (ηλεκτρονίου και HM τρόπου  $m$ ) είναι

$$\begin{aligned} &|\uparrow, n_m\rangle, \\ &|\downarrow, n_m\rangle. \end{aligned}$$

Ακόμα, αν αγνοήσουμε σε πρώτη προσέγγιση τους λεγόμενους counter-rotating terms (Εξ. 4.176)

$$\hat{H}_{\text{counter-rotating}} = \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m),$$

τότε λαμβάνουμε τη λεγόμενη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings [35] (Εξ. 4.177)

$$\hat{H}_{JC}^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger).$$

## 4.10 Μέσες (αναμενόμενες) τιμές μεγεθών για τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings.

Υπενθυμίζουμε πως φτάσαμε στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings. Η ολική Χαμιλτονιανή (ενός τρόπου  $m$ ) είναι η λεγόμενη Χαμιλτονιανή Rabi (Εξ. 4.175)

$$\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m) \quad (4.179)$$

και αν αγνοήσουμε σε πρώτη προσέγγιση λεγόμενους counter-rotating terms (Εξ. 4.176)

$$\hat{H}_{\text{counter-rotating}} = \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m) \quad (4.180)$$

λαμβάνουμε τη λεγόμενη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings (Εξ. 4.177)

$$\hat{H}_{JC}^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger) \quad (4.181)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τα  $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \rangle$  για τις καταστάσεις:

- (A)  $|\Psi_A(t)\rangle = c_1(t) |\downarrow, n\rangle + c_2(t) |\uparrow, n-1\rangle$
- (E)  $|\Psi_E(t)\rangle = c_1(t) |\downarrow, n+1\rangle + c_2(t) |\uparrow, n\rangle$

### Περίπτωση (A)

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(A)} &= \langle \psi_A(t) | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \psi_A(t) \rangle = \{ c_1^* \langle \downarrow, n | + c_2^* \langle \uparrow, n-1 | \} \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \{ c_1 |\downarrow, n\rangle + c_2 |\uparrow, n-1\rangle \} \\ &= |c_1|^2 \langle \downarrow, n | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \downarrow, n \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \uparrow, n-1 \rangle \\ &\quad + c_2^* c_1 \langle \uparrow, n-1 | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \downarrow, n \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n-1 | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \uparrow, n-1 \rangle \\ &= |c_1|^2 \sqrt{n} \sqrt{n} \langle \downarrow, n | \downarrow, n \rangle + c_1^* c_2 \sqrt{n-1} \sqrt{n-1} \langle \downarrow, n | \uparrow, n-1 \rangle \\ &\quad + c_2^* c_1 \sqrt{n} \sqrt{n} \langle \uparrow, n-1 | \downarrow, n \rangle + |c_2|^2 \sqrt{n-1} \sqrt{n-1} \langle \uparrow, n-1 | \uparrow, n-1 \rangle \\ &= n |c_1|^2 \cdot 1 + c_1^* c_2 (n-1) \cdot 0 + c_2^* c_1 n \cdot 0 + (n-1) |c_2|^2 \cdot 1 \\ &= n |c_1|^2 + n |c_2|^2 - |c_2|^2 = n (|c_1|^2 + |c_2|^2) - |c_2|^2 = n - |c_2|^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(A)} = n - |c_2(t)|^2 \quad (4.182)$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(A)} &= \langle \psi_A(t) | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \psi_A(t) \rangle = \{ c_1^* \langle \downarrow, n | + c_2^* \langle \uparrow, n-1 | \} \hat{S}_+ \hat{S}_- \{ c_1 | \downarrow, n \rangle + c_2 | \uparrow, n-1 \rangle \} \\
&= |c_1|^2 \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \downarrow, n \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \uparrow, n-1 \rangle \\
&\quad + c_2^* c_1 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \downarrow, n \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \uparrow, n-1 \rangle \\
&= |c_1|^2 \cdot 0 + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n | \uparrow, n-1 \rangle + c_2^* c_1 \cdot 0 + |c_2|^2 \langle \uparrow, n-1 | \uparrow, n-1 \rangle \Rightarrow \\
&\quad \boxed{\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(A)} = |c_2(t)|^2} \tag{4.183}
\end{aligned}$$

Αρα

$$\boxed{\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(A)} + \langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(A)} = n} \tag{4.184}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle_{(A)} &= \langle \psi_A(t) | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \psi_A(t) \rangle = \{ c_1^* \langle \downarrow, n | + c_2^* \langle \uparrow, n-1 | \} \hat{S}_+ \hat{a}_m \{ c_1 | \downarrow, n \rangle + c_2 | \uparrow, n-1 \rangle \} \\
&= |c_1|^2 \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \downarrow, n \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \uparrow, n-1 \rangle \\
&\quad + c_2^* c_1 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \downarrow, n \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \uparrow, n-1 \rangle \\
&= |c_1|^2 \sqrt{n} \langle \downarrow, n | \uparrow, n-1 \rangle + c_1^* c_2 \sqrt{n-1} \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ | \uparrow, n-2 \rangle \\
&\quad + c_2^* c_1 \sqrt{n} \langle \uparrow, n-1 | \uparrow, n-1 \rangle + |c_2|^2 \sqrt{n-1} \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_+ | \uparrow, n-2 \rangle \Rightarrow \\
&\quad \boxed{\langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle_{(A)} = c_2^*(t) c_1(t) \sqrt{n}} \tag{4.185}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \rangle_{(A)} &= \langle \psi_A(t) | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \psi_A(t) \rangle = \{ c_1^* \langle \downarrow, n | + c_2^* \langle \uparrow, n-1 | \} \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \{ c_1 | \downarrow, n \rangle + c_2 | \uparrow, n-1 \rangle \} \\
&= |c_1|^2 \langle \downarrow, n | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \downarrow, n \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \uparrow, n-1 \rangle \\
&\quad + c_2^* c_1 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \downarrow, n \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \uparrow, n-1 \rangle \\
&= |c_1|^2 \sqrt{n+1} \langle \downarrow, n | \hat{S}_- | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 \sqrt{n} \langle \downarrow, n | \downarrow, n \rangle \\
&\quad + c_2^* c_1 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_- | \downarrow, n+1 \rangle \sqrt{n+1} + |c_2|^2 \langle \uparrow, n-1 | \downarrow, n \rangle \sqrt{n} \Rightarrow \\
&\quad \boxed{\langle \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \rangle_{(A)} = c_1^*(t) c_2(t) \sqrt{n}} \tag{4.186}
\end{aligned}$$

## Περίπτωση (E)

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(E)} &= \langle \psi_E(t) | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \psi_E(t) \rangle = \{ c_1^* \langle \downarrow, n+1 | + c_2^* \langle \uparrow, n | \} \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \{ c_1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_2 | \uparrow, n \rangle \} \\
&= |c_1|^2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \uparrow, n \rangle \\
&\quad + c_2^* c_1 \langle \uparrow, n | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \downarrow, n+1 \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \uparrow, n \rangle \\
&= |c_1|^2 \sqrt{n+1} \sqrt{n+1} \langle \downarrow, n+1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 n \langle \downarrow, n+1 | \uparrow, n \rangle \\
&\quad + c_2^* c_1 (n+1) \langle \uparrow, n | \downarrow, n+1 \rangle + |c_2|^2 n \langle \uparrow, n | \uparrow, n \rangle \\
&= |c_1|^2 (n+1) + n |c_2|^2 = n(|c_1|^2 + |c_2|^2) + |c_1|^2 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(E)} = n + |c_1(t)|^2} \quad (4.187)$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(E)} &= \langle \psi_E(t) | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \psi_E(t) \rangle = \{ c_1^* \langle \downarrow, n+1 | + c_2^* \langle \uparrow, n | \} \hat{S}_+ \hat{S}_- \{ c_1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_2 | \uparrow, n \rangle \} \\
&= |c_1|^2 \cdot 0 + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n+1 | \uparrow, n \rangle + c_2^* c_1 \cdot 0 + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \uparrow, n \rangle \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(E)} = |c_2(t)|^2} \quad (4.188)$$

Άρα

$$\boxed{\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(E)} + \langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(E)} = n + 1} \quad (4.189)$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle_{(E)} &= \langle \psi_E(t) | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \psi_E(t) \rangle = \{ c_1^* \langle \downarrow, n+1 | + c_2^* \langle \uparrow, n | \} \hat{S}_+ \hat{a}_m \{ c_1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_2 | \uparrow, n \rangle \} \\
&= |c_1|^2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \uparrow, n \rangle \\
&\quad + c_2^* c_1 \langle \uparrow, n | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \downarrow, n+1 \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \uparrow, n \rangle \\
&= |c_1|^2 \sqrt{n+1} \langle \downarrow, n+1 | \uparrow, n \rangle + c_1^* c_2 \cdot 0 + c_2^* c_1 \sqrt{n+1} \langle \uparrow, n | \uparrow, n \rangle + |c_2|^2 \cdot 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle_{(E)} = c_2^*(t) c_1(t) \sqrt{n+1}} \quad (4.190)$$



$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \rangle_{(E)} &= \langle \psi_E(t) | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \psi_E(t) \rangle = \{ c_1^* \langle \downarrow, n+1 | + c_2^* \langle \uparrow, n | \} \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \{ c_1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_2 | \uparrow, n \rangle \} \\
&= |c_1|^2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \uparrow, n \rangle \\
&\quad + c_2^* c_1 \langle \uparrow, n | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \downarrow, n+1 \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \uparrow, n \rangle \\
&= |c_1|^2 \sqrt{n+2} \langle \downarrow, n+1 | \uparrow, n+2 \rangle + c_1^* c_2 \sqrt{n+1} \langle \downarrow, n+1 | \downarrow, n+1 \rangle \\
&\quad + c_2^* c_1 \cdot 0 + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \downarrow, n+1 \rangle \sqrt{n+1} \Rightarrow \\
&\quad \boxed{\langle \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \rangle_{(E)} = c_1^*(t) c_2(t) \sqrt{n+1}} \tag{4.191}
\end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις που αποδείξαμε παραπάνω στις επόμενες Ενότητες 4.11-4.12.

### 4.11 Απορρόφηση φωτονίου.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα απορροφήσεως ενός φωτονίου που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$|\Psi_A(t)\rangle = c_1(t) |\downarrow, n_m\rangle + c_2(t) |\uparrow, n_m - 1\rangle, \quad (4.192)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_A(t)\rangle = \hat{H} |\Psi_A(t)\rangle, \quad (4.193)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_{JC}^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger), \quad (4.194)$$

και τις αρχικές συνθήκες

$$c_1(0) = 1, \quad c_2(0) = 0. \quad (4.195)$$

Το αριστερό μέρος,  $A'$ , της χρονοεξαρτημένης εξισώσεως Schrödinger 4.193, γίνεται

$$A' = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_A(t)\rangle = i\hbar \dot{c}_1 |\downarrow, n_m\rangle + i\hbar \dot{c}_2 |\uparrow, n_m - 1\rangle \quad (4.196)$$

ενώ το δεξιό  $\Delta'$

$$\begin{aligned} \Delta' &= \hat{H} |\Psi_A(t)\rangle = \\ &(\hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hbar g^m \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger)(c_1 |\downarrow, n_m\rangle + c_2 |\uparrow, n_m - 1\rangle) = \\ &c_1 \hbar\omega_m n_m |\downarrow, n_m\rangle + c_1 \hbar\Omega \cdot \underline{\mathbf{0}} + c_1 \hbar g^m |\uparrow, n_m - 1\rangle \sqrt{n_m} + c_1 \hbar g^m \cdot \underline{\mathbf{0}} + \\ &c_2 \hbar\omega_m (n_m - 1) |\uparrow, n_m - 1\rangle + c_2 \hbar\Omega |\uparrow, n_m - 1\rangle + c_2 \hbar g^m \cdot \underline{\mathbf{0}} + \hbar g^m |\downarrow, n_m\rangle \sqrt{n_m} c_2 = \\ &c_1 \hbar\omega_m n_m |\downarrow, n_m\rangle + c_1 \hbar g^m |\uparrow, n_m - 1\rangle \sqrt{n_m} + \\ &c_2 \hbar\omega_m (n_m - 1) |\uparrow, n_m - 1\rangle + c_2 \hbar\Omega |\uparrow, n_m - 1\rangle + \hbar g^m |\downarrow, n_m\rangle \sqrt{n_m} c_2 \end{aligned}$$

Επιδρώντας με  $\langle \downarrow, n |$  στα  $A'$  και  $\Delta'$

$$\left. \begin{array}{l} \text{το αριστερό μέρος γίνεται} \\ \text{το δεξιό μέρος γίνεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} i\hbar \dot{c}_1 \\ \hbar\omega_m n_m c_1 + \hbar g^m \sqrt{n_m} c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (4.197)$$

$$i\dot{c}_1 = n_m \omega_m c_1 + g^m \sqrt{n_m} c_2$$

Επιδρώντας με  $\langle \uparrow, n - 1 |$  στα  $A'$  και  $\Delta'$

$$\left. \begin{array}{l} \text{το αριστερό μέρος γίνεται} \\ \text{το δεξιό μέρος γίνεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} i\hbar \dot{c}_2 \\ \hbar g^m \sqrt{n_m} c_1 + \hbar\omega_m (n_m - 1) c_2 + \hbar\Omega c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$i\dot{c}_2 = g^m \sqrt{n_m} c_1 + [\Omega + (n_m - 1)\omega_m] c_2 \quad (4.198)$$

Δηλαδή καταλήγουμε στο Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων

$$i \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_m \omega_m & g^m \sqrt{n_m} \\ g^m \sqrt{n_m} & \Omega + (n_m - 1)\omega_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (4.199)$$

Ορίζουμε τώρα τη γενικευμένη συχνότητα Rabi

$$\Omega_{n_m} := \left[ \left( \frac{\omega_m - \Omega}{2} \right)^2 + g_m^2 n_m \right]^{1/2}. \quad (4.200)$$

ή παραλείποντας για απλότητα το δείκτη  $m$  που δηλώνει τον HM τρόπο

$$\Omega_n := \left[ \left( \frac{\omega - \Omega}{2} \right)^2 + g^2 n \right]^{1/2}. \quad (4.201)$$

Επιλύοντας το Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων (4.199) π.χ. με τη Μέθοδο των Ιδιοτιμών (δείτε Παράρτημα Β'.9), προκύπτει

$$c_1(t) = \exp \left[ -i \left( n\omega + \frac{\Omega - \omega}{2} \right) t \right] \left\{ \cos(\Omega_n t) + i \frac{\Omega - \omega}{2\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right\} \quad (4.202)$$

και

$$c_2(t) = \exp \left[ -i \left( n\omega + \frac{\Omega - \omega}{2} \right) t \right] \left\{ -i \frac{g\sqrt{n}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right\} \Rightarrow$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{ng^2}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t). \quad (4.203)$$

Οπότε,

$$|c_1(t)|^2 = 1 - |c_2(t)|^2 = \dots \quad (4.204)$$

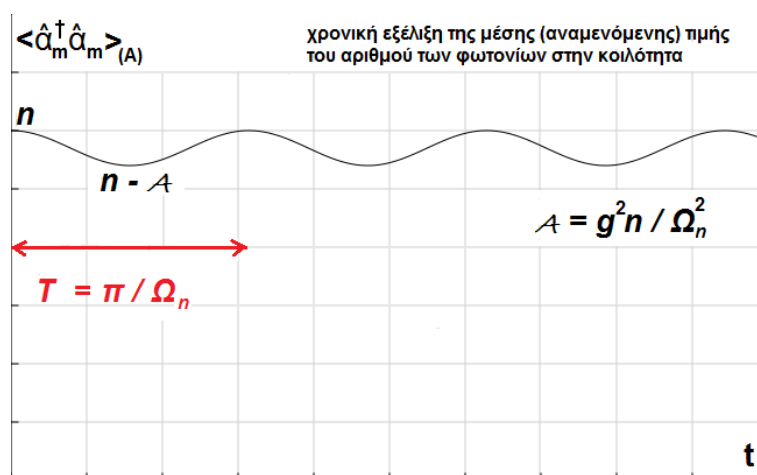
Άρα

$$\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(A)} = n - \frac{ng^2 \sin^2(\Omega_n t)}{\Omega_n^2}, \quad (4.205)$$

δηλαδή η μέση (αναμενόμενη) τιμή του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα συναρτήσει του χρόνου θα πραγματοποιεί ταλαντώσεις, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 4.7. Ο δείκτης ( $A$ ) σημαίνει απορρόφηση (absorption). Επίσης,

$$\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(A)} = \frac{ng^2}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t), \quad (4.206)$$

δηλαδή η μέση (αναμενόμενη) τιμή του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη  $E_2$  συναρτήσει του χρόνου θα πραγματοποιεί ταλαντώσεις, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 4.8 και καλούνται συχνά ταλαντώσεις Rabi. Το πλάτος των ταλαντώσεων,



Σχήμα 4.7: Απορρόφηση φωτονίου. Η χρονική εξέλιξη της μέσης (αναμενόμενης) τιμής του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα,  $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(A)} = n - \frac{ng^2}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t)$ .



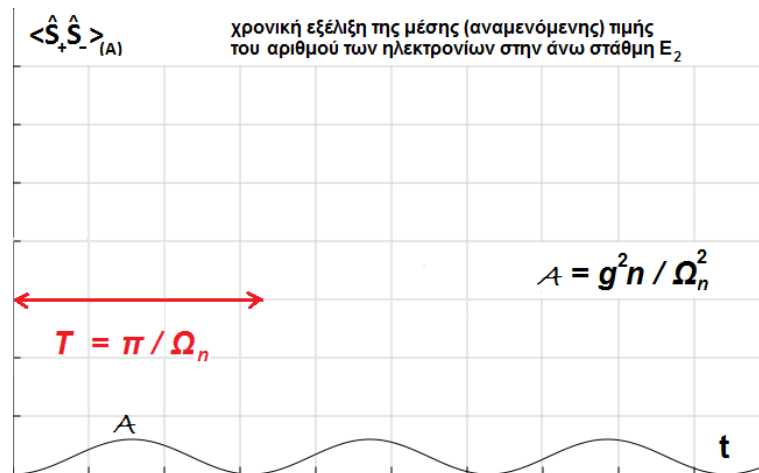
$A$ , όπως φαίνεται από τις Εξ. (4.205), (4.206), (4.200) είναι

$$\mathcal{A} = \frac{g^2 n}{\Omega_n^2} = \frac{g^2 n}{\left(\frac{\omega - \Omega}{2}\right)^2 + g^2 n} \quad (4.207)$$

Επομένως

- Για  $\Omega = \omega$  (συντονισμός)  $\implies \mathcal{A} = 1$
- Για  $\Omega \neq \omega$  (μη συντονισμός)  $\implies \mathcal{A} < 1$





Σχήμα 4.8: Απορρόφηση φωτονίου. Η χρονική εξέλιξη της μέσης (αναμενόμενης) τιμής του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη  $E_2$ ,  $\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(A)} = \frac{ng^2}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t)$ .

Επειδή  $\sin^2(\Omega_n t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\Omega_n t)$ , η περίοδος των ταλαντώσεων είναι

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi}{2\Omega_n} = \frac{\pi}{\Omega_n} = \frac{\pi}{\left[ \left( \frac{\omega - \Omega}{2} \right)^2 + g^2 n \right]^{1/2}} \quad (4.208)$$

Στο συντονισμό ( $\omega = \Omega$ ) μεγιστοποιείται η περίοδος σε  $\mathcal{T} = \frac{\pi}{g\sqrt{n}}$ .

Συμπερασματικά η συχνότητα Rabi  $g$  και ο αποσυντονισμός (detuning) που ορίσαμε στην Εξ. 3.51 ως  $\Delta := \omega - \Omega$  καθορίζουν το πλάτος και την περίοδο των ταλαντώσεων.

## 4.12 Εκπομπή φωτονίου.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα εκπομπής ενός φωτονίου που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$|\Psi_E(t)\rangle = c_1(t)|\downarrow, n_m + 1\rangle + c_2|\uparrow, n_m\rangle \quad (4.209)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_E(t)\rangle = \hat{H} |\Psi_E(t)\rangle \quad (4.210)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_{JC}^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger), \quad (4.211)$$

και τις αρχικές συνθήκες

$$c_1(0) = 0, \quad c_2(0) = 1 \quad (4.212)$$

Το αριστερό μέρος,  $A'$ , της χρονοεξαρτημένης εξίσωσης Schrödinger 4.210, γίνεται

$$A' = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_E(t)\rangle = i\hbar \dot{c}_1 |\downarrow, n_m + 1\rangle + i\hbar \dot{c}_2 |\uparrow, n_m\rangle \quad (4.213)$$

ενώ το δεξιό  $\Delta'$

$$\begin{aligned} \Delta' = \hat{H} |\Psi_E(t)\rangle = & (\hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hbar g^m \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger) (c_1 |\downarrow, n_m + 1\rangle + c_2 |\uparrow, n_m\rangle) = \\ & \hbar\omega_m c_1 (n_m + 1) |\downarrow, n_m + 1\rangle + \hbar\Omega c_1 \cdot 0 + \hbar g^m c_1 |\uparrow, n_m\rangle \sqrt{n_m + 1} + \hbar g^m c_1 \cdot 0 + \\ & \hbar\omega_m c_2 n_m |\uparrow, n_m\rangle + \hbar\Omega c_2 |\uparrow, n_m\rangle + \hbar g^m c_2 \cdot 0 + \hbar g^m c_2 |\downarrow, n_m + 1\rangle \sqrt{n_m + 1} = \\ & \hbar\omega_m c_1 (n_m + 1) |\downarrow, n_m + 1\rangle + \hbar g^m c_1 \sqrt{n_m + 1} |\uparrow, n_m\rangle + \\ & \hbar\omega_m c_2 n_m |\uparrow, n_m\rangle + \hbar\Omega c_2 |\uparrow, n_m\rangle + \hbar g^m c_2 \sqrt{n_m + 1} |\downarrow, n_m + 1\rangle \end{aligned} \quad (4.214)$$

Επιδρώντας με  $\langle \downarrow, n + 1 |$  στα  $A'$  και  $\Delta'$

$$\left. \begin{array}{l} \text{το αριστερό μέρος γίνεται} \\ \text{το δεξιό μέρος γίνεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hbar\omega_m c_1 (n_m + 1) + \hbar g^m c_2 \sqrt{n_m + 1} \quad (4.215)$$

$$i\dot{c}_1 = \omega_m (n_m + 1) c_1 + g^m \sqrt{n_m + 1} c_2$$

Επιδρώντας με  $\langle \uparrow, n |$  στα  $A'$  και  $\Delta'$

$$\left. \begin{array}{l} \text{το αριστερό μέρος γίνεται} \\ \text{το δεξιό μέρος γίνεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hbar g^m c_1 \sqrt{n_m + 1} + \hbar\omega_m c_2 n_m + \hbar\Omega c_2$$

$$i\dot{c}_2 = g^m \sqrt{n_m + 1} c_1 + (n_m \omega_m + \Omega) c_2 \quad (4.216)$$

Δηλαδή καταλήγουμε στο Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων

$$i \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n_m + 1)\omega_m & g^m \sqrt{n_m + 1} \\ g^m \sqrt{n_m + 1} & \Omega + n_m \omega_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (4.217)$$

Ορίζουμε τώρα τη γενικευμένη συχνότητα Rabi

$$\Omega_{n_m+1} := \left[ \left( \frac{\omega_m - \Omega}{2} \right)^2 + g_m^2 (n_m + 1) \right]^{1/2}. \quad (4.218)$$

ή παραλείποντας για απλότητα το δείκτη  $m$  που δηλώνει τον ΗΜ τρόπο

$$\Omega_{n+1} := \left[ \left( \frac{\omega - \Omega}{2} \right)^2 + g^2 (n + 1) \right]^{1/2}. \quad (4.219)$$

Επιλύοντας το Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων (4.217) π.χ. με τη Μέθοδο των Ιδιοτιμών (δείτε Παράρτημα Β'9), προκύπτει

$$c_1(t) = \exp \left[ -i \left( (n + 1)\omega + \frac{\Omega - \omega}{2} \right) t \right] \left[ -i \frac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_{n+1}} \sin(\Omega_{n+1}t) \right] \quad (4.220)$$

και

$$c_2(t) = \exp \left[ -i \left( (n + 1)\omega + \frac{\Omega - \omega}{2} \right) t \right] \left[ \cos(\Omega_{n+1}t) - i \frac{\Omega - \omega}{2\Omega_{n+1}} \sin(\Omega_{n+1}t) \right] \Rightarrow$$

$$|c_1(t)|^2 = \frac{(n+1)g^2}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1}t) \quad (4.221)$$

και

$$|c_2(t)|^2 = 1 - |c_1(t)|^2 = \dots \quad (4.222)$$

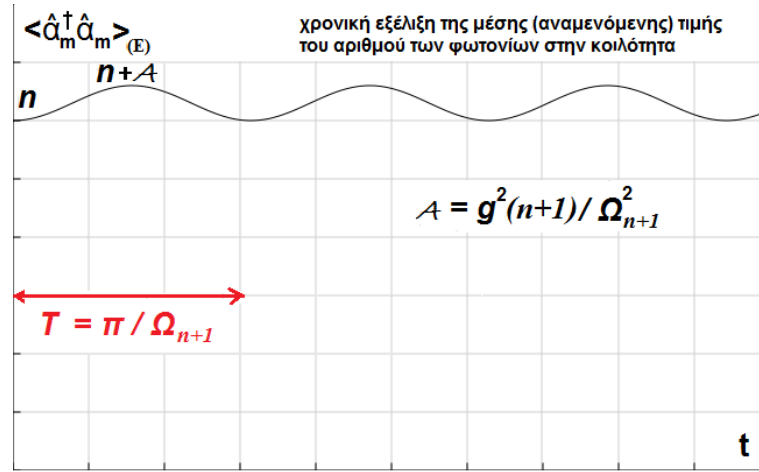
Άρα

$$\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(E)} = n + \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1}t) \quad (4.223)$$

δηλαδή η μέση (αναμενόμενη) τιμή του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα συναρτήσει του χρόνου θα πραγματοποιεί ταλαντώσεις, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 4.9. Ο δείκτης ( $E$ ) σημαίνει εκπομπή (emission). Επίσης,

$$\left\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \right\rangle_{(E)} = 1 - \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1}t) \quad (4.224)$$

δηλαδή η μέση (αναμενόμενη) τιμή του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη  $E_2$  συναρτήσει του χρόνου θα πραγματοποιεί ταλαντώσεις, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 4.10.



Σχήμα 4.9: Εκπομπή φωτονίου. Η χρονική εξέλιξη της μέσης (αναμενόμενης) τιμής του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα,  $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(E)} = n + \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1}t)$ .

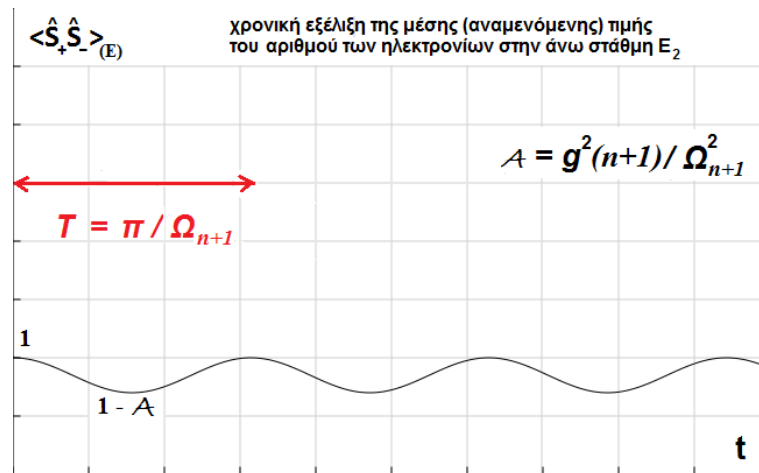
Όπως στην περίπτωση της απορρόφησης φωτονίου, έτσι και στην περίπτωση εκπομπής φωτονίου το πλάτος των ταλαντώσεων,  $\mathcal{A}$ , όπως φαίνεται από τις Εξ. (4.223), (4.224), (4.218) είναι

$$\mathcal{A} = \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} = \frac{g^2(n+1)}{(\frac{\omega-\Omega}{2})^2 + g^2(n+1)} \quad (4.225)$$

Επομένως

- Για  $\Omega = \omega$  (συντονισμός)  $\implies \mathcal{A} = 1$
- Για  $\Omega \neq \omega$  (μη συντονισμός)  $\implies \mathcal{A} < 1$





Σχήμα 4.10: Εκπομπή φωτονίου. Η χρονική εξέλιξη της μέσης (αναμενόμενης) τιμής του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη  $E_2$ ,  $\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(E)} = 1 - \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1}t)$ .

Επειδή  $\sin^2(\Omega_{n+1}t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\Omega_{n+1}t)$ , η περίοδος των ταλαντώσεων είναι

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi}{2\Omega_{n+1}} = \frac{\pi}{\Omega_{n+1}} = \frac{\pi}{\left[ \left( \frac{\omega - \Omega}{2} \right)^2 + g^2(n+1) \right]^{1/2}} \quad (4.226)$$

Στο συντονισμό ( $\omega = \Omega$ ) μεγιστοποιείται η περίοδος σε  $\mathcal{T} = \frac{\pi}{g\sqrt{n+1}}$ .

Συμπερασματικά η συχνότητα Rabi  $g$  και ο αποσυντονισμός (detuning) που ορίσαμε στην Εξ. 3.51 ως  $\Delta := \omega - \Omega$  καθορίζουν το πλάτος και την περίοδο των ταλαντώσεων.

### 4.13 Αναφορές 4ου Κεφαλαίου.

Η αρίθμηση αναφέρεται στη βιβλιογραφία όπως αυτή παρατίθεται συνολικά πριν από τα Παραρτήματα.

[33] S. Gasiorowicz, Quantum Physics, Second Edition, John Wiley and Sons Inc. (1996), New York, ISBN-13: 9780471857372, ISBN-10: 0471857378.

[34] D.A. Steck, Quantum and Atom Optics, Oregon Center for Optics and Department of Physics, University of Oregon, revision 0.8.3, 25 May 2012, available online at <http://steck.us/teaching>.

[35] E.T. Jaynes and F.W. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, Proceedings of the IEEE 51 (1963) 89-109.

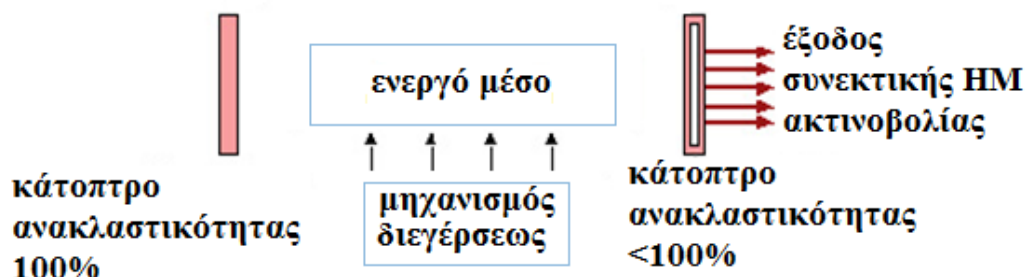
# Κεφάλαιο 5

## Lasers.

Το LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) στηρίζεται σε ιδέες του Einstein που δημοσιεύτηκαν στα 1916-1917 [19]. Δεκαετίες μετά (1950-1960), κατόπιν διεθνών προσπαθειών πολλών επιφανών και μη ερευνητών, κατασκευάστηκαν τα πρώτα MASER και LASER. Το 1964 οι Charles Townes, Nikolay Basov, Aleksandr Prokhorov μοιράστηκαν το Βραβείο Νόμπελ Φυσικής “για θεμελιώδες έργο στο πεδίο της κβαντικής ηλεκτρονικής, έργο που οδήγησε στην κατασκευή ταλαντωτών και ενισχυτών βασισμένων στην αρχή λειτουργίας των MASER-LASER”. Τα πρώτα LASER χαρακτηρίστηκαν ακόμα και ως λύση σε αναζήτηση προβλήματος, αλλά σήμερα τα LASER χρησιμοποιούνται σε ιατρική, επικοινωνίες, καθημερινή ζωή, στρατό, βιομηχανία, κοσμητική, κ.ο.κ.. Το LASER είναι μια διάταξη που μετατρέπει ενέργεια από άλλες μορφές σε συνεκτική ΗΜ ακτινοβολία. Η εισερχόμενη ενέργεια μπορεί να είναι ΗΜ ακτινοβολία, ηλεκτρική ενέργεια, χημική ενέργεια κλπ ενώ η εξερχόμενη ενέργεια είναι συνεκτική ΗΜ ακτινοβολία. Ακόμα, εκτός από το ακρωνύμιο LASER, σήμερα χρησιμοποιούνται και παράγωγες λέξεις όπως το lase, lasing. Θα χρησιμοποιούμε εναλλακτικά τόσο το LASER όσο και το laser.

Μια διάταξη LASER απεικονίζεται στο Σχήμα 5.1. Το **ενεργό μέσο** (active medium) είναι μια συλλογή δομικών λίθων (ατόμων, μορίων, ...). Η **κοιλότητα** (cavity) είναι ο χώρος όπου περιορίζεται το ενεργό μέσο π.χ. ένας γυάλινος σωλήνας. Έχουμε στάσιμα κύματα στη διεύθυνση των κατόπτρων, δηλαδή παράλληλα στον “οπτικό άξονα” π.χ. τον άξονα  $z$ . Η απόσταση των κατόπτρων  $L$  καθορίζει τους επιτρεπόμενους **τρόπους** (modes) της ΗΜ ακτινοβολίας, δηλαδή τα  $\omega_m$ . Είναι οι λεγόμενοι **διαμήκεις τρόποι** (longitudinal modes). Οι **εγκάρσιοι τρόποι** (transverse modes) που δημιουργούνται από το εύρος της κοιλότητας καθορίζουν την κατανομή της ενέργειας κατά μήκος και πλάτος της διατομής, δηλαδή κάθετα στον “οπτικό άξονα” π.χ. στο επίπεδο  $xy$ .

## LASER

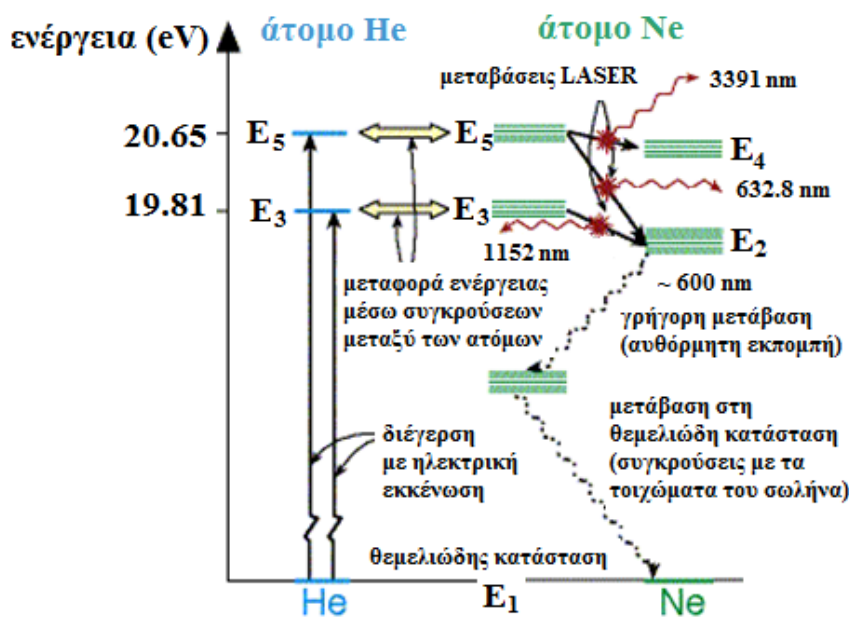


Σχήμα 5.1: Μια διάταξη LASER.

### 5.1 Laser He-Ne.

Ο μηχανισμός διεγέρσεως - αντλήσεως στο LASER He-Ne παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.2. Το ενεργό μέσο είναι μίγμα αερίων Νέου (Ne) - Ηλίου (He) σε αναλογία περίπου 1:10. Κεντρικό ρόλο παίζουν τα άτομα Νέου, ενώ τα άτομα Ηλίου βοηθούν την διέγερση των ατόμων Νέου όπως εξηγείται παρακάτω. Ο μηχανισμός διεγέρσεως αποτελείται από τα εξής βήματα: Αρχικά, μια ηλεκτρική εκκένωση δημιουργεί επιταχυνόμενα ηλεκτρόνια τα οποία διεγείρουν άτομα He και Ne. Μετά τα άτομα He διεγείρουν άτομα Ne. Σε αυτό το LASER οι σημαντικότερες διαδικασίες γίνεται μεταξύ τεσσάρων (4) ενεργειακών σταθμών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2. Δύο μετασταθείς ενεργειακές στάθμες, οι  $E_5$  και  $E_3$ , δρουν ως άνω στάθμες LASER, ενώ οι λιγότερο σταθερές  $E_4$  και  $E_2$  δρουν ως κάτω στάθμες LASER. **Μετασταθής ενεργειακή στάθμη** (meta-stable energy level) είναι μια “ημι-σταθερή” ενεργειακή στάθμη, δηλαδή με όχι αμελητέο, αλλά και όχι άπειρο χρόνο ζωής. Έτσι, οι κυριότερες επιτρεπόμενες μεταβάσεις είναι: η κύρια ορατή μετάβαση μεταξύ των σταθμών  $E_5$  και  $E_2$ , η οποία είναι η κλασική χαρακτηριστική ερυθρή του LASER He-Ne στα 632.8 nm, η υπέρυθρη μετάβαση μεταξύ των σταθμών  $E_3$  και  $E_2$ , στα  $1.152 \mu\text{m} = 1152 \text{ nm}$ , η υπέρυθρη μετάβαση μεταξύ των σταθμών  $E_5$  και  $E_4$ , στα  $3.391 \mu\text{m} = 3391 \text{ nm}$ . Τα ενεργειακά επίπεδα έχουν στην πραγματικότητα λεπτή υφή είναι δηλαδή στην πραγματικότητα πολύπλοκα. Έτσι οι προκύπτουσες ενεργειακές μεταβάσεις δεν είναι δέλτα συναρτήσεις αλλά έχουν κάποια κατανομή γύρω από ένα κεντρικό μήκος κύματος. Παρόλο που η σημαντικότερη μετάβαση, “σήμα κατατεθέν” του LASER He-Ne αντιστοιχεί σε μήκος κύματος  $\lambda_1 = 632.8 \text{ nm}$  (ερυθρό, ελαφρώς προς πορτοκαλί), υπάρχουν κι άλλες μεταβάσεις όπως  $\lambda_2 = 1152 \text{ nm}$  και  $\lambda'_2 = 1523$

nm (υπέρυθρο),  $\lambda_3 = 3391$  nm (υπέρυθρο),  $\lambda_4 = 543.5$  nm (πράσινο),  $\lambda_5 = 594.1$  nm (κίτρινο),  $\lambda_6 = 604.6$  nm και  $\lambda'_6 = 611.9$  nm (πορτοκαλί). Το ποιο από αυτά τα χρώματα θα υποστηριχθεί τελικά εξαρτάται από την κατασκευή της διατάξεως LASER όπως π.χ. από την απόσταση μεταξύ των δύο κατόπτρων. Μπορούμε να ενισχύσουμε ένα συγκεκριμένο χρώμα με τη χρήση ειδικής επενδύσεως των κατόπτρων που να ανακλά κυρίως τα επιθυμητά φωτόνια. Αν π.χ. θέλουμε να ενισχύσουμε το ερυθρό φως, επενδύουμε τα κάτοπτρα με κατάλληλη επένδυση ώστε να ανακλούν μόνο το ερυθρό φως. Έτσι, το ερυθρό φως ανακλάται εντός της κοιλότητας και τα φωτόνια του πολλαπλασιάζονται μέσω εξαναγκασμένης εκπομπής μεταξύ των  $E_5$  και  $E_2$ , ενώ τα φωτόνια άλλων μηκών κύματος διαπερνούν τα κάτοπτρα χωρίς να αναγκάζονται να περνούν διαρκώς μέσα από το ενεργό μέσο. Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να ενισχυθούν και άλλα μήκη κύματος. Έτσι, υπάρχουν σήμερα πορτοκαλί, κίτρινα και πράσινα LASERS He-Ne, τα οποία χρησιμοποιούν μεταβάσεις που δεν παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.2. Όμως, μεγαλύτερη απόδοση στο LASER He-Ne έχει το ερυθρό φως στα 632.8 nm. Τέλος, αξ σημειωθεί ότι σε μερικές διατάξεις LASER υπάρχει η δυνατότητα συντονισμού (tuning), δηλαδή επιλογής του επιθυμητού μήκους κύματος ή ακόμα και η εκπομπή δύο ή περισσότερων μηκών κύματος ταυτοχρόνως.



Σχήμα 5.2: Το ενεργειακό διάγραμμα του LASER He-Ne. Παρουσιάζονται οι κυριότερες μόνο στάθμες και μεταβάσεις.

Παρόλο που οι μεταβάσεις στις οποίες στηρίζεται η εκπομπή συνεκτικής ΗΜ ακτινοβολίας αφορούν άτομα Ne, το αέριο He χρησιμοποιείται στο LASER He-Ne διότι έτσι αυξάνεται η απόδοση. Αυτό οφείλεται σε δύο λόγους: Πρώτον, η άμεση διέγερση ατόμων Ne από την ηλεκτρική εκκένωση είναι αναποτελεσματική, ενώ των ατόμων He αποτελεσματική. Δεύτερον, μια από τις διεγερμένες στάθμες του ατόμου του He (η επισημαινόμενη με  $E_5$ ) έχει σχεδόν την ίδια ενέργεια με μια από τις διεγερμένες στάθμες του ατόμου του Ne (την επισημαινόμενη επίσης με  $E_5$ ). Αυτό συμβαίνει και με τις επισημαινόμενες με  $E_3$  διεγερμένες στάθμες. Η διέγερση των ατόμων Ne γίνεται σε τρία στάδια:

1. Η υψηλή τάση επιταχύνει ηλεκτρόνια από την κάθοδο προς την άνοδο.
2. Τα ηλεκτρόνια αυτά συγκρούονται με άτομα He και τους μεταφέρουν την κινητική τους ενέργεια, οπότε τα άτομα He διεγείρονται μεταφέροντας ηλεκτρόνια σε υψηλότερες στάθμες.
3. Τα διεγερμένα άτομα He συγκρούονται με άτομα Ne και τους μεταφέρουν την ενέργεια της διεγέρσεως.

Δηλαδή τα άτομα He δεν συμμετέχουν στο lasing, αλλά αυξάνουν την απόδοση της διεγέρσεως των ατόμων Ne στις άνω στάθμες που συμμετέχουν στο lasing. Έτσι η απόδοση αυξάνεται κατά πολύ.

Στις περισσότερες εφαρμογές του LASER He-Ne χρησιμοποιείται η μετάβαση μεταξύ  $E_5$  και  $E_2$  που δίνει ερυθρό φως με μήκος κύματος  $\lambda = 632.8$  nm. Αυτή είναι η ισχυρότερη γραμμή στην ορατή περιοχή. Ένα πρόβλημα για την δημιουργία αυτών των φωτονίων είναι ότι η ενεργειακή στάθμη  $E_5$  μπορεί να εκπέμψει επίσης στο υπέρυθρο με  $\lambda = 3391$  nm, που αντιστοιχεί στη μετάβαση μεταξύ  $E_5$  και  $E_4$ . Κάτι τέτοιο μειώνει τον πληθυσμό της ενεργειακής στάθμης  $E_5$ , χωρίς να εκπέμπεται ορατή ακτινοβολία.

Η ενίσχυση της συνεκτικής ΗΜ ακτινοβολίας οφείλεται στην εξαναγκασμένη εκπομπή. Σε ένα σύννηδες LASER He-Ne η ενίσχυση του ενεργού μέσου είναι περίπου 2%. Δηλαδή σε ένα πέρασμα από το ενεργό μέσο, από το ένα κάτοπτρο στο άλλο, η ποσότητα ακτινοβολίας αυξάνεται από 1 σε 1.02. Οι απώλειες οφείλονται σε κρούσεις των διεγερμένων ατόμων He με τους τοίχους του σωλήνα που περιέχει το αέριο, σε απορρόφηση από άλλα μόρια κλπ. Θα πρέπει λοιπόν να είναι κάτω από 2%. Για να μπορεί να λειτουργεί ένα LASER πρέπει, όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω, ο χρόνος ζωής των κατωτέρων ενεργειακών σταθμών που συμμετέχουν στο lasing να είναι πολύ μικρός, ώστε να έχουμε αναστροφή πληθυσμού. Στο αέριο Ne, το οποίο είναι το ενεργό μέσο, η μετάπτωση από την κατώτερη ενεργειακή στάθμη που συμμετέχει στο lasing δεν είναι πολύ γρήγορη, αλλά επιταχύνεται μέσω κρούσεων με τα τοιχώματα του σωλήνα. Επειδή ο αριθμός των κρούσεων με τα τοιχώματα το σωλήνα αυξάνε-

ται καθώς ο σωλήνας γίνεται μικρότερος, η ενίσχυση της ακτινοβολίας LASER είναι αντιστρόφως ανάλογη με την ακτίνα του σωλήνα. Άρα η ακτίνα του σωλήνα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη. Η ισχύς εξόδου στα LASER He-Ne συνήθως κυμαίνεται από 0.1-100 mW. Το ένα από τα δύο κάτοπτρα είναι τελείως ανακλαστικό ενώ το άλλο κατά 99% περίπου. Επειδή το ένα κάτοπτρο αφήνει να περάσει μόνο το 1% της ακτινοβολίας, η ισχύς εντός της κοιλότητας είναι 100 φορές μεγαλύτερη από την εκπεμπόμενη ισχύ. Στα LASER He-Ne το μήκος της κοιλότητας είναι της τάξεως των μερικών δεκάδων cm και το πάχος της κοιλότητας είναι της τάξεως των μερικών mm.

## 5.2 Εξισώσεις ρυθμών για τους πληθυσμούς των σταθμών που συμμετέχουν στην εκπομπή συνεκτικής ΗΜ ακτινοβολίας και για την πυκνότητα ακτινοβολίας.

Θα παραγάγουμε τις εξισώσεις ρυθμών, δηλαδή τις εξισώσεις που περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη των πληθυσμών των δύο σταθμών που συμμετέχουν στην εκπομπή συνεκτικής ΗΜ ακτινοβολίας και την εξίσωση που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της πυκνότητας ΗΜ ακτινοβολίας εντός της κοιλότητας. Στο Σχήμα 5.3 παρουσιάζεται ένα σύστημα με τέσσερις στάθμες στο οποίο έχουμε άντληση από τη θεμελιώδη στάθμη ( $\theta$ ) στην άνω (2) στάθμη LASER. Έτσι, “δισταθμικό σύστημα” σημαίνει εδώ ότι υπάρχουν δύο στάθμες μεταξύ των οποίων έχουμε εκπομπή συνεκτικής ΗΜ ακτινοβολίας, οι (1) και (2), αλλά υπάρχουν και άλλες επικουρικές στάθμες όπως η ( $\beta$ ) και η ( $\theta$ ). Η βοηθητική ενεργειακή στάθμη ( $\beta$ ) χρειάζεται για να μη μένουν τα ηλεκτρόνια στην (1), ώστε να διευκολύνεται η αναστροφή πληθυσμού μεταξύ των (1) και (2). Δηλαδή υποτίθεται ότι η αυθόρμητη μετάβαση (1)  $\rightarrow$  ( $\beta$ ) είναι σχετικά γρηγορότερη από την αυθόρμητη μετάβαση (2)  $\rightarrow$  (1). Επιπλέον, η μετάβαση (1)  $\rightarrow$  ( $\beta$ ) είτε είναι μη ακτινοβολούσα, δηλαδή η ενέργεια μειώνεται χωρίς να εκπέμπεται φωτόνιο π.χ. με φωνόνια, είτε ακόμα κι αν είναι ακτινοβολούσα, τα φωτόνια αυτά δεν υποστηρίζονται από τα κάτοπτρα της κοιλότητας. Μια μετάπτωση από μια στάθμη σε μια άλλη λέγεται **μη ακτινοβολούσα** (non-radiative) όταν γίνεται χωρίς να εκπέμπεται ή να απορροφάται φωτόνιο π.χ. με φωνόνια, ενώ λέγεται **ακτινοβολούσα** (radiative) όταν εκπέμπονται ή απορροφούνται φωτόνια.

Αρχικά, ορίζουμε την **άντληση** (pumping),  $R_2 \equiv R$ , η οποία είναι ο ρυθμός με τον οποίο ανεβάζουμε ηλεκτρόνια από τη θεμελιώδη στάθμη ( $\theta$ ) στην άνω (2) στάθμη LASER. Δηλαδή πρόκειται για τον αριθμό των ηλεκτρονίων που ανεβάζουμε διά τον αντίστοιχο χρόνο. Έτσι οι μονάδες μετρήσεως της είναι  $[R] = 1/s$ . Παρακάτω, θα ορίσουμε διάφορους ρυθμούς, οι οποίοι έχουν τις ίδιες μονάδες,  $[1/s]$ .

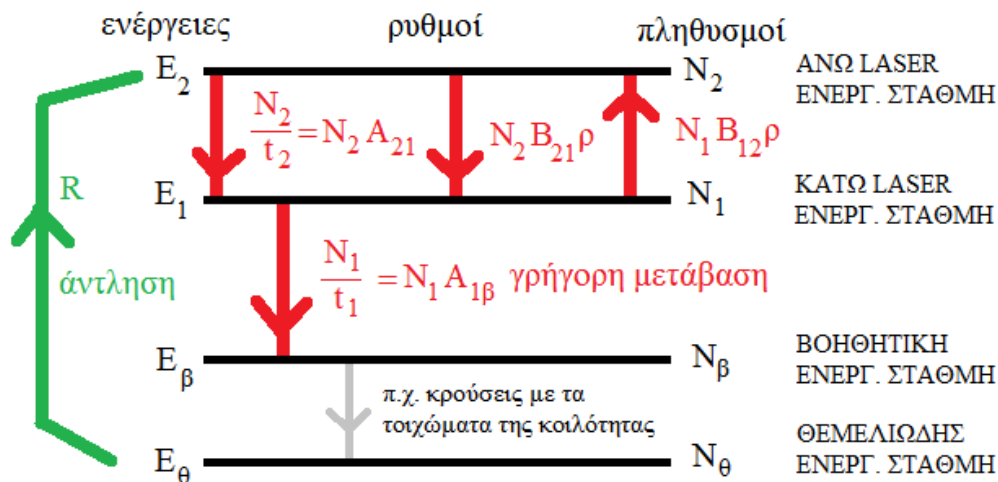
- Για ένα άτομο, η πιθανότητα αυθόρμητης εκπομπής από τη στάθμη (1) στη βοηθητική στάθμη ( $\beta$ ), σε χρόνο  $dt$ , είναι

$$dW_{1 \rightarrow \beta}^{\text{αυθ. εκπ.}} = A_{1\beta} dt. \quad (5.1)$$

Ορίζουμε το “χρόνο ζωής” της στάθμης (1),  $t_1$ , μέσω της σχέσεως

$$1 = A_{1\beta} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{A_{1\beta}} \quad (5.2)$$





Σχήμα 5.3: Σχηματικά ένα σύστημα με δύο στάθμες LASER και δύο επικουρικές στάθμες στο οποίο έχουμε άντληση από τη θεμελιώδη στην άνω στάθμη LASER.

δηλαδή  $t_1$  είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε η  $dW_{1 \rightarrow \beta}^{\text{αυθ. εκπ.}}$  να γίνει ίση με 1. Οπότε, μπορούμε να γράψουμε

$$dW_{1 \rightarrow \beta}^{\text{αυθ. εκπ.}} = \frac{dt}{t_1}. \quad (5.3)$$

Ο αριθμός των ατόμων που μεταβαίνουν από τη στάθμη (1) στη στάθμη ( $\beta$ ) σε χρόνο  $dt$ , με αυθόρμητη εκπομπή, είναι

$$dN_{1 \rightarrow \beta}^{\text{αυθ. εκπ.}} = N_1 A_{1\beta} dt = \frac{N_1}{t_1} dt. \quad (5.4)$$

Άρα, ο ρυθμός μεταβάσεως από τη στάθμη (1) στη στάθμη ( $\beta$ ), με αυθόρμητη εκπομπή, είναι

$$\frac{dN_{1 \rightarrow \beta}^{\text{αυθ. εκπ.}}}{dt} = N_1 A_{1\beta} = \frac{N_1}{t_1}. \quad (5.5)$$

• Για ένα άτομο, η πιθανότητα αυθόρμητης εκπομπής από τη στάθμη (2) στη στάθμη (1), σε χρόνο  $dt$ , είναι

$$dW_{2 \rightarrow 1}^{\text{αυθ. εκπ.}} = A_{21} dt. \quad (5.6)$$

Ορίζουμε το "χρόνο ζωής" της στάθμης (2),  $t_2$ , μέσω της σχέσεως

$$1 = A_{21} t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{1}{A_{21}} \quad (5.7)$$

δηλαδή  $t_2$  είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε η  $dW_{2 \rightarrow 1}^{\text{αυθ. εκπ.}}$  να γίνει ίση με 1. Οπότε, μπορούμε να γράψουμε

$$dW_{2 \rightarrow 1}^{\text{αυθ. εκπ.}} = \frac{dt}{t_2}. \quad (5.8)$$

Ο αριθμός των ατόμων που μεταβαίνουν από τη στάθμη (2) στη στάθμη (1) σε χρόνο  $dt$ , με αυθόρμητη εκπομπή, είναι

$$dN_{2 \rightarrow 1}^{\text{αυθ. εκπ.}} = N_2 A_{21} dt = \frac{N_2}{t_2} dt. \quad (5.9)$$

Άρα, ο ρυθμός μεταβάσεως από τη στάθμη (2) στη στάθμη (1), με αυθόρμητη εκπομπή, είναι

$$\frac{dN_{2 \rightarrow 1}^{\text{αυθ. εκπ.}}}{dt} = N_2 A_{21} = \frac{N_2}{t_2}. \quad (5.10)$$

• Για ένα άτομο, η πιθανότητα εξαναγκασμένης εκπομπής από τη στάθμη (2) στη στάθμη (1), σε χρόνο  $dt$ , είναι

$$dW_{2 \rightarrow 1}^{\text{εξ. εκπ.}} = B_{21} \rho(\nu) dt. \quad (5.11)$$

Ο αριθμός των ατόμων που μεταβαίνουν από τη στάθμη (2) στη στάθμη (1) σε χρόνο  $dt$ , με εξαναγκασμένη εκπομπή, είναι

$$dN_{2 \rightarrow 1}^{\text{εξ. εκπ.}} = N_2 B_{21} \rho(\nu) dt. \quad (5.12)$$

Άρα, ο ρυθμός μεταβάσεως από τη στάθμη (2) στη στάθμη (1), με εξαναγκασμένη εκπομπή, είναι

$$\frac{dN_{2 \rightarrow 1}^{\text{εξ. εκπ.}}}{dt} = N_2 B_{21} \rho(\nu). \quad (5.13)$$

• Για ένα άτομο, η πιθανότητα εξαναγκασμένης απορροφήσεως από τη στάθμη (1) στη στάθμη (2), σε χρόνο  $dt$ , είναι

$$dW_{1 \rightarrow 2}^{\text{εξ. απορ.}} = B_{12} \rho(\nu) dt. \quad (5.14)$$

Ο αριθμός των ατόμων που μεταβαίνουν από τη στάθμη (1) στη στάθμη (2) σε χρόνο  $dt$ , με εξαναγκασμένη απορρόφηση, είναι

$$dN_{1 \rightarrow 2}^{\text{εξ. απορ.}} = N_1 B_{12} \rho(\nu) dt. \quad (5.15)$$

Άρα, ο ρυθμός μεταβάσεως από τη στάθμη (1) στη στάθμη (2), με εξαναγκασμένη απορρόφηση, είναι

$$\frac{dN_{1 \rightarrow 2}^{\text{εξ. απορ.}}}{dt} = N_1 B_{12} \rho(\nu). \quad (5.16)$$

• Αν βρισκόμασταν σε θερμοδυναμική ισορροπία, δηλαδή χωρίς απώλειες και χωρίς άντληση, θα γράφαμε κατά τα γνωστά

$$\begin{aligned} dN_{1 \rightarrow 2} &= dN_{2 \rightarrow 1} \Leftrightarrow \\ N_1 dW_{1 \rightarrow 2}^{\text{εξ. απορ.}} &= N_2 [dW_{2 \rightarrow 1}^{\text{αυθ. εκπ.}} + dW_{2 \rightarrow 1}^{\text{εξ. εκπ.}}] \Leftrightarrow \\ N_1 B_{12} \rho(\nu, T) dt &= N_2 [A_{21} dt + B_{21} \rho(\nu, T) dt] \end{aligned}$$

και στη συνέχεια ονομάζοντας  $A_{21} = A$ , θέτοντας  $B_{21} = B_{12} = B$  και συγκρίνοντας με το νόμο του Planck θα καταλήγαμε στη σχέση  $\frac{A}{B} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$ . Αυτά κάναμε στην Ενότητα 2.2, π.χ. δείτε τις Εξ. 2.8 και 2.11.

• Τώρα όμως έχουμε απώλειες, οι οποίες εκφράζονται με το  $t_0$  αλλά και άντληση  $R$ . Επιπλέον, η  $\rho$  δεν αφορά θερμοδυναμική ισορροπία μέλανος σώματος συγκεκριμένης θερμοκρασίας, άρα δεν έχουμε  $\rho(\nu, T)$  αλλά  $\rho(\nu)$ . Άρα, αναμένουμε να δούμε

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1(R, t_0) \\ N_2 &= N_2(R, t_0) \\ \rho &= \rho(R, t_0) \end{aligned}$$

Ας κατασκευάσουμε τις διαφορικές εξισώσεις των ρυθμών θέτοντας  $A_{21} = A$ ,  $B_{21} = B_{12} = B$ . Λογίζουμε τις θετικές και τις αρνητικές συνεισφορές στους πληθυσμούς των σταθμών (1) και (2) αλλά και στην πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας.

Για το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού της στάθμης (1) έχουμε

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{N_1}{t_1} - N_1 B_{12} \rho + N_2 B_{21} \rho + \frac{N_2}{t_2}. \quad (5.17)$$

Στην προηγούμενη εξίσωση, στο δεύτερο μέλος, ο πρώτος όρος αφορά απώλεια προς τη (β), ο δεύτερος απώλεια προς τη (2), ενώ ο τρίτος και ο τέταρτος αφορούν κέρδη από τη (2). Άρα, απλοποιώντας το συμβολισμό ( $A_{21} = A$ ,  $B_{21} = B_{12} = B$ ),

$$\boxed{\frac{dN_1}{dt} = -\frac{N_1}{t_1} + B\rho(N_2 - N_1) + AN_2} \quad (5.18)$$

Για το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού της στάθμης (2) έχουμε

$$\frac{dN_2}{dt} = R + N_1 B_{12} \rho - N_2 B_{21} \rho - \frac{N_2}{t_2}. \quad (5.19)$$

Στην προηγούμενη εξίσωση, στο δεύτερο μέλος, ο πρώτος όρος αφορά κέρδος από την άντληση, ο δεύτερος κέρδος από την (1), ενώ ο τρίτος και ο τέταρτος αφορούν απώλειες προς την (1). Άρα, απλοποιώντας το συμβολισμό ( $A_{21} = A$ ,  $B_{21} = B_{12} = B$ ),

$$\boxed{\frac{dN_2}{dt} = R + B\rho(N_1 - N_2) - AN_2} \quad (5.20)$$

Για το ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας έχουμε

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{t_0} + [-N_1 B_{12} \rho + N_2 B_{21} \rho + A'_{21} N_2] \frac{h\nu}{V} F(\nu). \quad (5.21)$$

Στην προηγούμενη εξίσωση, στο δεύτερο μέλος, ο πρώτος όρος περιγράφει φαινομενολογικά την απώλεια στα κάτοπτρα, ο δεύτερος απώλεια λόγω εξαναγκασμένης απορροφήσεως, ο τρίτος κέρδος λόγω εξαναγκασμένης εκπομπής και ο τέταρτος κέρδος λόγω αυθόρμητης εκπομπής. Προσοχή. Η αυθόρμητη εκπομπή γίνεται προς οιαδήποτε διεύθυνση, οπότε δεν καρπωνόμαστε όλο το  $A_{21} N_2$  για αύξηση της ΗΜ ακτινοβολίας στην κοιλότητα. Καρπωνόμαστε μόνο όσα φωτόνια εκπέμπονται σε διεύθυνση περίπου παράλληλη στον άξονα που ορίζουν τα κάτοπτρα. Για το λόγο αυτό, αφού μας αφορά πολύ μικρό μόνο μέρος της ολικής στερεάς γωνίας, έχουμε τον συντελεστή  $A'_{21}$ , ο οποίος είναι κατά πολύ μικρότερος του  $A_{21}$ , π.χ.  $A'_{21} = 10^{-9} A_{21}$ . Απλοποιώντας πάλι τον συμβολισμό ( $A_{21} = A$ ,  $B_{21} = B_{12} = B$ ),

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{t_0} + [B\rho(N_2 - N_1) + A'N_2] \frac{h\nu}{V} F(\nu)} \quad (5.22)$$

Οι Εξ. 5.18 και 5.20 μερικές φορές αναφέρονται ως “εξισώσεις ύλης”, ενώ η Εξ. 5.22 ως “εξίσωση πεδίου”.

Ας σχολιάσουμε λίγο τις μονάδες μετρήσεως. Για τους συντελεστές Einstein,  $[A] = 1/s$  και  $[B] = \frac{m^3}{Js^2}$ , ενώ για την πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας,  $[\rho] = \frac{J}{m^3 Hz} = \frac{Js}{m^3}$ . Άρα,  $[\frac{d\rho}{dt}] = \frac{J}{m^3}$ . Όπως φαίνεται στην Εξ. 5.22, εκφράζουμε τις **απώλειες ακτινοβολίας στα κάτοπτρα** με ένα φαινομενολογικό όρο  $-\frac{\rho}{t_0}$ . Εισάγουμε δηλαδή για το σκοπό αυτό μια ποσότητα  $t_0$  με διαστάσεις χρόνου. Τότε, οι απώλειες εκφράζονται με μονάδες μετρήσεως

$[-\frac{\rho}{t_0}] = \frac{J}{\text{m}^3}$ . Η παράμετρος  $t_0$  χαρακτηρίζει το χρόνο που απαιτείται για να αδειάσει η κοιλότητα από την  $\rho$  λόγω απωλειών στα κάτοπτρα, αν δεν υπάρχει ενεργό υλικό. Όσο μικρότερη είναι η ανακλαστικότητα των κατόπτρων, δηλαδή όσο μεγαλύτερες είναι οι απώλειες, τόσο μικρότερος είναι ο χρόνος  $t_0$ . Τα  $N_1$  και  $N_2$  είναι πληθυσμοί με μονάδες μετρήσεως  $[N_1] = [N_2] = 1$ . Με βάση όσα αναφέραμε παραπάνω,  $[N_1 B_{12} \rho] = [N_2 B_{21} \rho] = [A_{21} N_2] = [A'_{21} N_2] = 1/\text{s}$ . Η  $F(\nu)$  δείχνει τη μορφή της γραμμής εκπομπής, η οποία, όπως είπαμε, δεν είναι συνάρτηση δέλτα αλλά έχει κάποιο εύρος. Αυτό απεικονίζεται τυπικά στο Σχήμα 5.4. Η  $F(\nu)$  ονομάζεται **συνάρτηση φασματικής γραμμής** και έχει διαστάσεις  $[F(\nu)] = 1/\text{Hz}$ . FWHM (Full Width at Half Maximum) σημαίνει Πλήρες Εύρος στο Ήμισυ του Μεγίστου. Η μορφή της γραμμής μπορεί να προσεγγιστεί σε κάποιες περιπτώσεις με Γκαουσιανή ή Λορεντζιανή, αλλά αυτά είναι πέραν του περιεχομένου του παρόντος συγγράμματος.  $V$  είναι ο όγκος της κοιλότητας με μονάδες μετρήσεως  $[V] = \text{m}^3$ . Άρα,  $[\frac{h\nu}{V} F(\nu)] = \frac{J}{\text{m}^3 \text{Hz}}$ , οπότε, το δεξιό μέρος της Εξ. 5.22 έχει μονάδες  $\frac{J}{\text{m}^3}$ .

Εναλλακτικά οι Εξ. 5.18, 5.20, 5.22 μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$\boxed{\frac{dn_1}{dt} = -\frac{n_1}{t_1} + B\rho(n_2 - n_1) + An_2} \quad (5.23)$$

$$\boxed{\frac{dn_2}{dt} = r + B\rho(n_1 - n_2) - An_2} \quad (5.24)$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{t_0} + [B\rho(n_2 - n_1) + A'n_2] h\nu F(\nu)} \quad (5.25)$$

όπου θέσαμε

$$n_i = \frac{N_i}{V}, \quad (5.26)$$

και

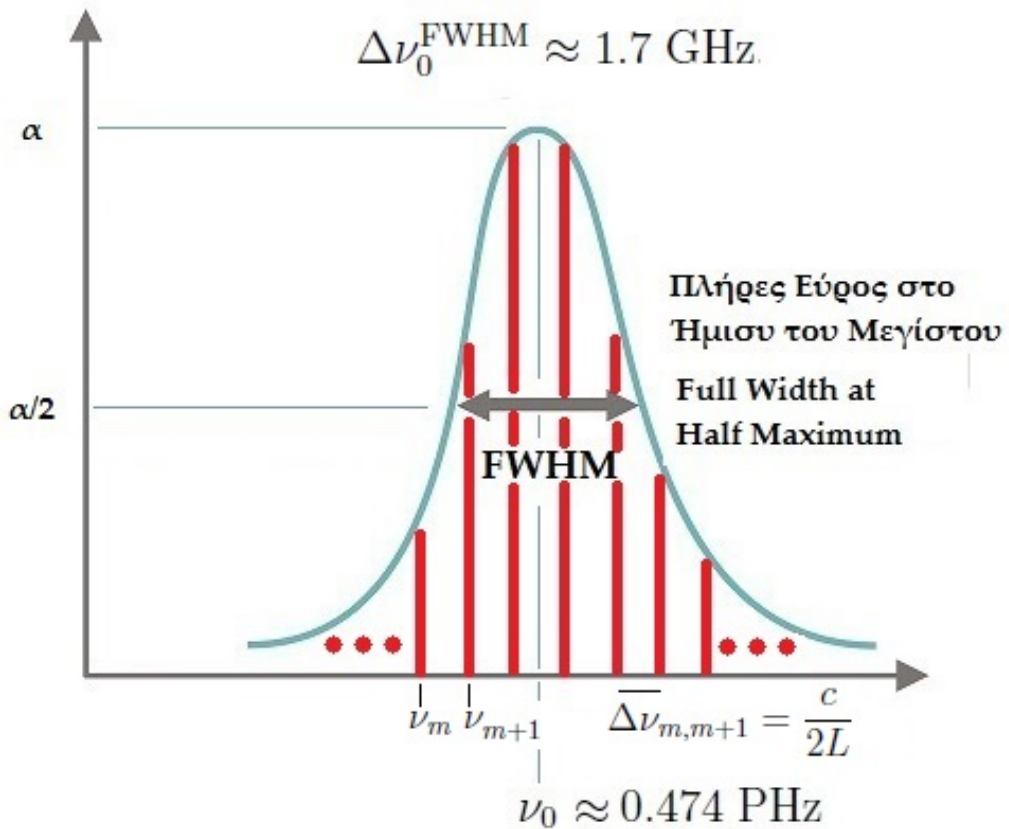
$$r = \frac{R}{V}. \quad (5.27)$$

### 5.3 Διαμήκεις τρόποι εντός εύρους γραμμής.

Στο Κεφάλαιο 4 (Εξ. 4.50) είδαμε ότι εντός της κοιλότητας υποστηρίζονται μόνο ΗΜ τρόποι  $m$  τέτοιοι ώστε η κυκλική συχνότητα να είναι

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L}, m \in \mathcal{N}^*.$$

### συνάρτηση φασματικής γραμμής, $F(\nu)$



Σχήμα 5.4: Η συνάρτηση φασματικής γραμμής,  $F(\nu)$ , εκφράζει τη μορφή της γραμμής εκπομπής.  $FWHM$  (Full Width at Half Maximum) σημαίνει Πλήρες Εύρος στο Ήμισυ του Μεγίστου. Σημειώνονται η κεντρική συχνότητα  $\nu_0$ , το  $FWHM$  εύρος της  $\Delta\nu_0^{FWHM}$ , δύο διαδοχικές συχνότητες διαμηκών τρόπων  $\nu_m, \nu_{m+1}$  και η μεταξύ τους απόσταση  $\Delta\nu_{m,m+1} = \frac{c}{2L}$ . Ως παράδειγμα, παρουσιάζονται τυπικές τιμές για την ερυθρή γραμμή ενός LASER He-Ne. Φαίνεται ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα το  $FWHM$  εύρος χωρά 4 διαμήκεις τρόπους.

$L$  είναι η απόσταση των κατόπτρων κατά μήκος του άξονα  $z$ . Άρα η συχνότητα είναι

$$\nu_m = \frac{mc}{2L}, m \in \mathcal{N}^*. \quad (5.28)$$

Αυτοί οι ΗΜ τρόποι εξήχθησαν θέτοντας συνοριακές συνθήκες κατά μήκος του άξονα  $z$  που συνδέει τα δύο κάτοπτρα. Επειδή η διάσταση αυτή της κοιλότητας στον

άξονα  $z$  έχει συνήθως πολύ μεγαλύτερο μήκος από τις άλλες δύο διαστάσεις της στο επίπεδο  $xy$ , οι τρόποι αυτοί ονομάζονται **διαμήκεις τρόποι** (longitudinal modes).

Η ερυθρή γραμμή έχει κεντρικό μήκος κύματος

$$\lambda_0 \approx 632.8 \text{ nm},$$

άρα η αντίστοιχη κεντρική συχνότητα είναι  $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \approx 0.474 \times 10^{15} \text{ Hz} \Rightarrow$

$$\nu_0 = 0.474 \text{ PHz}.$$

Το FWHM εύρος της ερυθρής γραμμής είναι  $\Delta\nu_0^{\text{FWHM}} \approx 1.7 \text{ GHz}$ . Άρα,

$$\frac{\Delta\nu_0^{\text{FWHM}}}{\nu_0} \approx 3.6 \times 10^{-6},$$

δηλαδή η ερυθρή γραμμή είναι αρκετά λεπτή. Δείτε το Σχήμα 5.4. Ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο **ερώτημα**: Υπάρχουν υποστηριζόμενοι από την κοιλότητα διαμήκεις HM τρόποι  $m$  που να εμπίπτουν στη συχνοτική περιοχή της  $\nu_0$  που έχει εύρος  $\Delta\nu_0^{\text{FWHM}}$ ; Από την Εξ. 5.28, συμπεραίνουμε ότι η συχνοτική απόσταση των διαμηκών HM τρόπων είναι

$$\Delta\nu_{m,m+1} = \frac{c}{2L}. \quad (5.29)$$

Ας υποθέσουμε ότι η κοιλότητα έχει μήκος  $L = 0.4 \text{ m}$ . Τότε  $\Delta\nu_{m,m+1} = 375 \text{ MHz}$ .

Εντός του FWHM εύρους της φασματικής γραμμής θα χωράνε

$$\left[ \frac{\Delta\nu_0^{\text{FWHM}}}{\Delta\nu_{m,m+1}} \right] \text{ HM τρόποι.} \quad (5.30)$$

[...] συμβολίζουμε εδώ το ακέραιο μέρος. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα  $\left[ \frac{\Delta\nu_0^{\text{FWHM}}}{\Delta\nu_{m,m+1}} \right] = \left[ \frac{1.7 \text{ GHz}}{375 \text{ MHz}} \right] = [4.533] = 4$ . Δηλαδή βλέπουμε ότι μέσα στο εύρος της γραμμής εμπίπτουν αρκετοί διαμήκεις τρόποι (αλλά και εγκάρσιοι, δείτε την Ενότητα 5.7). Το εύρος κάθε διαμήκους (αλλά και εγκάρσιου, δείτε την Ενότητα 5.7) HM τρόπου είναι της τάξεως των  $\Delta\nu_m^{\text{FWHM}} \approx 1$  με  $10 \text{ MHz}$  και σχετίζεται με το ρυθμό απωλειών της κοιλότητας μέσω των κατόπτρων  $t_0$  [36].

#### 5.4 Εύρεση των πληθυσμών των σταθμών και της πυκνότητας ΗΜ ακτινοβολίας στη στάσιμη κατάσταση. Κρίσιμη άντληση. Αναστροφή πληθυσμού.

Στη στάσιμη κατάσταση (steady state) έχουμε

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0 = \frac{d\rho}{dt}. \quad (5.31)$$

Άρα, οι Εξ. 5.18 και 5.20 γίνονται

$$\boxed{-\frac{N_1}{t_1} + B\rho(N_2 - N_1) + AN_2 = 0} \quad (5.32)$$

$$\boxed{R + B\rho(N_1 - N_2) - AN_2 = 0} \quad (5.33)$$

ενώ, αν αγνοήσουμε το  $A'$  ως πολύ μικρότερο του  $A$ , τότε η Εξ. 5.22 γίνεται

$$-\frac{\rho}{t_0} + B\rho(N_2 - N_1) + \frac{h\nu}{V}F(\nu) = 0 \Leftrightarrow \quad (5.34)$$

$$\boxed{B\rho(N_2 - N_1) = \frac{\rho}{t_0 \frac{h\nu}{V}F(\nu)}} \quad (5.35)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των Εξ. 5.32 και 5.33 λαμβάνουμε  $R = \frac{N_1}{t_1} \Leftrightarrow$

$$\boxed{N_1 = t_1 R} \quad (5.36)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των Εξ. 5.33 και 5.35 λαμβάνουμε

$$R - AN_2 = \frac{\rho}{t_0 \frac{h\nu}{V}F(\nu)} \Leftrightarrow \quad (5.37)$$

$$\boxed{N_2 = \frac{R}{A} - \frac{\rho}{At_0 \frac{h\nu}{V}F(\nu)}} \quad (5.38)$$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για την  $\rho$ , είτε (Π1)  $\rho > 0$ , είτε (Π2)  $\rho = 0$ .



Έστω ότι είμαστε στην (Π1), όπου  $\rho > 0$ . Τότε, η Εξ. 5.37 ισοδυναμεί με  $R > AN_2$ . Λόγω της Εξ. 5.36 και του ορισμού (Εξ. 5.7) του χρόνου ζωής της στάθμης (2)  $A = A_{21} = \frac{1}{t_2}$  λαμβάνουμε  $\frac{N_1}{t_1} > \frac{N_2}{t_2} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{t_2}{N_2} > \frac{t_1}{N_1}} \quad (5.39)$$

Τώρα από τις Εξ. 5.35, 5.36, 5.38, επειδή  $\rho \neq 0$  συνεπάγεται

$$B \left( \frac{R}{A} - \frac{\rho}{At_0 \frac{h\nu}{V} F(\nu)} \right) - Bt_1 R = \frac{1}{t_0 \frac{h\nu}{V} F(\nu)} \Leftrightarrow \quad (5.40)$$

$$\rho = Rt_0 \frac{h\nu}{V} F(\nu) \frac{t_2 - t_1}{t_2} - \frac{1}{Bt_2} \quad (5.41)$$

Να σημειωθεί ότι αν  $t_2 < t_1$ , τότε από την προηγούμενη εξίσωση προκύπτει  $\rho < 0$ . Άρα θα πρέπει

$$\boxed{t_2 > t_1} \quad (5.42)$$

δηλαδή θα πρέπει ο χρόνος ζωής της ανώτερης στάθμης (2) να είναι μεγαλύτερος του χρόνου ζωής της κατώτερης στάθμης (1). Αλλά στην περίπτωση που εξετάζουμε  $\rho > 0$ , επομένως προκύπτει ότι

$$\boxed{R > \frac{1}{Bt_0(t_2 - t_1) \frac{h\nu}{V} F(\nu)} := R_c} \quad (5.43)$$

Η ποσότητα  $R_c$  ονομάζεται **κρίσιμη άντληση**. Προφανώς, για  $R_c > 0 \Leftrightarrow$  Εξ. 5.42. Συνεπώς, η  $\rho$  μπορεί να γραφτεί

$$\boxed{\rho = \frac{AR}{BR_c} - \frac{A}{B}} \quad (5.44)$$

Από τις Εξ. 5.38, 5.43, 5.44, προκύπτει

$$\boxed{N_2 = t_1 R + (t_2 - t_1) R_c} \quad (5.45)$$

Έστω ότι είμαστε στην (Π2), όπου  $\rho = 0$ . Τότε, από την Εξ. 5.37 προκύπτει  $R = AN_2$ , οπότε

$$\boxed{N_2 = t_2 R} \quad (5.46)$$

Συνοψίζοντας, στη στάσιμη κατάσταση, οι λύσεις των Εξ. 5.32, 5.33, 5.35 είναι

$$\boxed{N_1 = t_1 R, \quad \forall R} \quad (5.47)$$

$$\boxed{N_2 = \begin{cases} t_2 R, & \forall R \leq R_c \\ t_1 R + (t_2 - t_1) R_c, & \forall R \geq R_c \end{cases}} \quad (5.48)$$

$$\boxed{\rho = \begin{cases} 0, & \forall R \leq R_c \\ \frac{AR}{BR_c} - \frac{A}{B} = \frac{1}{Bt_2 R_c} R - \frac{1}{Bt_2}, & \forall R \geq R_c \end{cases}} \quad (5.49)$$

Στη συνέχεια, ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 1. Η **αναστροφή πληθυσμού** (population inversion) ορίζεται ως

$$\boxed{\Delta N := N_2 - N_1} \quad (5.50)$$

οπότε από τις Εξ. 5.47 και 5.48 συνάγεται

$$\boxed{\Delta N = \begin{cases} (t_2 - t_1) R, & \forall R \leq R_c \\ (t_2 - t_1) R_c, & \forall R \geq R_c \end{cases}} \quad (5.51)$$

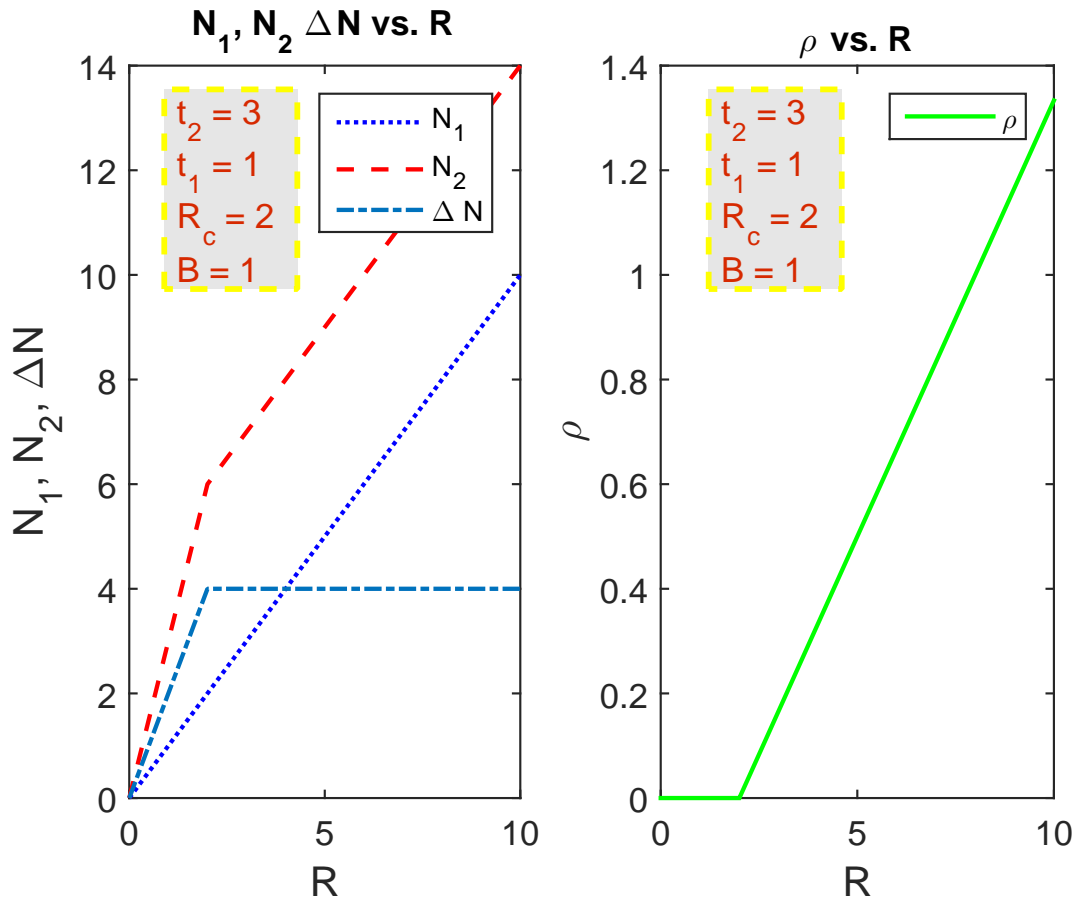
Έτσι φαίνεται ότι  $\Delta N > 0 \Leftrightarrow t_2 > t_1$ , δηλαδή για να έχουμε αναστροφή πληθυσμού θα πρέπει να ισχύει η Εξ. 5.42.

Στο Σχήμα 5.5 αποδίδεται μια αναπαράσταση των Εξ. 5.47, 5.48, 5.49, 5.51, η οποία έγινε με τη βοήθεια του προγράμματος matlab N1N2DNrho.m, το οποίο παρατίθεται στο Παράρτημα Γ'. Οι τιμές των παραμέτρων είναι εδώ επίτηδες αδιάστατες και δεν έχουν κάποια σχέση με πραγματικές τιμές. Ο αναγνώστης - η αναγνώστρια μπορεί να παίξει με τις τιμές των παραμέτρων για να κατανοήσει τη λειτουργία των Εξ. 5.47, 5.48, 5.49, 5.51.

Παρατήρηση 2. Σύμφωνα με την Εξ. 5.43, η κρίσιμη άντληση ορίζεται ως

$$R_c := \frac{1}{Bt_0(t_2 - t_1) \frac{h\nu}{V} F(\nu)}.$$

Οπότε, αν μεγαλώσουμε το  $t_0$ , αυτό συνεπάγεται μικρότερη  $R_c$ , πράγμα λογικό αφού αν μεγαλώσουμε το  $t_0$ , αυτό συνεπάγεται πτώση των απωλειών, δηλαδή του  $\rho/t_0$ .



Σχήμα 5.5: Μια αναπαράσταση των Εξ. 5.47, 5.48, 5.49, 5.51 με τη βοήθεια του προγράμματος matlab *N1N2DNrho.m*, το οποίο παρατίθεται στο Παράρτημα Γ'.

Επίσης, υπενθυμίζουμε ότι για να έχουμε  $R_c > 0$  θα πρέπει να ισχύει η Εξ. 5.42, δηλαδή  $t_2 > t_1$ . Ακόμα, αν  $t_2 \gg t_1$  προκύπτει πολύ μικρή  $R_c$ .

Παρατήρηση 3. Η σχέση

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \Leftrightarrow \frac{1}{B} = \frac{8\pi h t_2 \nu^3}{c^3}, \quad (5.52)$$

άρα η Εξ. 5.43 γίνεται

$$R_c = \frac{8\pi h t_2 \nu^3}{c^3 t_0 (t_2 - t_1) \frac{h\nu}{V} F(\nu)} \propto \nu^2, \quad (5.53)$$

έτσι π.χ.  $R_c(\text{μικροκύματα}) < R_c(\text{ορατό})$ , δηλαδή είναι ευκολότερη η δημιουργία συνεκτικής δέσμης στα μικροκύματα παρά στο ορατό.

Παρατήρηση 4. Όλα αυτά έχουν νόημα εφ' όσον επιτρέπεται η μετάπτωση από την άνω στάθμη (2) στην κάτω στάθμη (1) με εκπομπή φωτονίου. Θα πρέπει, δηλαδή, όπως συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 3,  $\vec{r}_{12} := \int dV \Phi_1^*(\vec{r}) \vec{r} \Phi_2(\vec{r}) \neq 0$ , δηλαδή  $\vec{P}_{12} := \int dV \Phi_1^*(\vec{r}) (-e) \vec{r} \Phi_2(\vec{r}) \neq 0$ .

Με απώτερο στόχο να επιλύσουμε αριθμητικά τις εξισώσεις των ρυθμών στη γενική περίπτωση, θα κάνουμε, αρχικά, τις Εξ. 5.47, 5.48, 5.49, 5.51 αδιάστατες.

• Πρώτα πρώτα, ας συμπληρώσουμε την αλλαγή μεταβλητών που κάναμε στις Εξ. 5.26 και 5.27, δηλαδή τις

$$n_i = \frac{N_i}{V}, \quad (5.54)$$

και

$$r = \frac{R}{V}, \quad (5.55)$$

με την

$$r_c = \frac{R_c}{V}. \quad (5.56)$$

Τότε οι Εξ. 5.47, 5.48, 5.49, 5.51 γίνονται

$$\boxed{n_1 = t_1 r, \quad \forall r} \quad (5.57)$$

$$\boxed{n_2 = \begin{cases} t_2 r, & \forall r \leq r_c \\ t_1 r + (t_2 - t_1) r_c, & \forall r \geq r_c \end{cases}} \quad (5.58)$$

$$\boxed{\rho = \begin{cases} 0, & \forall r \leq r_c \\ \frac{Ar}{Br_c} - \frac{A}{B} = \frac{1}{Bt_2 r_c} r - \frac{1}{Bt_2}, & \forall r \geq r_c \end{cases}} \quad (5.59)$$

$$\boxed{\Delta n := n_2 - n_1 = \begin{cases} (t_2 - t_1) r, & \forall r \leq r_c \\ (t_2 - t_1) r_c, & \forall r \geq r_c \end{cases}} \quad (5.60)$$

• Κατόπιν κάνουμε τις Εξ. 5.57, 5.58, 5.59, 5.60 αδιάστατες. Προς τούτο, ορίζουμε τα ακόλουθα μεγέθη:

$$n_0 := t_2 r_c \quad (5.61)$$

με μονάδες μετρήσεως  $[n_0] = \frac{s}{\text{sm}^3} = 1/\text{m}^3$ .

$$\tau := \frac{t}{t_2} \quad (5.62)$$

δηλαδή μετράμε το χρόνο σε μονάδες χρόνου ζωής της άνω (2) στάθμης,  $t_2$ , οπότε η ποσότητα  $\tau$  είναι αδιάστατη,  $[\tau] = 1$ .

$$\tau_0 := \frac{t_0}{t_2} \quad (5.63)$$

και

$$\tau_1 := \frac{t_1}{t_2} \quad (5.64)$$

που είναι αδιάστατες, επίσης,  $[\tau_0] = [\tau_1] = 1$ . Συνεχίζουμε ορίζοντας,

$$r_N := \frac{r}{r_c}, \quad (5.65)$$

που είναι η “αδιάστατη άντληση”,  $[r_N] = 1$ . Κι ακόμα

$$\varrho := B t_2 \rho, \quad (5.66)$$

που είναι η “αδιάστατη πυκνότητα ΗΜ ακτινοβολίας”,  $[\varrho] = \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{Js}^2} \text{s} \frac{\text{Js}}{\text{m}^3} \right] = 1$ . Περαιτέρω ορίζουμε τους “αδιάστατους πληθυσμούς των σταθμών (1) και (2)” ως

$$\nu_1 := \frac{n_1}{n_0}, \quad (5.67)$$

$$\nu_2 := \frac{n_2}{n_0}, \quad (5.68)$$

αφού  $[\nu_1] = \frac{[t_1 r]}{[n_0]} = \frac{\text{sm}^3}{\text{sm}^3} = 1$  και π.χ.  $[\nu_2] = \frac{[t_2 r]}{[n_0]} = \frac{\text{sm}^3}{\text{sm}^3} = 1$ .

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, οι Εξ. 5.57, 5.58, 5.59, 5.60 γίνονται

$$\boxed{\nu_1 = \tau_1 r_N, \quad \forall r_N} \quad (5.69)$$

$$\boxed{\nu_2 = \begin{cases} r_N, & \forall r_N \leq 1 \\ \tau_1 r_N + (1 - \tau_1), & \forall r_N \geq 1 \end{cases}} \quad (5.70)$$

$$\boxed{\varrho = \begin{cases} 0, & \forall r_N \leq 1 \\ r_N - 1, & \forall r_N \geq 1 \end{cases}} \quad (5.71)$$

$$\boxed{\Delta\nu := \nu_2 - \nu_1 = \begin{cases} (1 - \tau_1)r_N, & \forall r_N \leq 1 \\ (1 - \tau_1), & \forall r_N \geq 1 \end{cases}} \quad (5.72)$$

#### Παρατηρήσεις

- Στις Εξ. 5.69, 5.70, 5.71, 5.72, όλα τα μεγέθη είναι αδιάστατα.
- Τα  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\Delta\nu$  εξαρτώνται μόνο από τα  $\tau_1$  και  $r_N$ .
- Το  $\varrho$  εξαρτάται μόνο από το  $r_N$ .

Παραδείγματος χάριν, για  $\tau_1 = 0.5$  και  $r_N = 1.5$ , προκύπτουν

$$\nu_1 = 0.5 \cdot 1.5 = 0.75$$

$$\nu_2 = 0.5 \cdot 1.5 + (1 - 0.5) = 0.75 + 0.5 = 1.25$$

$$\Delta\nu = 0.5$$

$$\varrho = 1.5 - 1 = 0.5,$$

ενώ για  $\tau_1 = 0.5$  και  $r_N = 0.5$ , προκύπτουν

$$\nu_1 = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$$

$$\nu_2 = 0.5$$

$$\Delta\nu = 0.25$$

$$\varrho = 0.$$

## 5.5 Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων των ρυθμών στη γενική περίπτωση.

Ήδη δείξαμε ότι οι εξισώσεις των ρυθμών, δηλαδή οι Εξ. 5.18, 5.20, 5.22 μπορούν να γραφτούν στη μορφή των Εξ. 5.23, 5.24, 5.25

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= -\frac{n_1}{t_1} + B\rho(n_2 - n_1) + An_2 \\ \frac{dn_2}{dt} &= r + B\rho(n_1 - n_2) - An_2 \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{\rho}{t_0} + [B\rho(n_2 - n_1) + A'n_2] h\nu F(\nu)\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}n_i &= \frac{N_i}{V}, \\ r &= \frac{R}{V},\end{aligned}$$

ενώ, παραπάνω ορίσαμε και την

$$r_c = \frac{R_c}{V}.$$

Ας κάνουμε τώρα τις εξισώσεις των ρυθμών αδιάστατες, χρησιμοποιώντας, όπως πρωτύτερα, τους ορισμούς των Εξ. 5.61, 5.62, 5.63, 5.64, 5.65, 5.66, 5.67, 5.68. Προκύπτουν έτσι οι αδιάστατες Εξ. 5.73, 5.74, 5.75. Για την τελευταία, χρησιμοποιήσαμε και την Εξ. 5.43, μαζί με την Εξ. 5.56.

$$\boxed{\frac{d\nu_1}{d\tau} = -\frac{\nu_1}{\tau_1} + \varrho(\nu_2 - \nu_1) + \nu_2} \quad (5.73)$$

$$\boxed{\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2} \quad (5.74)$$

$$\boxed{\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \left[ \varrho(\nu_2 - \nu_1) + \frac{A'}{A}\nu_2 \right] \frac{1}{\tau_0(1 - \tau_1)}} \quad (5.75)$$

### Παρατηρήσεις

- Στις Εξ. 5.73, 5.74, 5.75, όλα τα μεγέθη είναι αδιάστατα.
- Η λύση των διαφορικών εξισώσεων 5.73, 5.74, 5.75, για τα  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\varrho$ , εξαρτάται μόνο από τα  $\tau_0$ ,  $\tau_1$ ,  $r_N$  και  $\frac{A'}{A}$ .
- Στο επόμενο υποκεφάλαιο θα τις λύσουμε στο matlab με τη βοήθεια των προγραμμάτων laser.m και calllasercommands.m.

## 5.6 Εργαστήριο προσομοιώσεως: εξάσκηση στην αριθμητική επίλυση των εξισώσεων των ρυθμών στη γενική περίπτωση.

Οι Εξ. 5.73, 5.74, 5.75, μπορούν να λυθούν αριθμητικά με διάφορους τρόπους και λογισμικά. Στο παρόν Υποκεφάλαιο αυτό γίνεται στο matlab με τη βοήθεια των δύο αρχείων που παρουσιάζονται παρακάτω στα Σχήματα 5.6 και 5.7. Το αποτέλεσμα του τρεξίματος φαίνεται στο Σχήμα 5.8.

### calllasercommands.m

```
x0=[0 0 0];
tspan=[0,500];
[t,x]=ode45(@laser,tspan,x0)
plot(t,x)

% - - - - should be copied from laser.m
tau1=0.5;
tau0=1;
arn=1.5; % normalized pumping
AptoA=10^(-9);
% - - - -

%figure;
%plot(t,x(1),'k',t,x(2),'r',t,x(3),'g')
xlabel('\tau','FontSize',16)
ylabel('\nu_1, \nu_2, \rho','FontSize',16)
set(gca,'fontsize',16)
title('\nu_1, \nu_2, \rho vs. \tau','FontSize',16)
text(200,0.65,'\nu_1','Color','b','FontSize',16)
text(250,1.35,'\nu_2','Color','r','FontSize',16)
text(350,0.45,'\rho','Color',[1,0.5,0],'FontSize',16)
annotation('textbox',...
    [0.2 0.54 0.25 0.22],...
    'String',{'\tau_1 = ' num2str(tau1)}, ['\tau_0 = ' num2str(tau0)}, ['r_N = '
num2str(arn)}, ['AptoA = ' num2str(AptoA)}],...
    'FontSize',12,...
    'FontName','Arial',...
    'LineStyle','--',...
    'EdgeColor',[1 1 0],...
    'LineWidth',2,...
    'BackgroundColor',[0.9 0.9 0.9],...
    'Color',[0.84 0.16 0]);
```

Σχήμα 5.6: Το αρχείο matlab calllasercommands.m.



**laser.m**

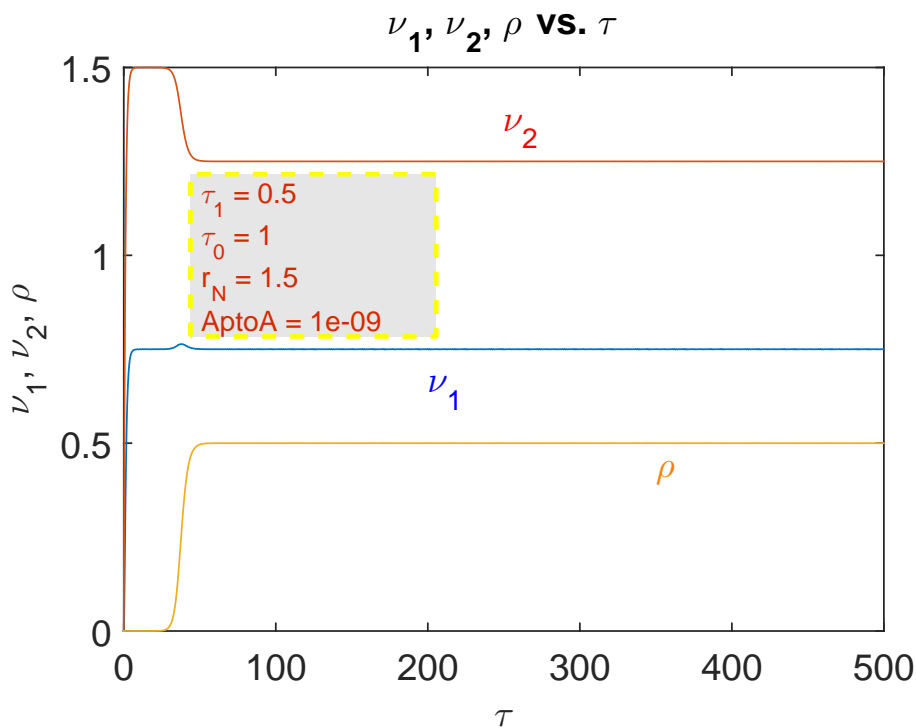
```

function xprime = laser(t,x);
%LASER: Computes the derivatives involved in solving the laser equations.
% nu1=x(1), nu2=x(2), rho=x(3)
tau1=0.5;
tau0=1;
arn=1.5; % normalized pumping
AptoA=10^(-9);
tautau=tau0*(1-tau1);
xprime=[x(2)+x(3)*(x(2)-x(1))-x(1)/tau1; arn+x(3)*(x(1)-x(2))-x(2);-
x(3)/tau0+(AptoA*x(2)+x(3)*(x(2)-x(1)))*(1/tautau)];

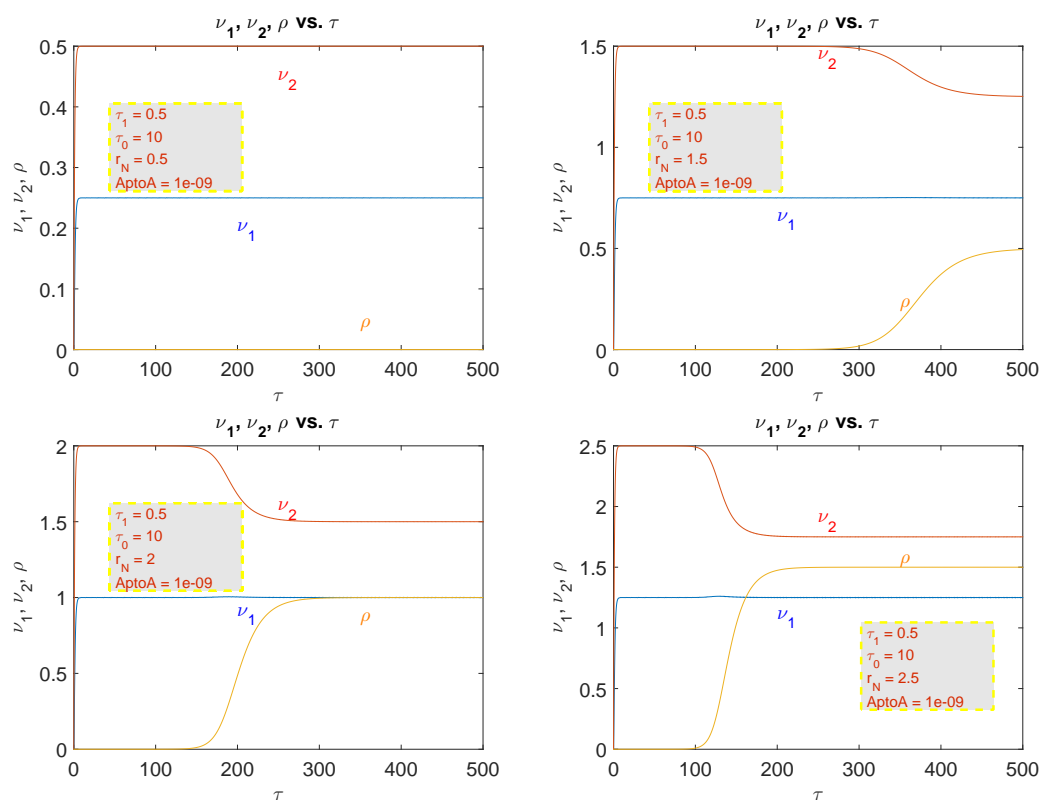
% Observe that x is stored as x(1), y is stored as x(2), and z as stored as x(3).
% Additionally, xprime is a column vector,
% as is evident from the semicolon following the first appearance of x(2).
% If in the Command Window, we type
% >> x0=[-8 8 27];
% >> tspan=[0,20];
% >> [t,x]=ode45(@laser,tspan,x0)

```

Σχήμα 5.7: Το αρχείο matlab laser.m.

Σχήμα 5.8: Η γραφική παράσταση των  $\nu_1, \nu_2, \rho$  συναρτήσεων του  $\tau$  που προκύπτει από τα προγράμματα matlab. Στην εικόνα εμφανίζεται  $\rho$  αλλά πρόκειται για το αδιάστατο  $\rho$  της Εξ. 5.75.

Εν είδει παραδείγματος, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δούμε την επίδραση της μεταβολής του  $r_N$  στη μεταβολή των  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\rho$  συναρτήσει του  $\tau$ . Ας υποθέσουμε ότι κρατάμε σταθερά τα  $\tau_0 = 10$ ,  $\frac{A'}{A} = 10^{-9}$  και  $\tau_1 = 0.5$ . Ας μεταβάλλουμε το  $r_N$  θέτοντας τις τιμές 0.5, 1.5, 2.0, 2.5. Το αποτέλεσμα της επιλύσεως των εξισώσεων των ρυθμών με τα προγράμματα μας φαίνεται στο Σχήμα 5.9. Παρατηρούμε αρχικά ότι όταν πια οι τιμές των  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\rho$  έχουν σταθεροποιηθεί, δηλαδή έχουμε φτάσει στην στάσιμη κατάσταση, αυτές συμπίπτουν με τις προβλέψεις των Εξ. 5.69, 5.70, 5.71. Ακόμα, αξίζει να σημειώσουμε γιατί υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η  $\rho$  για να γίνει αισθητή. Ο λόγος είναι ότι αυξάνοντας την αδιάστατη άντληση  $r_N$ , αυξάνεται ο  $\nu_2$  λόγω της Εξ. 5.74, οπότε στην Εξ. 5.75 αυξάνεται ο όρος  $\frac{A'}{A}\nu_2$  που είναι ο μοναδικός που οδηγεί σε  $\frac{d\rho}{d\tau} > 0$  όταν το  $\rho$  είναι αμελητέο.



Σχήμα 5.9: Η επίδραση της μεταβολής του  $r_N$  στη μεταβολή των  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\rho$  συναρτήσει του  $\tau$ . Κρατάμε σταθερά τα  $\tau_0 = 10$ ,  $\frac{A'}{A} = 10^{-9}$  και  $\tau_1 = 0.5$ , ενώ μεταβάλλουμε το  $r_N$  θέτοντας τις τιμές 0.5, 1.5, 2.0, 2.5. Στην εικόνα εμφανίζεται  $\rho$  αλλά πρόκειται για το αδιάστατο  $\rho$  της Εξ. 5.75.

## 5.7 Στάσιμα ΗΜ κύματα σε 3Δ κοιλότητα: Διαμήκεις τρόποι και εγκάρσιοι τρόποι.

Ας εξετάσουμε προσεκτικότερα τα στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που αναπτύσσονται σε μία 3Δ κοιλότητα (standing electromagnetic waves in a 3D cavity). Υπάρχουν οι λεγόμενοι **διαμήκεις** (longitudinal) και οι λεγόμενοι **εγκάρσιοι** (transverse) **τρόποι** (modes). Αρχικά, ας αναφέρουμε κάποια γενική ονοματολογία. **TE (Εγκάρσιοι Ηλεκτρικοί, Transverse Electric)** ονομάζονται οι ΗΜ τρόποι χωρίς ηλεκτρικό πεδίο στη διεύθυνση διαδόσεως. **TM (Εγκάρσιοι Μαγνητικοί, Transverse Magnetic)** ονομάζονται οι ΗΜ τρόποι χωρίς μαγνητικό πεδίο στη διεύθυνση διαδόσεως. Τέλος, **TEM (Εγκάρσιοι ΗλεκτροΜαγνητικοί, Transverse ElectroMagnetic)** ονομάζονται οι ΗΜ τρόποι χωρίς ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στη διεύθυνση διαδόσεως. Οι τρόποι που εξετάζουμε εδώ είναι TEM, λογίζοντας ως διεύθυνση διαδόσεως την παράλληλη στη μακριά διάσταση της κοιλότητας, δηλαδή με την εκλογή που κάναμε έως τώρα, την παράλληλη στον άξονα των  $z$  διεύθυνση.

Οι **διαμήκεις τρόποι** εμφανίστηκαν ήδη όταν λύσαμε το βασικά μονοδιάστατο (1Δ) πρόβλημα, βάζοντας κάτοπτρα στις θέσεις  $z = 0$  και  $z = L$  και θεωρώντας ότι η εφαπτομενική συνιστώσα του  $\vec{E}$  μηδενίζεται στα κάτοπτρα (όπως και η κάθετη συνιστώσα του  $\vec{B}$ ). Βρήκαμε λοιπόν ότι (Εξ. 4.45)

$$k_m = \frac{m\pi}{L}, m \in \mathcal{N}^*.$$

Ακόμα βρήκαμε ότι (Εξ. 4.50)

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L}, m \in \mathcal{N}^*.$$

Άρα (Εξ. 5.28),

$$\nu_m = \frac{mc}{2L}, m \in \mathcal{N}^*,$$

και

$$L = m \frac{\lambda_m}{2}, \quad (5.76)$$

όπως αναμενόταν για στάσιμα κύματα, μεταξύ κατόπτρων απεχόντων απόσταση  $L$  (μήκος, length). Από την Εξ. 5.28, συμπεράναμε (Εξ. 5.29) ότι η συχνοτική απόσταση των διαμηκών ΗΜ τρόπων είναι

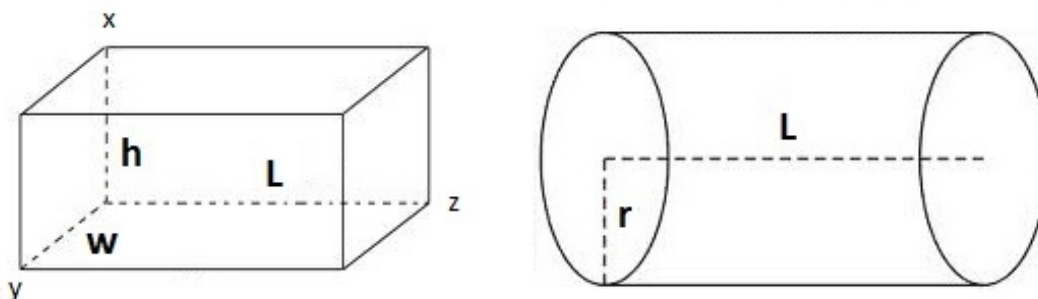
$$\Delta\nu_{m,m+1} = \frac{c}{2L}.$$

Στο 1Δ αυτό πρόβλημα οι λύσεις περιέχουν (Εξ. 4.48) το

$$Z_m(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right),$$

$m = 1, 2, 3, \dots$ , οπότε ο αριθμός των κόμβων (nodes), όπου δηλαδή σταθερά μηδενίζεται το  $Z_m(z)$ , είναι  $m' = m - 1$ . Θα μπορούσαμε να λύσουμε και τα 1Δ προβλήματα: καθ' ύψος ( $h$ ) με  $p = 1, 2, 3, \dots$  και  $p' = p - 1 =$  αριθμός κόμβων στον άξονα  $x$ , ή κατά πλάτος ( $w$ ) με  $q = 1, 2, 3, \dots$  και  $q' = q - 1 =$  αριθμός κόμβων στον άξονα  $y$ .

Μια κοιλότητα είναι όμως τριδιάστατη (3Δ), π.χ. σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ή κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.10. Στην ορθογώνια παραλληλε-



Σχήμα 5.10: Ορθογώνια παραλληλεπίπεδη και κυλινδρική κοιλότητα.

πίπεδη κοιλότητα, συνήθως  $L \gg h, w$ , όπου  $L =$  μήκος (length),  $h =$  ύψος (height) και  $w =$  πλάτος (width). Στην κυλινδρική κοιλότητα, συνήθως  $L \gg r$ , όπου  $L =$  μήκος (length),  $r =$  ακτίνα (radius). Οι **εγκάρσιοι τρόποι** προκύπτουν κατά τη λύση του τριδιάστατου προβλήματος και εξαρτώνται από τη γεωμετρία της κοιλότητας, δηλαδή αν π.χ. είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδη ή κυλινδρική. Το θέμα έχει αναπτυχθεί στην Ενότητα 1.10. Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε μία άδεια ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα με τελείως αγωγίμα τοιχώματα και ακμές ύψους  $h = a_x$  (height), πλάτους  $w = a_y$  (width) και μήκους  $L = a_z$  (length) κατά μήκους των αξόνων  $x, y$  και  $z$ , αντιστοίχως. Επιπλέον ας υποθέσουμε ότι η κοιλότητα βρίσκεται στο πρώτο ογδομήριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων  $Oxyz$  με μία κορυφή στην αρχή του  $O$ . Για το ηλεκτρικό πεδίο προκύπτουν οι Εξ. 1.58, 1.59, 1.60

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} && \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } y = 0 \text{ και } z = 0 \\ E_y &= E_{y0} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} && \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } x = 0 \text{ και } z = 0 \\ E_z &= E_{z0} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} && \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } x = 0 \text{ και } y = 0 \end{aligned}$$

Για το μαγνητικό πεδίο προκύπτουν οι Εξ. 1.64, 1.65, 1.66

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{i}{\omega} \left( E_{y0}k_z - E_{z0}k_y \right) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \\ B_y &= \frac{i}{\omega} \left( E_{z0}k_x - E_{x0}k_z \right) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \\ B_z &= \frac{i}{\omega} \left( E_{x0}k_y - E_{y0}k_x \right) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Ισχύουν ακόμα η Εξ. 1.61

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

και η Εξ. 1.62

$$k_x = \frac{m_x \pi}{a_x}, \quad k_y = \frac{m_y \pi}{a_y}, \quad k_z = \frac{m_z \pi}{a_z},$$

όπου  $m_x, m_y, m_z \in \mathbb{Z}$ . Μπορούμε και να πάρουμε  $m_x, m_y, m_z \in \mathbb{N}$  απορροφώντας την αλλαγή προσήμου στα  $E_{x0}, E_{y0}, E_{z0}$ , δηλαδή επιτρέποντας στα  $E_{x0}, E_{y0}, E_{z0}$  να πάρουν θετικές ή αρνητικές τιμές, τέτοιες που να συμφωνούν με τις συνοριακές συνθήκες. Τα  $m_x = p, m_y = q, m_z = m$  που ονομάζονται **αριθμοί τρόπων (mode numbers)** είναι δηλαδή ανεξάρτητοι μη αρνητικοί ακέραιοι που υπακούουν στον περιορισμό ότι όχι πάνω από ένας μπορεί να μηδενίζεται συγχρόνως [37]. Ο περιορισμός αυτός οφείλεται στο ότι αν δύο ή τρεις από τους  $m_x, m_y, m_z$  μηδενίζονται, τότε μηδενίζεται το ΗΜ πεδίο στην κοιλότητα σύμφωνα με τις Εξ. 1.58, 1.59, 1.60 και Εξ. 1.64, 1.65, 1.66. Συνδυάζοντας τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε ότι η κυκλική συχνότητα και η συχνότητα υπακούουν στον κανόνα

$$\omega_{pqm} = 2\pi\nu_{pqm} = k_{pqm}c, \quad (5.77)$$

όπου  $k_{pqm}$  είναι το μέτρο του διανύσματος με συνιστώσες  $k_x, k_y, k_z$ .

Για ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα (orthorhombic or rectangular cavity), αποδείξαμε την Εξ. 1.68

$$\begin{aligned} \omega_{m_x, m_y, m_z} &= \pi c \sqrt{\left(\frac{m_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{a_z}\right)^2}, & \text{άρα} \\ \nu_{m_x, m_y, m_z} &= \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{a_z}\right)^2} \end{aligned}$$

ή

$$\omega_{pqm} = \pi c \sqrt{\left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{q}{w}\right)^2 + \left(\frac{m}{L}\right)^2}, \quad \text{άρα}$$

$$\nu_{pqm} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{q}{w}\right)^2 + \left(\frac{m}{L}\right)^2}$$

Αν όμως έχουμε τετραγωνική κοιλότητα (tetragonal cavity), με  $h = w = a$ , τότε

$$\omega_{pqm} = \pi c \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{a^2} + \frac{m^2}{L^2}},$$

$$\nu_{pqm} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{a^2} + \frac{m^2}{L^2}}.$$

ενώ για κυβική κοιλότητα (cubic cavity), με  $h = w = L = a$

$$\omega_{pqm} = \frac{\pi c}{a} \sqrt{p^2 + q^2 + m^2},$$

$$\nu_{pqm} = \frac{c}{2a} \sqrt{p^2 + q^2 + m^2}.$$

Από τις Εξ. 1.58,1.59,1.60, 1.64,1.65,1.66 προκύπτει ο Πίνακας 1.2

$m_x = p$	$m_y = q$	$m_z = m$	$\frac{2a}{c}\nu$	HM πεδίο
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	1	$\sqrt{2}$	$\neq 0$
1	1	1	$\sqrt{3}$	$\neq 0$
2	0	0	2	0
2	1	0	$\sqrt{5}$	$\neq 0$

Πίνακας 5.1: Τρόποι κυβικής κοιλότητας. Οι αριθμοί τρόπων  $m_x = p, m_y = q, m_z = m$  είναι ανεξάρτητοι μη αρνητικοί ακέραιοι υποκείμενοι μόνο στον περιορισμό ότι όχι περισσότεροι από ένας μπορεί να μηδενίζεται συγχρόνως, αλλιώς το HM πεδίο στην κοιλότητα μηδενίζεται.

Για την τετραγωνική κοιλότητα

$$\nu_{pqm} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{a^2} + \frac{m^2}{L^2}} = \frac{c}{2L} \sqrt{1 + \frac{L^2}{a^2} \frac{p^2 + q^2}{m^2}} = \frac{mc}{2L} \sqrt{1 + x}, \quad (5.78)$$

όπου

$$x = \frac{L^2}{a^2} \frac{p^2 + q^2}{m^2}. \quad (5.79)$$

Αυτό το  $x$  είναι στην πράξη πολύ μικρό. Επί παραδείγματι, έστω ότι αναφερόμαστε σε ένα LASER He-Ne, με κεντρικό μήκος κύματος  $\lambda_0 \approx 632.8$  nm,  $\nu_0 \approx 0.474$  PHz, και μήκος  $L = 0.4$  m. Ας προσπαθήσουμε να κάνουμε μια εκτίμηση της τάξεως μεγέθους του  $m$ . Αν είχαμε μόνο διαμήχεις τρόπους (1Δ πρόβλημα),  $\omega_m = \frac{m\pi c}{L} \Rightarrow \nu_m = \frac{mc}{2L} \sim \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \Rightarrow m \sim \frac{2L}{\lambda_0} = \frac{0.8 \text{ m}}{632.8 \text{ nm}} \Rightarrow m \approx 1.264 \times 10^6$ , άρα  $m^2 \approx 1.6 \times 10^{12}$ . Για  $a \approx 1$  mm,  $(\frac{L}{a})^2 \approx 160000$ , για  $a \approx 2$  mm,  $(\frac{L}{a})^2 \approx 40000$ , για  $a \approx 4$  mm,  $(\frac{L}{a})^2 \approx 10000$ , για  $a \approx 10$  mm,  $(\frac{L}{a})^2 \approx 1600$ . Άρα για μικρά  $p, q \approx 0, 1, 2, \dots$  το  $x$  είναι μικρό, οπότε μπορούμε να κάνουμε π.χ. ένα ανάπτυγμα Taylor

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad (5.80)$$

οπότε προκύπτει

$$\nu_{pqm} \approx \frac{mc}{2L} + \frac{cL}{4a^2} \frac{p^2 + q^2}{m}. \quad (5.81)$$

Άρα

$$\nu_{00m} \approx \frac{mc}{2L} = \nu_m, \quad (5.82)$$

που είναι οι συχνότητες των διαμηκών τρόπων (longitudinal modes) στο 1Δ πρόβλημα (Εξ. 5.28). **Βεβαίως, στο 3Δ πρόβλημα, αν δύο από τους αριθμούς τρόπων μηδενίζονται, έχουμε μηδενισμό του ΗΜ πεδίου στην κοιλότητα.** Οι τρόποι με  $p \neq 0$  ή  $q \neq 0$  λέγονται εγκάρσιοι τρόποι (transverse modes). Η συχνοτική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών εγκαρσίων τρόπων π.χ. μεταβάλλοντας μόνο το  $p$  με συγκεκριμένα  $q$  και  $m$  είναι λοιπόν

$$\Delta\nu_{p,p+1} \approx \frac{cL}{4a^2} \frac{(p+1)^2 + q^2}{m} - \frac{cL}{4a^2} \frac{p^2 + q^2}{m} = \frac{cL}{4a^2} \frac{2p+1}{m}. \quad (5.83)$$

Για παράδειγμα, για  $L = 0.4$  m και  $a = 4$  mm,  $\Delta\nu_{p,p+1} \approx 1.5 (2p+1)$  MHz, όπου χρησιμοποιήσαμε την εκτίμηση  $m \approx 1.264 \times 10^6$ . Για σύγκριση, ας θυμηθούμε ότι για  $L = 0.4$  m, η συχνοτική απόσταση των διαμηκών τρόπων είναι  $\Delta\nu_{m,m+1} =$

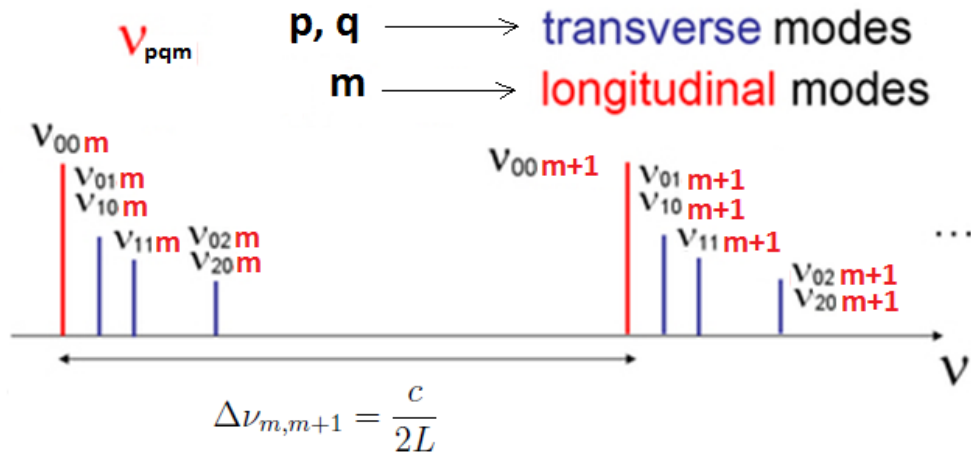
$\frac{c}{2L} = 375$  MHz. Για  $p = 1$  προκύπτει  $\Delta\nu_{p,p+1} \approx 4.5$  MHz, οπότε η συχνοτική απόσταση των εγκάρσιων τρόπων είναι αρκετά μικρότερη από τη συχνοτική απόσταση των διαμήκων τρόπων. Παίρνοντας κι αυτό σαν δεδομένο, ποιοτικά, οι διαμήκεις και οι εγκάρσιοι τρόποι σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλιότητα παρουσιάζονται [38] στο Σχήμα 5.11. Λάβαμε ακόμα υπ' όψιν ότι για το ίδιο  $m$

$$p = 1, q = 0 \text{ ή } p = 0, q = 1 \Rightarrow p^2 + q^2 = 1$$

$$p = 1, q = 1 \Rightarrow p^2 + q^2 = 2$$

$$p = 2, q = 0 \text{ ή } p = 0, q = 2 \Rightarrow p^2 + q^2 = 4$$

$$p = 2, q = 1 \text{ ή } p = 1, q = 2 \Rightarrow p^2 + q^2 = 5$$



Σχήμα 5.11: Διαμήκεις και εγκάρσιοι τρόποι  $\nu_{pqm}$  σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλιότητα.



## 5.8 Μορφή του TEM<sub>00</sub> και των TEM<sub>p'q'</sub> ανώτερης τάξεως σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη και σε κυλινδρική κοιλότητα.

Συχνά στην ονοματολογία χρησιμοποιούνται αντί των δεικτών  $p, q$  οι δείκτες  $p', q'$  οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

Σε **ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα** οι δείκτες στο TEM<sub>p'q'</sub> σημαίνουν:

$p'$  = ο αριθμός κόμβων κατά μήκος του άξονα  $x$ .

$q'$  = ο αριθμός κόμβων κατά μήκος του άξονα  $y$ .

Επί παραδείγματι, TEM<sub>02</sub> σημαίνει κανέναν κόμβο κατά μήκος του άξονα  $x$  και δύο κόμβους κατά μήκος του άξονα  $y$ . Η ένταση ΗΜ ακτινοβολίας του TEM<sub>p'q'</sub> τρόπου σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι [39]

$$I_{p'q'}(x, y) = I_0 \left[ H_{p'} \left( \frac{\sqrt{2}x}{w} \right) e^{-\frac{x^2}{w^2}} \right]^2 \left[ H_{q'} \left( \frac{\sqrt{2}y}{w} \right) e^{-\frac{y^2}{w^2}} \right]^2 \quad (5.84)$$

Αριστερά στον Πίνακα 5.2 φαίνονται τα πολυώνυμα Hermite  $H_n(x)$  που εμπλέκονται στην Εξ. 5.84, ενώ  $w$  είναι το FWHM μέγεθος της κηλίδας (spot size) του θεμελιώδους τρόπου TEM<sub>00</sub>. Η μορφή των TEM που προκύπτει από την Εξ. 5.84 παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.12, αριστερά. Οι τρόποι ανώτερης τάξεως έχουν μεγαλύτερη χωρική έκταση. Οπότε, με χρήση μιας οπής (aperture) που παρεμβάλλεται στην έξοδο του laser μπορούμε να κόψουμε εκείνους τους τρόπους που έχουν μεγαλύτερη από την επιθυμητή έκταση. Γενικώς, η συνολική μορφή της εντάσεως ακτινοβολίας οφείλεται στην υπέρθεση όλων των τρόπων της κοιλότητας, παρόλο που συχνά είναι επιθυμητό να λειτουργούμε μόνο στον θεμελιώδη τρόπο.

Σε **κυλινδρική κοιλότητα** οι δείκτες στο TEM<sub>p'q'</sub> σημαίνουν:

$p'$  = ο αριθμός κόμβων ακτινικά.

$q'$  = ο αριθμός κόμβων κατά μήκος μισής περιφέρειας, δηλαδή γωνιακά σε γωνία  $\pi$ .

Επί παραδείγματι, TEM<sub>02</sub> σημαίνει κανέναν κόμβο ακτινικά και δύο κατά μήκος μισής περιφέρειας, δηλαδή γωνιακά σε γωνία  $\pi$ . Η ένταση ΗΜ ακτινοβολίας του TEM<sub>p'q'</sub> τρόπου σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \varphi)$  είναι [39]

$$I_{p'q'}(\rho, \varphi) = I_0 \rho^{q'} \left[ L_{p'}^{q'}(\rho) \right]^2 \cos^2(q'\varphi) e^{-\rho} \quad (5.85)$$

όπου  $\rho = 2r^2/w^2$ ,  $w$  είναι το FWHM μέγεθος κηλίδας του θεμελιώδους τρόπου TEM<sub>00</sub> ο οποίος συμπίπτει με τον TEM<sub>00</sub> της ορθογώνιας παραλληλεπίπεδης κοιλό-

τητας και  $L_p^{q'}$  είναι το συσχετισμένο πολυώνυμο Laguerre τάξεως  $p'$  και δείκτη  $q'$ . Δεξιά στον Πίνακα 5.2 εμφανίζονται τα πολυώνυμα Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n), \quad (5.86)$$

από τα οποία κατασκευάζονται τα γενικευμένα ή συσχετισμένα πολυώνυμα Laguerre (generalized Laguerre polynomials or associated Laguerre polynomials)  $L_n^a(x)$  που εμπλέκονται στην Εξ. 5.85. Τα πολυώνυμα Laguerre είναι η ειδική περίπτωση για  $a = 0$  των γενικευμένων ή συσχετισμένων πολυωνύμων Laguerre. Δηλαδή

$$L_n^0(x) = L_n(x). \quad (5.87)$$

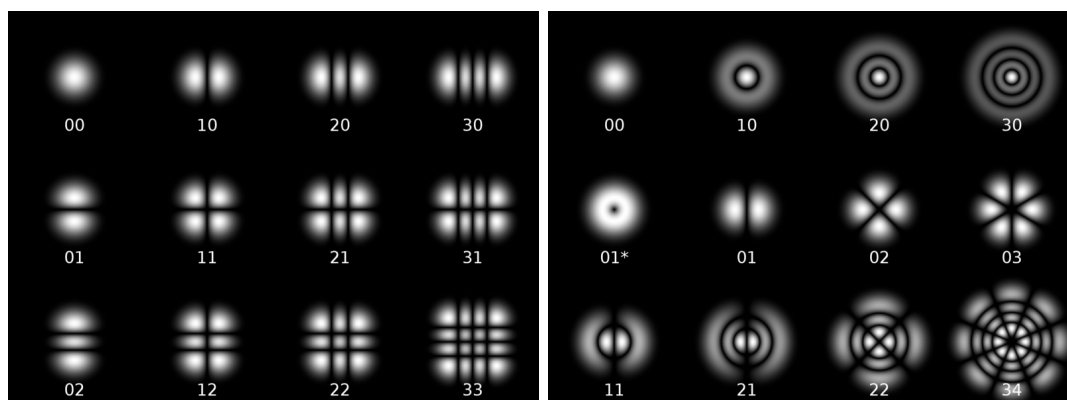
$$L_n^a(x) = \frac{x^{-a} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+a}). \quad (5.88)$$

Η μορφή των TEM που προκύπτει από την Εξ. 5.85 παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.12, δεξιά.

Συνοπτικά, η μορφή της εντάσεως ΗΜ ακτινοβολίας  $I$  των εγκαρσίων τρόπων TEM $_{p'q'}$  σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη (αριστερά) και σε κυλινδρική (δεξιά) κοιλότητα παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.12. Στον Πίνακα 5.2 ταξινομούνται τα πρώτα πολυώνυμα Hermite που σχετίζονται με την ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα (αριστερά) και τα πρώτα πολυώνυμα Laguerre που σχετίζονται με την κυλινδρική κοιλότητα (δεξιά).

πολυώνυμα Hermite	πολυώνυμα Laguerre
$H_0(x) = 1$	$L_0(x) = 1$
$H_1(x) = 2x$	$L_1(x) = -x + 1$
$H_2(x) = 4x^2 - 2$	$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$	$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$	$L_4(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$
...	...

Πίνακας 5.2: Τα πρώτα πολυώνυμα Hermite που σχετίζονται με την ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα και τα πρώτα πολυώνυμα Laguerre που σχετίζονται με την κυλινδρική κοιλότητα.



Σχήμα 5.12: Αριστερά: Εγκάρσιοι τρόποι  $TEM_{p'q'}$  σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα [40]. Δεξιά: Εγκάρσιοι τρόποι  $TEM_{p'q'}$  σε κυλινδρική κοιλότητα [41]. Ο  $TEM_{00}$  είναι περισσότερο συγκεντρωμένος κοντά στον άξονα  $z$  από τους  $TEM_{p'q'}$  ανώτερης τάξεως: καθώς αυξάνονται οι δείκτες, οι τρόποι καταλαμβάνουν μεγαλύτερη έκταση στο επίπεδο  $xy$ .

## 5.9 Είδη Laser - ενδεικτικές εφαρμογές.

Το πρώτο LASER ορατού φωτός ήταν το LASER ρουμπινιού (Ruby LASER) που κατασκευάστηκε το 1960 [42]. Σήμερα υπάρχουν πάρα πολλά είδη LASER αλλά τα περισσότερα χρησιμοποιούνται μόνο για εξειδικευμένους ερευνητικούς σκοπούς. Τα μήκη κύματος τους εκτείνονται από το υπεριώδες, εις το ορατό, το εγγύς υπέρυθρο, το μέσο υπέρυθρο και το μακρινό υπέρυθρο [43]. Δεν θα επεκταθούμε σε λεπτομέρειες. Εξάλλου, το παρόν σύγγραμμα εστιάζει στην κβαντική οπτική και όχι στα τεχνικά χαρακτηριστικά των LASER για τα οποία υπάρχει αρκετή ελληνική βιβλιογραφία, μεταφρασμένη ή μη [44], [45], [46], οπότε δεν θα επεκταθούμε σε τέτοια θέματα. Στον Πίνακα 5.3 παρουσιάζονται τα σημαντικότερα είδη LASER και μερικά μέλη κάθε είδους. Διαφοροποιούνται κυρίως ως προς το ενεργό μέσο και το μηχανισμό αντλήσεως.

Οι εφαρμογές των LASER σήμερα καλύπτουν ένα ευρύτατο φάσμα. Ας αναφέρουμε μερικές: **έρευνα** (άντληση σε άλλα LASER, συμβολομετρία, ψύξη με LASER, διάφορες φασματοσκοπίες, λιθογραφία, ομοεστιακή μικροσκοπία κ.ά.), **ιατρική** (χειρουργική, οδοντιατρική, εκτομή ιστού, αφαίρεση πέτρας νεφρών, δερματολογία, φωτοθεραπεία αμφιβληστροειδούς κ.ά.), **κοσμητική** (αφαίρεση τατουάζ, ρυτίδων κ.ά.), **τηλεπικοινωνίες, ολογραφία, στρατός, βιομηχανία** (συγκολλήσεις, τομές, φωτισμός οχημάτων, λιθογραφία, χαράξεις κ.ά.), **καθημερινή ζωή** (εκτυπωτές, εγγραφή και ανάγνωση σε δίσκους Blu-ray, DVD, CD κλπ, προβολείς, δείκτες, οπτικοί αναγνώστες, μέτρηση ρύπανσης κ.ά.).

<u>ενεργό μέσο</u>	<u>μήκη κύματος (nm)</u>
<b>LASER αερίου</b>	<b>άντληση: ηλεκτρική εκκένωση</b>
He-Ne	543.5, 593.9, 611.8, 632.8, 1152.3, 1520, 3391.3
Ar	351, 363.8, 454.6, 457.9, 465.8, 476.5, 472.7, 488.0, 514.5, 528.7
Kr	416, 530.9, 568.2, 647.1, 676.4, 752.5, 799.3
N	337.1
CO <sub>2</sub>	9400, 10600
<b>χημικά LASER</b>	<b>άντληση: χημική αντίδραση</b>
HF	2700 - 2900
DF	3600 - 4200
O, I	1315
<b>LASER βαφής</b>	<b>άντληση: άλλα LASER ή λυχνίες</b>
stilbene	390-435
coumarin	460-515
rhodamine	570-640
<b>LASER ατμών μετάλλου</b>	<b>άντληση: ηλεκτρική εκκένωση</b>
HeCd	441.6, 325
HeHg	567, 615
HeSe	ερυθρό έως υπεριώδες
HeAg	224.3
Sr	430.5
<b>LASER στερεάς καταστάσεως</b>	<b>άντληση: άλλα LASER ή λυχνίες</b>
ρουμπίνι	694.3
Nd:YAG	1064, 1320
NdCrYAG	1064, 1320
Er:YAG	2940
Yb	1030
Ho:YAG	2100
<b>LASER ημιαγωγών</b>	<b>άντληση: διαφορά δυναμικού ή φωτισμός</b>
GaN	400
InGaN	400-500
AlGaInP, AlGaAs	630-900
InGaAsP	1000-2100

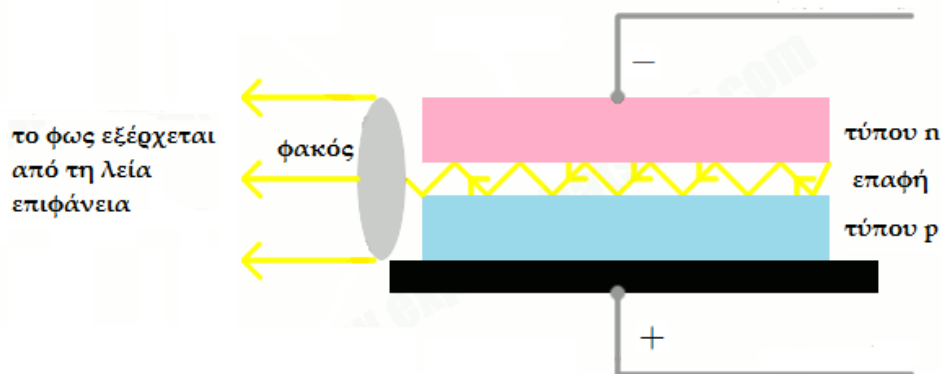
Πίνακας 5.3: Είδη LASER και μερικά μέλη κάθε είδους.

## 5.10 Laser επαφής p-n ή αλλιώς laser διόδου.

Τα περισσότερα laser δεν είναι μικροσκοπικά αντικείμενα. Για παράδειγμα, στα laser He-Ne το μήκος της κοιλότητας είναι μερικά dm και το πάχος της μερικά mm. Παρό' όλα αυτά χρησιμοποιούμε laser σε φορητά μηχανήματα παραγωγής ήχου και εικόνas (π.χ. DVD players), για να διαβάσουμε τις τιμές των προϊόντων στα καταστήματα με μικρούς ανιχνευτές γραμμωτού κώδικα (barcode readers), σε εκτυπωτές, σε επικοινωνίες με οπτικές ίνες και σε άλλα μικρά αντικείμενα καθημερινής χρήσεως. Αυτά τα μικρού μεγέθους laser είναι συνήθως laser διόδου (laser diodes) ή αλλιώς laser επαφής p-n (p-n junction lasers), τα οποία είναι κατασκευές παρόμοιες με τα LED (= light-emitting diode), τις μικρές ενδεικτικές λυχνίες λειτουργίας διαφόρων συσκευών. Τα laser διόδου πρωτοκατασκευάστηκαν από τον Robert N. Hall τη δεκαετία του 1960 [47]. Επειδή είναι μικρού μεγέθους και φτηνά, είναι σήμερα τα πιο διαδεδομένα laser.

Έχουμε βασικά μια διστρωματική ημιαγωγική διάταξη όπου το ένα στρώμα είναι ημιαγωγός τύπου  $p$  (με περίσσεια οπών) και το άλλο στρώμα είναι ημιαγωγός τύπου  $n$  (με περίσσεια ηλεκτρονίων). Μια συνηθισμένη δίοδος p-n άγει μόνο κατά τη μία διεύθυνση, δηλαδή όταν η διαφορά δυναμικού στα άκρα της έχει τη λεγόμενη ορθή πόλωση (forward bias). Με αντίθετη διαφορά δυναμικού λέμε ότι έχουμε ανάστροφη πόλωση (reverse bias) και η δίοδος δεν άγει. Σε ένα LED ή σε ένα laser διόδου έχουμε επανασύνδεση ηλεκτρονίων - οπών, η οποία γίνεται διαμέσου του ενεργειακού χάσματος οπότε παράγονται φωτόνια (μπορεί όμως να εμπλέκονται και φωνόνια στη διαδικασία). Οι συνηθέστεροι ημιαγωγοί που χρησιμοποιούνται σε laser διόδου είναι τα κράματα  $Al_xGa_{1-x}As$ ,  $In_xGa_{1-x}As_yP_{1-y}$ . Ανάλογα με το μέγεθος του ενεργειακού χάσματος, τα φωτόνια αυτά μπορεί να έχουν διάφορα ορατά χρώματα αλλά και υπέρυθρο ή υπεριώδες.

Η άντληση στην περίπτωση του laser διόδου οφείλεται στη σωστή (ορθή) διαφορά δυναμικού. Ο αριθμός των προσμίξεων (δοτών) στον ημιαγωγό τύπου  $n$  και ο αριθμός των προσμίξεων (αποδεκτών) στον ημιαγωγό τύπου  $p$  είναι τόσο μεγάλοι (της τάξεως των  $10^{18} \text{cm}^{-3}$ ) ώστε στον ημιαγωγό τύπου  $n$  η στάθμη Fermi  $F_n$  βρίσκεται στη ζώνη αγωγιμότητας και στον ημιαγωγό τύπου  $p$  η στάθμη Fermi  $F_p$  βρίσκεται στη ζώνη σθένους (Σχήμα 5.14 άνω). Όταν τα δύο στρώματα έρθουν σε επαφή, η υψηλή συγκέντρωση οπών στην πλευρά του ημιαγωγού τύπου  $p$  και η υψηλή συγκέντρωση ηλεκτρονίων στην πλευρά του ημιαγωγού τύπου  $n$  δημιουργούν ροές από τη πλευρά υψηλής συγκεντρώσεως στην πλευρά χαμηλής συγκεντρώσεως: τα ηλεκτρόνια διαχέονται στην πλευρά τύπου  $p$ , και οι οπές διαχέονται πλευρά τύπου  $n$  οπότε, στην περιοχή της επαφής, η πλευρά τύπου  $p$  φορτίζεται αρνητικά και

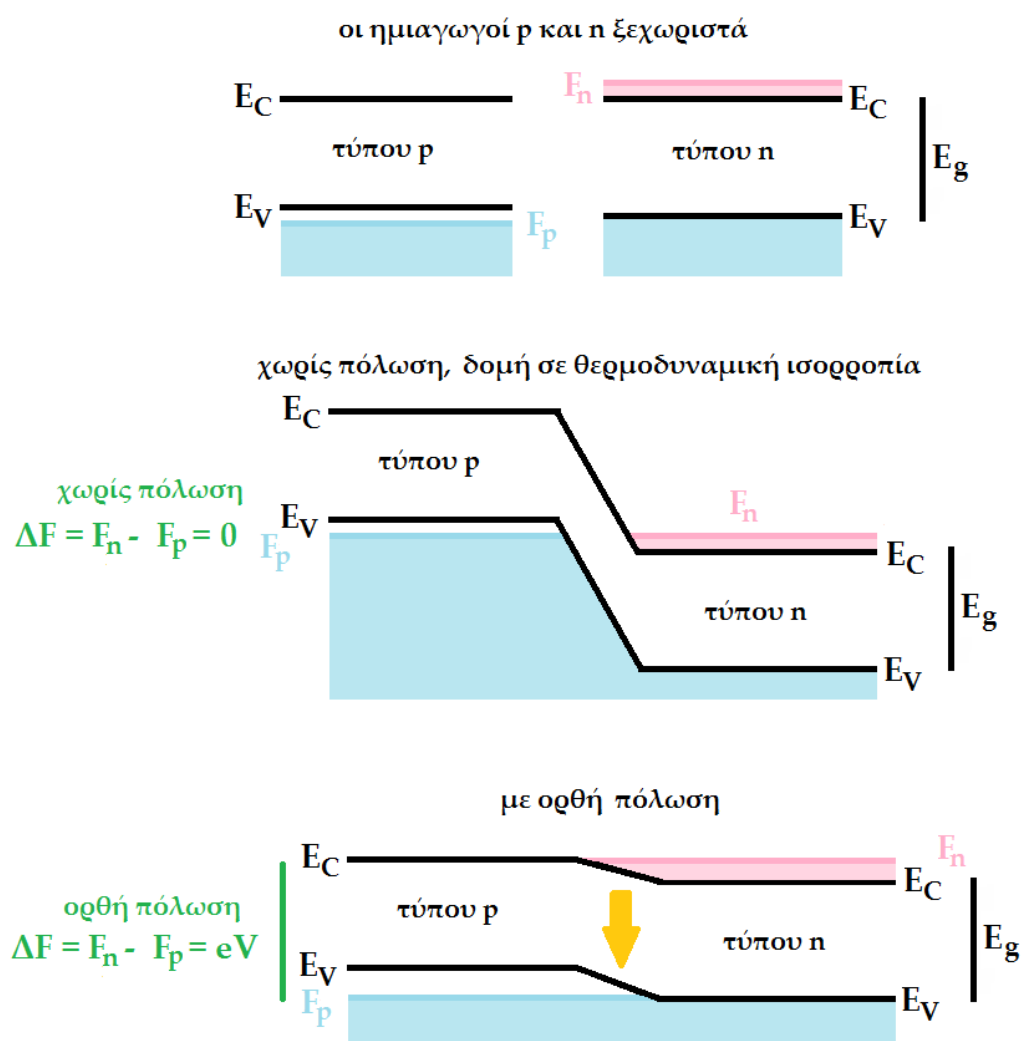


Σχήμα 5.13: Μια διάταξη laser διόδου με τα δύο ηλεκτρόδια (+) και (-) σε ορθή πόλωση. Οι άνω και κάτω επιφάνειες, που είναι κάθετες στο επίπεδο του σχήματος, έχουν διαστάσεις της τάξεως του  $\mu\text{m}^2$ . Η περιοχή της επαφής, δηλαδή το “μεσαίο” στρώμα είναι της τάξεως των 100 nm, ενώ οι πλευρικές επιφάνειες της τάξεως των 10-100  $\mu\text{m}$ . Δηλαδή, η διάταξη είναι αρκετά μικρή ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλές καθημερινές μικροσυσκευές.

η πλευρά τύπου  $n$  φορτίζεται θετικά, πράγμα που εμποδίζει την περαιτέρω διάχυση ηλεκτρονίων και οπών. Τότε στη διάταξη επέρχεται θερμοδυναμική ισορροπία, οπότε τα επίπεδα Fermi ταυτίζονται και δεν έχουμε πια ροή ηλεκτρονίων ή οπών από το στρώμα  $p$  στο στρώμα  $n$  ή τούμπαλιν. Δημιουργείται δηλαδή ένας φραγμός δυναμικής ενέργειας της τάξεως των 0.1 eV (Σχήμα 5.14 μέση). Εάν εφαρμοστεί εξωτερική διαφορά δυναμικού  $V$ , τότε τα επίπεδα Fermi διαχωρίζονται έτσι ώστε

$$\Delta F = F_n - F_p = eV. \quad (5.89)$$

Η τάση λειτουργίας  $V$  του laser διόδου είναι μικρή, της τάξεως μεγέθους του  $V$  διότι το  $\Delta F$  είναι της τάξεως του ενεργειακού χάσματος του ημιαγωγού  $E_g$ , το οποίο είναι κοντά στο eV. Έτσι επιτυγχάνεται αναστροφή πληθυσμού στην περιοχή της επαφής (πορτοκαλί βέλος στο Σχήμα 5.14). Δηλαδή εκεί υπάρχουν αρκετά ηλεκτρόνια στη ζώνη αγωγιμότητας και αντιθέτως οπές στη ζώνη σθένους. Κάποια από αυτά τα ηλεκτρόνια μεταπίπτουν αυθόρμητως από τη ζώνη αγωγιμότητας στις κενές θέσεις της ζώνης σθένους έχουμε δηλαδή αυθόρμητη εκπομπή. Τα φωτόνια που εκπέμπονται από την αυθόρμητη αυτή εκπομπή δεν είναι, εννοείται, συνεκτικά. Έχουν δηλαδή τυχαία φάση. Εξαναγκάζουν όμως άλλα ηλεκτρόνια της ζώνης αγωγιμότητας να μεταπέσουν στη ζώνη σθένους εκπέμποντας φωτόνια, δηλαδή έχουμε εξαναγκασμένη



Σχήμα 5.14: Η αρχή λειτουργίας της επαφής p-n ως laser. Άνω: οι ημιαγωγοί τύπου p και τύπου n, ξεχωριστά. Μέση: η δομή χωρίς πόλωση, δηλαδή χωρίς εξωτερική διαφορά δυναμικού, σε θερμοδυναμική ισορροπία. Κάτω: η δομή με ορθή πόλωση, με εξωτερική διαφορά δυναμικού  $V$ . Όταν έχει πια σχηματιστεί η δομή, υπάρχουν “τρία στρώματα” γιατί έχουμε και την περιοχή της επαφής (όπου φαίνονται κεκλιμένες οι ζώνες). Κατά την ορθή πόλωση έχουμε αναστροφή πληθυσμού στην περιοχή της επαφής πράγμα που υποδηλώνεται με το πορτοκαλί βέλος. Δηλαδή στην περιοχή αυτή υπάρχουν πολλά ηλεκτρόνια τα οποία καθώς μεταπίπτουν μέσω του ενεργειακού χάσματος  $E_g$  εκπέμπουν φωτόνια και επανασυνδέονται με οπές. Τα φωτόνια αυτά, στη συνέχεια προκαλούν εξαναγκασμένη εκπομπή σε ηλεκτρόνια της περιοχής επαφής.

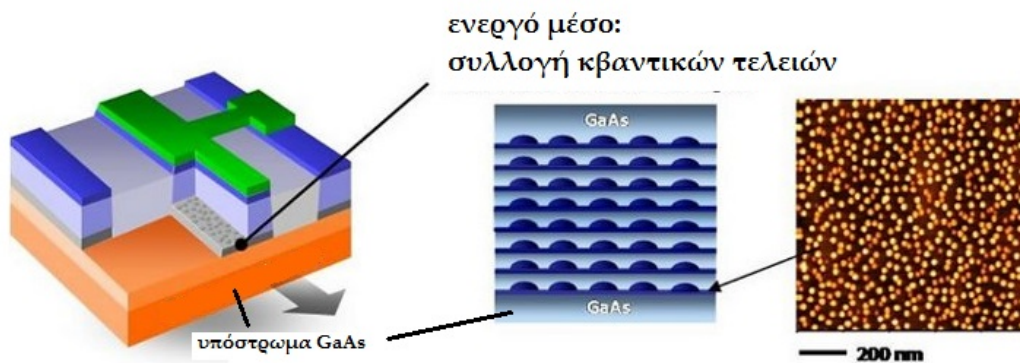
εκπομπή. Δηλαδή την εκπομπή φωτονίων ίδιας ενέργειας, ορμής, φάσης και πόλωσης. Όμως, επειδή δεν πρόκειται για μετάπτωση από στάθμη πολύ μικρού εύρους σε στάθμη πολύ μικρού εύρους (όπως γίνεται π.χ. σε ένα laser He-Ne) αλλά για μετάπτωση από την κατειλημμένη ενεργειακή περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας στην άδεια ενεργειακή περιοχή της ζώνης σθένους, η γραμμή εκπομπής είναι ευρύτερη από π.χ. την γραμμή εκπομπής ενός laser He-Ne, π.χ. 100 φορές ευρύτερη [36].

Τα φωτόνια εξαναγκάζονται να αντανακλούνται στη στενή περιοχή της επαφής μεταξύ των στρωμάτων τύπου  $p$  και τύπου  $n$  δημιουργώντας στάσιμα κύματα. Έτσι, τα φωτόνια υποχρεώνονται να περνούν στην επαφή αρκετή ώρα ώστε να έχουμε πολλές εξαναγκασμένες εκπομπές. Μέρος του ενισχυμένου πια φωτός εξέρχεται από μια επιφάνεια της δομής που έχει λειανθεί, ενώ οι άλλες σκοπίμως παραμένουν τραχείς ώστε να περιορίζεται το φως. Αυτή η λειασμένη επιφάνεια πρέπει να είναι ακριβώς παράλληλη προς την αντίθετη της ώστε να έχουμε στάσιμα κύματα στην κοιλότητα. Οι δύο αυτές επιφάνειες μπορεί και να καλύπτονται με κάτοπτρα ή μεταλλική επίστρωση ώστε να ενισχύεται η δημιουργία στάσιμων κυμάτων. Με άλλα λόγια, μια διάταξη LED μπορεί να εκπέμψει δέσμη laser εάν διαθέτει κοιλότητα συντονισμού [36].

## 5.11 Laser κβαντικών τελειών.

Ένα άλλο laser ημιαγωγών είναι το laser κβαντικών τελειών (quantum dot laser), Σχήμα 5.15. Πρόκειται για διάταξη στην οποία το ενεργό μέσο είναι μια συλλογή κβαντικών τελειών (ενότητα 2.4.2). Λόγω του ισχυρού κβαντικού περιορισμού των φορέων στις κβαντικές τελείες, η ηλεκτρονική τους δομή είναι παρόμοια με αυτή των ατόμων. Άλλωστε, όπως είπαμε στην ενότητα 2.4.2, για το λόγο αυτό οι κβαντικές τελείες ονομάζονται καμιά φορά και τεχνητά άτομα όταν είναι απλές ή τεχνητά μόρια εφ' όσον είναι συζευγμένες. Τα laser που κατασκευάζονται από τέτοια ενεργά μέσα επιδεικνύουν ιδιότητες παρόμοιες με αυτές των laser αερίου και υπερτερούν από τα άλλα ημιαγωγικά laser π.χ. ως προς το εύρος της γραμμής εκπομπής. Επειδή η ηλεκτρονική δομή των κβαντικών τελειών εξαρτάται από το μέγεθός τους αλλά και από το είδος των συνήθως ημιαγωγικών κραμάτων που χρησιμοποιούνται [48], η ενεργός περιοχή μπορεί να κατασκευαστεί έτσι ώστε η διάταξη να λειτουργεί σε διάφορα μήκη κύματος, ακόμα και σε περιοχές που δεν ήταν εφικτές για συνηθισμένα laser ημιαγωγών. Διατάξεις laser κβαντικών τελειών αξιοποιούνται σε εμπορικές εφαρμογές στην ιατρική, σε οθόνες, στη φασματοσκοπία, στις τηλεπικοινωνίες και αλλού. Προ δεκαετίας, κατασκευάστηκε laser κβαντικών τελειών για οπτικές επικοινωνίες [49] στα 10 Gbps = Giga bits per second, με μήκος κύματος λειτουργίας 1.3  $\mu\text{m}$  και θερμοκρασίες λειτουργίας 20 - 70 °C. Από τότε, οι επιδόσεις αυτές έχουν βελτιωθεί.





Σχήμα 5.15: Ο κορμός μιας διατάξεως κβαντικών τελειών που μεταδίδει δεδομένα στα 25 Gbps. Εικόνα τροποποιημένη από δελτίο τύπου της Fujitsu, 2010.

## 5.12 Αναφορές 5ου Κεφαλαίου.

Η αρίθμηση αναφέρεται στη βιβλιογραφία όπως αυτή παρατίθεται συνολικά πριν από τα Παραρτήματα.

[36] Γ.Ι. Παπαδόπουλος, Φ.Λ. Παλληκάρη, Κβαντική Οπτική και Lasers, Αθήνα, 2009.

[37] W. Zimmermann Jr, The Classical Electromagnetic Modes of a Rectangular Resonant Cavity, arXiv:1207.0792.

[38] [optique-ingenieur.org](http://optique-ingenieur.org) courses: Longitudinal and transverse modes.

[39] O. Svelto, Principles of Lasers, Springer Science+Business Media (2010), Springer New York Dordrecht Heidelberg London (5th ed.), ISBN: 9781441913012, e-ISBN: 9781441913029.

[40] “Hermite-gaussian” by DrBob at English Wikipedia. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Commons.

[41] “Laguerre-gaussian” by DrBob at English Wikipedia. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Commons.

[42] T.H. Maiman, Stimulated Optical Radiation in Ruby, Nature 187 (1960) 493-494.

[43] M. Weber, Handbook of laser wavelengths, Taylor and Francis Group (1999), ISBN-13: 9780849335082, ISBN-10: 0849335086.

[44] M. Young, Οπτική και λέιζερ Οπτικές Ύνες και Κυματοδηγοί, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ. Μετάφραση: Η. Ζουμπούλης, Γ. Κουρούκλης, Α. Κώνστα, Ε. Λιαροκάκης, Κ. Ράπτης, Ι. Ράπτης, Α. Σεραφετινίδης, Ε. Φαμπρικέζη. Επιστημονική επιμέλεια: Η. Ζουμπούλης, Α. Κώνστα, Πρωτότυπη έκδοση: Optics and Lasers, Springer-Verlag, 2000. Έκδοση 2008. ISBN: 9602546758.

[45] J. Wilson and J. Hawkes, Οπτοηλεκτρονική: μια εισαγωγή. Μετάφραση: Α.Α. Σεραφετινίδης, Μ. Ι. Μακροπούλου, Α. Παπαγιάννης, Ι. Ζεργιώτη, Ε. Φαμπρικέζη.

Επιστημονική επιμέλεια: Α.Α. Σεραφετινίδης. Πρωτότυπη έκδοση: Optoelectronics: an introduction, 3rd edition, Prentice Hall, 1998. Έκδοση 2007. ISBN: 9789602546697.

[46] Σ. Βες, Εισαγωγή στην Κβαντική οπτική και Laser, Εκδότης: Γιαχούδης - Γιαπούλης, ISBN: 9780007425389. Θεσσαλονίκη 1999.

[47] R.N. Hall, Stimulated emission semiconductor devices, 24 October 1962, US Patent number 3245002, 5 April 1966.

[48] A. Zora, G.P. Triberis, C. Simserides, Near-Field Optical Properties of Quantum Dots, Applications and Perspectives, Recent Patents on Nanotechnology 5 (2011) pp. 188-224; A. Zora, C. Simserides, G.P. Triberis, The effect of the size of self-assembled individual quantum dots on their PL spectra, Phys. Status Solidi C 5 (2008) 3806-3808.

[49] Fujitsu (September 10, 2004). Fujitsu, University of Tokyo Develop World's First 10Gbit/s Quantum Dot Laser Featuring Breakthrough Temperature-Independent Output. Press Release.

# Κεφάλαιο 6

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ.

### 6.1 Καθαρή κατάσταση και μικτή κατάσταση.

Ίσως σε όλη τη κβαντική μηχανική που έχει μελετήσει ο αναγνώστης ή η αναγνώστρια έως τώρα, εξετάστηκαν περιπτώσεις όπου υπάρχει μία κυματοσυνάρτηση, ως την πούμε σχηματικά  $\Psi(\vec{r}, t)$ , η οποία περιγράφει το εξεταζόμενο σύστημα. Τότε, το  $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$  δίνει την πιθανότητα οι συντεταγμένες να βρίσκονται κοντά στην τιμή  $\vec{r}$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Αυτή η κυματοσυνάρτηση μπορεί να βρεθεί, τουλάχιστον κατ' αρχήν, από την εξίσωση Schrödinger. Από τη στιγμή που την έχουμε, μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή οιοδήποτε τελεστή  $\hat{A}$ , ως  $\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$ . Συνήθως αυτό γίνεται βρίσκοντας μία πλήρη βάση, ως την ονομάσουμε  $\{\Phi_k(\vec{r})\}$ , όπου  $k$  είναι κάποιος συλλογικός κβαντικός αριθμός ικανός να περιγράψει το σύστημα. Επειδή συνήθως μελετάμε συστήματα πεπερασμένου μεγέθους, μπορούμε να λάβουμε τον  $k$  διακριτό, οπότε θα χρησιμοποιούμε αθροίσματα  $\sum_k$ , αλλά σε άλλες περιπτώσεις θα μπορούσε ο  $k$  να είναι συνεχής, οπότε θα χρησιμοποιούσαμε ολοκληρώματα  $\int dk$ . Αν η βάση μας είναι πλήρης, τότε η κυματοσυνάρτηση μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_k c_k(t) \Phi_k(\vec{r}). \quad (6.1)$$

Άρα, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των συντελεστών  $c_k(t)$ . Από τη στιγμή που τους υπολογίσουμε, η αναμενόμενη τιμή του τελεστή  $\hat{A}$  είναι (για πράξεις δείτε το Παράρτημα Β'8)

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = \sum_{k,k'} c_k(t) c_{k'}^*(t) A_{k'k} \Rightarrow \quad (6.2)$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{k,k'} \rho_{kk'}(t) A_{k'k} \quad (6.3)$$

όπου  $A_{kk'}$  είναι το στοιχείο πίνακα του τελεστή  $\hat{A}$  μεταξύ των καταστάσεων  $|\Phi_k\rangle$  και  $|\Phi_{k'}\rangle$  και ορίσαμε

$$\rho_{kk'}(t) = c_k(t)c_{k'}^*(t) \quad (6.4)$$

Άρα, κατ' αρχήν, όλα μπορούν να υπολογιστούν. Μια τέτοια περίπτωση όπου το σύστημα περιγράφεται από μία κυματοσυνάρτηση, ονομάζεται **καθαρή κατάσταση** (pure state) [50].

Όμως, δεν είναι πάντοτε εφικτό ένα σύστημα να περιγράφεται από μία κυματοσυνάρτηση. Σε πολλές περιπτώσεις το σύστημα για το οποίο ενδιαφερόμαστε είναι συζευγμένο με μια δεξαμενή (reservoir, R) με την οποία μπορεί να ανταλλάσσει θερμότητα, σωματίδια κ.ά.. Εάν το ολικό (total, T) σύστημα, δηλαδή το σύστημα για το οποίο ενδιαφερόμαστε και η δεξαμενή είναι απομονωμένο, μπορούμε να ορίσουμε μία κυματοσυνάρτηση για το ολικό σύστημα, ως την πούμε σχηματικά  $\Psi_T(\vec{r}, \vec{r}_R, t)$ . Εάν δεν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις, θα μπορούσαμε να την διαχωρίσουμε σε ένα γινόμενο  $\Psi(\vec{r}, t)\Psi_R(\vec{r}_R, t)$  πράγμα που δείχνει ότι το τι κάνει το σύστημα για το οποίο ενδιαφερόμαστε είναι ανεξάρτητο από το τι κάνει η δεξαμενή, αφού δεν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους. Τότε μπορούμε να διακρίνουμε την  $\Psi(\vec{r}, t)$  σαν την κυματοσυνάρτηση του συστήματος που μας ενδιαφέρει. Αλλά εάν το σύστημα που μας ενδιαφέρει αλληλεπιδρά με τη δεξαμενή, τότε δεν μπορούμε να διαχωρίσουμε μια κυματοσυνάρτηση του συστήματος που μας ενδιαφέρει και μια κυματοσυνάρτηση της δεξαμενής θερμότητας. Από την άλλη μεριά, μπορεί να μην θέλουμε να εργαστούμε με την  $\Psi_T(\vec{r}, \vec{r}_R, t)$ , επειδή αυτή περιέχει όλη την πληροφορία για το τι κάνει η δεξαμενή και αυτό μπορεί να μην μας ενδιαφέρει ή να μην το χρειαζόμαστε ή να είναι εξαιρετικά πολύπλοκο. Οπότε, τίθεται το ερώτημα: πως αντιμετωπίζουμε τέτοιες περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει καλά ορισμένη κυματοσυνάρτηση για το σύστημα για το οποίο ενδιαφερόμαστε; Μια τέτοια περίπτωση όπου δεν υπάρχει μια καλά ορισμένη κυματοσυνάρτηση για το σύστημα για το οποίο ενδιαφερόμαστε ονομάζεται **μικτή κατάσταση** (mixed state) [50].

Παρό' όλα αυτά, και σε αυτές τις περιπτώσεις, υπάρχει οδός να ακολουθήσουμε. Θα υποθέσουμε ότι το σύστημα για το οποίο ενδιαφερόμαστε έχει πιθανότητα  $w_i$  να βρίσκεται σε στην κατάσταση που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση  $\Psi_i(\vec{r}, t)$ . Δηλαδή, αντί να λέμε ότι το σύστημα για το οποίο ενδιαφερόμαστε βρίσκεται με βεβαιότητα με μια κατάσταση η οποία περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση, το επιτρέπουμε να βρίσκεται, με διαφορετικές πιθανότητες, σε διαφορετικές καταστάσεις

οι οποίες περιγράφονται από διαφορετικές κυματοσυναρτήσεις. Φυσικά θα πρέπει η ολική πιθανότητα να ισούται με τη μονάδα

$$\sum_i w_i = 1. \quad (6.5)$$

Σε αυτή τη μικτή κατάσταση, η αναμενόμενη τιμή ενός τελεστή  $\hat{A}$  θα είναι

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i w_i \langle \hat{A} \rangle_i \quad (6.6)$$

αφού το σύστημα βρίσκεται με πιθανότητα  $w_i$  στην κατάσταση  $\Psi_i(\vec{r}, t)$ , στην οποία η αναμενόμενη τιμή του τελεστή  $\hat{A}$  είναι

$$\langle \hat{A} \rangle_i = \langle \Psi_i(t) | \hat{A} | \Psi_i(t) \rangle = \int d^3r \Psi_i^*(\vec{r}, t) \hat{A} \Psi_i(\vec{r}, t). \quad (6.7)$$

Αναλυτικότερες πράξεις στο Παράρτημα Β'.8. Όμως, κάθε μία από τις πιθανές κυματοσυναρτήσεις  $\Psi_i(\vec{r}, t)$  μπορεί να αναλυθεί με τη βοήθεια της πλήρους βάσεως  $\{\Phi_k(\vec{r})\}$  ως

$$\Psi_i(\vec{r}, t) = \sum_k c_k^i(t) \Phi_k(\vec{r}), \quad (6.8)$$

με

$$\sum_k |c_k^i(t)|^2 = 1. \quad (6.9)$$

Επομένως, εάν γνωρίζουμε αυτούς τους συντελεστές  $c_k^i(t)$  και τις πιθανότητες  $w_i$ , μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \sum_i w_i \int d^3r \sum_{k'} c_{k'}^{i*}(t) \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \hat{A} \sum_k c_k^i(t) \Phi_k(\vec{r}) \\ &= \sum_i w_i \sum_{k,k'} c_{k'}^{i*}(t) c_k^i(t) \int d^3r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \hat{A} \Phi_k(\vec{r}) \\ &= \sum_i w_i \sum_{k,k'} c_{k'}^{i*}(t) c_k^i(t) A_{k'k} = \sum_{k,k'} \left[ \sum_i w_i c_k^i(t) c_{k'}^{i*}(t) \right] A_{k'k} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \hat{A} \rangle = \sum_{k,k'} \rho_{kk'}(t) A_{k'k}} \quad (6.10)$$

όπου ορίσαμε

$$\rho_{kk'}(t) = \sum_i w_i c_k^i(t) c_{k'}^{i*}(t) \quad (6.11)$$

Παρατηρούμε ότι η Εξ. 6.4, η οποία ισχύει για μια καθαρή κατάσταση, είναι μια μερική περίπτωση της Εξ. 6.11, η οποία ισχύει γενικά για μια μικτή κατάσταση. Δηλαδή, όταν είμαστε σε καθαρή κατάσταση, τότε έχουμε μόνο ένα πιθανό  $i$  με πιθανότητα  $w_i = 1$ , οπότε η Εξ. 6.11 ταυτοποιείται με την Εξ. 6.4. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την προηγούμενη παρατήρηση, οι εκφράσεις των Εξ. 6.3, 6.10, οι οποίες δίνουν την αναμενόμενη τιμή του τελεστή  $\hat{A}$ , ταυτίζονται. Ο πίνακας  $\rho$  του οποίου τα στοιχεία δίνονται από τις Εξ. 6.4, 6.11 ονομάζεται **πίνακας πυκνότητας** (density matrix). Βλέπουμε λοιπόν ότι με τη βοήθεια του πίνακα πυκνότητας μπορούμε να περιγράψουμε καθαρές αλλά και μικτές καταστάσεις.

## 6.2 Πίνακας πυκνότητας και τελεστής πυκνότητας.

Επομένως, ο **πίνακας πυκνότητας** (density matrix)  $\rho$ , ο οποίος είναι μια αναπαράσταση του **τελεστή πυκνότητας** (density operator)  $\hat{\rho}$ , αποτελεί μία πιο γενική περιγραφή ενός κβαντικού συστήματος από την περιγραφή που κάνουμε με τη βοήθεια των κυματοσυναρτήσεων  $\Psi(\vec{r}, t)$  ή των καταστατικών ανυσμάτων  $|\Psi(t)\rangle$ . Συχνά, με κάποια χαλαρότητα, χρησιμοποιούνται αδιακρίτως οι όροι πίνακας πυκνότητας και τελεστής πυκνότητας. Ο πίνακας πυκνότητας και ο τελεστής πυκνότητας, ως φορμαλισμός, εισήχθησαν ανεξάρτητα από τους John von Neumann [51] και Lev Landau [52] το 1927. Τόσο ο πίνακας όσο και ο τελεστής είναι ερμιτιανοί και ίχνους ίσου με τη μονάδα [53].

Ενώ μία κυματοσυνάρτηση (wave function) ή ένα καταστατικό διάνυσμα (state vector) αρκούν για να περιγραφεί ένα κβαντικό σύστημα σε μια καθαρή κβαντική κατάσταση, ο πίνακας πυκνότητας μπορεί να περιγράψει ένα κβαντικό σύστημα και σε μια μικτή κβαντική κατάσταση. Είναι για παράδειγμα χρήσιμος και σε περιπτώσεις απώλειας συνοχής (decoherence) λόγω αλληλεπιδράσεως του συστήματος για το οποίο ενδιαφερόμαστε με δεξαμενή με την οποία μπορεί να ανταλλάσσει θερμότητα ή σωματίδια.

Οι Εξ. 6.3, 6.10 δείχνουν ότι για να υπολογίσουμε αναμενόμενες τιμές τελεστών χρειαζόμαστε μόνο τις ποσότητες  $\rho_{kk'}(t)$  των Εξ. 6.4, 6.11 αντί για όλα τα  $\Psi_i$  και  $w_i$ . Εφ' όσον αναμενόμενες τιμές είναι εν τέλει αυτό που προσδοκούμε, όλη η χρήσιμη

πληροφορία για το σύστημα που μας ενδιαφέρει κωδικοποιείται στα στοιχεία του πίνακα πυκνότητας  $\rho_{kk'}(t)$ . Επομένως ο τελεστής πυκνότητας  $\hat{\rho}$  μπορεί να οριστεί τέτοιος ώστε

$$\langle \Phi_k(\vec{r}) | \hat{\rho}(t) | \Phi_{k'}(\vec{r}) \rangle = \rho_{kk'}(t) \quad (6.12)$$

Με αυτό τον ορισμό, οι Εξ. 6.3, 6.10 γράφονται

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{k,k'} \rho_{kk'}(t) A_{k'k} = \text{tr}(\rho(t) \cdot A) \quad (6.13)$$

Συμβολίζουμε με  $\text{tr}$  και ονομάζουμε ίχνος (trace) ενός τετραγωνικού πίνακα το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του. Η Εξ. 6.13 ισχύει διότι  $\sum_{k'} \rho_{kk'}(t) A_{k'k}$  είναι το διαγώνιο  $kk$  στοιχείο του πίνακα που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των πινάκων  $\rho(t)$  και  $A$ . Οπότε, αν αθροίσουμε αυτά τα διαγώνια στοιχεία, δηλαδή αθροίσουμε και στα  $k$ , παίρνουμε το ίχνος του πίνακα  $\rho(t) \cdot A$ , το οποίο συμβολίζουμε  $\text{tr}(\rho(t) \cdot A)$ . Το ίχνος ενός πίνακα ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του και παραμένει αναλλοίωτο εάν αλλάξουμε βάση. Ας δούμε μερικές ιδιότητες του τελεστή πυκνότητας.

(1) Μπορούμε να δώσουμε έναν εναλλακτικό ορισμό του τελεστή πυκνότητας για καθαρή κατάσταση, δηλαδή η Εξ. 6.4 μπορεί να γραφτεί και ως

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi| \quad (6.14)$$

αφού αναπαραστήσουμε

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

και άρα

$$\langle \Psi| = [c_1^*(t) \quad c_2^*(t) \quad \dots], \quad (6.16)$$

οπότε

$$|\Psi\rangle \langle \Psi| = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix} [c_1^*(t) \quad c_2^*(t) \quad \dots] = \begin{bmatrix} c_1(t)c_1^*(t) & c_1(t)c_2^*(t) & \dots \\ c_2(t)c_1^*(t) & c_2(t)c_2^*(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} = \rho \quad (6.17)$$



(2) Η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση  $\ell$  της βάσεως  $\{\Phi_k(r)\}$  είναι  $\rho_{\ell\ell}(t)$ . Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της Εξ. 6.11 για  $k = k' = \ell$ . Δηλαδή,

$$\rho_{\ell\ell}(t) = \sum_i w_i c_\ell^i(t) c_\ell^{i*}(t) = \sum_i w_i |c_\ell^i(t)|^2. \quad (6.18)$$

Κάθε όρος του αθροίσματος αυτού είναι η πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση  $i$  επί την πιθανότητα όντας στην  $i$  να βρίσκεται στην κατάσταση  $\ell$  της βάσεως  $\{\Phi_k(r)\}$ . Άρα, το άθροισμα είναι η συνολική πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση  $\ell$  της βάσεως  $\{\Phi_k(r)\}$ .

(3) Το ίχνος του πίνακα πυκνότητας είναι ίσο με τη μονάδα, δηλαδή

$$\text{tr}(\rho(t)) = 1. \quad (6.19)$$

Αυτό προκύπτει από την Εξ. 6.18 αθροίζοντας στα  $\ell$ , δηλαδή

$$\sum_\ell \rho_{\ell\ell}(t) = \sum_\ell \sum_i w_i |c_\ell^i(t)|^2 = \sum_i w_i \sum_\ell |c_\ell^i(t)|^2 = \sum_i w_i = 1 \quad (6.20)$$

διότι  $\sum_\ell |c_\ell^i(t)|^2 = 1$  (Εξ. 6.9) και  $\sum_i w_i = 1$  (Εξ. 6.5). Εναλλακτικά, μπορούμε να πάρουμε την Εξ. 6.13 για  $\hat{A} = \hat{1}$ , όπου  $\hat{1}$  είναι ο μοναδιαίος τελεστής, οπότε

$$\langle \hat{1} \rangle = \text{tr}(\rho(t) \cdot 1) = \text{tr}(\rho(t)) \quad (6.21)$$

και να παρατηρήσουμε ότι η αναμενόμενη τιμή του μοναδιαίου τελεστή είναι 1. Αυτή η ιδιότητα ουσιαστικά αντικαθιστά τη συνθήκη κανονικοποίησης της κυματοσυναρτήσεως ενός συστήματος που βρίσκεται σε μια καθαρή κατάσταση.

(4) Ο τελεστής πυκνότητας είναι ερμιτιανός,  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ , δηλαδή για τα στοιχεία του πίνακα πυκνότητας ισχύει  $\rho_{kk'} = \rho_{k'k}^*$ , το οποίο προκύπτει κατευθείαν παίρνοντας το μιγαδικό συζυγές των Εξ. 6.4, 6.11.

(5) Ο τελεστής πυκνότητας  $\hat{\rho}$  είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή οι ιδιοτιμές του  $\rho$  είναι  $\geq 0$ . Αυτό προκύπτει ως εξής: Αφού ο τελεστής  $\hat{\rho}$  είναι ερμιτιανός, υπάρχει μία πλήρης βάση  $\{\Phi_n(\vec{r})\}$  στην οποία ο πίνακας  $\rho$  είναι διαγώνιος. Αφού ο τελεστής  $\hat{\rho}$  είναι ερμιτιανός, οι ιδιοτιμές του πρέπει να είναι πραγματικές. Από την ιδιότητα (2) γνωρίζουμε ότι αυτές οι ιδιοτιμές, οι οποίες είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $\rho$  στη βάση  $\{\Phi_n(\vec{r})\}$ , αντιπροσωπεύουν πιθανότητες, οπότε θα είναι όχι μόνο πραγματικές αλλά και θετικές ή μηδενικές. Επειδή ο πίνακας  $\rho$  είναι διαγώνιος σε αυτή τη

βάση,  $\rho_{n,n'} = \delta_{n,n'} \varrho_n$ ,  $\varrho_n$  είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή, η οποία από την ιδιότητα (2), είναι και η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στη βασική κατάσταση  $n$ .

(6)  $\text{tr}(\rho^2) \leq 1$ . Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Αφού το ίχνος δεν εξαρτάται από τη βάση στην οποία το υπολογίζουμε, ας το υπολογίσουμε στη βάση όπου ο πίνακας  $\rho$  είναι διαγώνιος,  $\{\Phi_n(\vec{r})\}$ . Οπότε,  $\text{tr}(\rho^2) = \sum_n \varrho_n^2$ . Τα  $\varrho_n$  όμως είναι πιθανότητες, οπότε  $0 \leq \varrho_n \leq 1$ , άρα  $\sum_n \varrho_n^2 \leq (\sum_n \varrho_n)^2 = (\text{tr}(\rho))^2 = 1^2 = 1$ .

(7) Όταν το σύστημα βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση, τότε  $\text{tr}(\rho^2) = 1$ . Αυτό ισχύει λόγω της ιδιότητας (1). Δηλαδή για καθαρή κατάσταση, ισχύει η Εξ. 6.14

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi|,$$

οπότε

$$\hat{\rho}^2 = |\Psi\rangle \langle\Psi|\Psi\rangle \langle\Psi| = |\Psi\rangle \langle\Psi| = \hat{\rho},$$

οπότε,  $\text{tr}(\rho^2) = \text{tr}(\rho) = 1$ , λόγω της ιδιότητας (3). Έτσι, η τιμή του  $\text{tr}(\rho^2)$  μας λέει αν το σύστημα βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση ( $\text{tr}(\rho^2) = 1$ ) ή σε μικτή κατάσταση ( $\text{tr}(\rho^2) < 1$ ).

Τέλος, χρειαζόμαστε κάτι ανάλογο με την εξίσωση Schrödinger. Όταν βρισκόμαστε σε καθαρή κατάσταση, η εξίσωση Schrödinger μας επιτρέπει να βρισκουμε την κυματοσυνάρτηση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, εφ' όσον τη γνωρίζουμε κατά την αρχική χρονική στιγμή. Θα επιθυμούσαμε μια παρόμοια εξίσωση που να μας δίνει τον  $\hat{\rho}(t)$ , εάν γνωρίζουμε τον  $\hat{\rho}(0)$ . Αυτή η εξίσωση ονομάζεται [εξίσωση Liouville-von Neumann](#) και είναι η

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)], \quad (6.22)$$

όπου το  $[\ , \ ]$  δηλώνει μεταθέτη και  $\hat{H}$  είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος. Δείτε παρακάτω τις Εξ. 6.33 ή 6.41. Πρέπει να προσέξουμε ότι για να χρησιμοποιηθεί θα πρέπει να υπάρχει Χαμιλτονιανή του συστήματος (δηλαδή το σύστημα να είναι απομονωμένο). Εάν το σύστημα αλληλεπιδρά με δεξιαμενή, τότε πρέπει να συμπεριλάβουμε το αποτέλεσμα της αλληλεπιδράσεως στην εξέλιξη του τελεστή πυκνότητας. Δείτε για παράδειγμα την Εξ. 6.55.

### 6.3 Πίνακας πυκνότητας και τελεστής πυκνότητας σε καθαρή κατάσταση δισταθμικού συστήματος.

Κατά τους συμβολισμούς που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, η κατάσταση ενός δισταθμικού συστήματος μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t)|\downarrow\rangle + c_2(t)|\uparrow\rangle = c_1(t)|\Phi_1\rangle + c_2(t)|\Phi_2\rangle, \quad (6.23)$$

ή, πολλαπλασιάζοντας με  $\langle\vec{r}|\,$

$$\langle\vec{r}|\Psi(t)\rangle = c_1(t)\langle\vec{r}|\downarrow\rangle + c_2(t)\langle\vec{r}|\uparrow\rangle = c_1(t)\langle\vec{r}|\Phi_1\rangle + c_2(t)\langle\vec{r}|\Phi_2\rangle,$$

παίρνουμε στην αναπαράσταση θέσεως

$$\Psi(\vec{r}, t) = c_1(t)\Phi_1(\vec{r}) + c_2(t)\Phi_2(\vec{r}). \quad (6.24)$$

Έτσι, η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στη θεμελιώδη ή στη διεγερμένη στάθμη εκφράζεται από τα

$$\boxed{|c_1(t)|^2 = c_1(t)c_1(t)^* \quad \text{και} \quad |c_2(t)|^2 = c_2(t)c_2(t)^*} \quad (6.25)$$

Ας υπολογίσουμε τη μέση τιμή της διπολικής ροπής στην κατάσταση 6.24. Επειδή  $\hat{p} = -e\vec{r} = -e\vec{r}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \langle\hat{p}\rangle &= \int dV (c_1(t)^*\Phi_1(\vec{r})^* + c_2(t)^*\Phi_2(\vec{r})^*) (-e\vec{r}) (c_1(t)\Phi_1(\vec{r}) + c_2(t)\Phi_2(\vec{r})) = \\ &|c_1(t)|^2 \int dV \Phi_1(\vec{r})^* (-e\vec{r})\Phi_1(\vec{r}) + c_1(t)^*c_2(t) \int dV \Phi_1(\vec{r})^* (-e\vec{r})\Phi_2(\vec{r}) + \\ &c_2(t)^*c_1(t) \int dV \Phi_2(\vec{r})^* (-e\vec{r})\Phi_1(\vec{r}) + |c_2(t)|^2 \int dV \Phi_2(\vec{r})^* (-e\vec{r})\Phi_2(\vec{r}). \end{aligned}$$

Άρα

$$\langle\hat{p}\rangle = c_1(t)^*c_2(t)\vec{p}_{12} + c_2(t)^*c_1(t)\vec{p}_{21} \quad (6.26)$$

διότι

$$\int dV \Phi_1(\vec{r})^* (-e\vec{r})\Phi_1(\vec{r}) = 0 \quad \text{και} \quad \int dV \Phi_2(\vec{r})^* (-e\vec{r})\Phi_2(\vec{r}) = 0$$

ενώ

$$\begin{aligned}\vec{p}_{12} &= \int dV \Phi_1(\vec{r})^* (-e\vec{r}) \Phi_2(\vec{r}) \\ \vec{p}_{21} &= \int dV \Phi_2(\vec{r})^* (-e\vec{r}) \Phi_1(\vec{r}).\end{aligned}$$

Κι επειδή

$$\vec{p}_{21} = \vec{p}_{12}^*,$$

η μέση τιμή της διπολικής ροπής  $\langle \hat{p} \rangle$  είναι πραγματικός αριθμός, ως άθροισμα δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Στην Εξ. 6.26 εμφανίστηκαν οι ποσότητες

$$\boxed{c_1(t)^* c_2(t) \quad \text{και} \quad c_2(t)^* c_1(t)} \quad (6.27)$$

Η Εξ. 6.25 είναι οι “διαγώνιοι όροι” και η Εξ. 6.27 είναι οι “μη διαγώνιοι όροι” του, στη συγκεκριμένη περίπτωση  $2 \times 2$ , πίνακα πυκνότητας. Είναι

$$\boxed{\rho = \begin{bmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}} \quad (6.28)$$

όπου παραλείψαμε, διότι εννοείται, την εξάρτηση από το χρόνο. Δηλαδή το στοιχείο πίνακα του πίνακα πυκνότητας είναι το

$$\boxed{\rho_{nm} := c_n c_m^*} \quad (6.29)$$

Κι επειδή μπορούμε να αναπαραστήσουμε

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

και

$$\langle \Psi| = [c_1^* \quad c_2^*] \quad (6.31)$$

$$|\Psi\rangle \langle \Psi| = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} [c_1^* \quad c_2^*] = \begin{bmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* \end{bmatrix} = \rho \quad (6.32)$$

## 6.4 Η χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας: η εξίσωση von Neumann.

Η εξίσωση von Neumann ή αλλιώς εξίσωση Liouville-von Neumann περιγράφει τη χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας. Έχει τη μορφή

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (6.33)$$

όπου το  $[\cdot, \cdot]$  δηλώνει μεταθέτη.

Ας αποδείξουμε τώρα την Εξ. 6.33. Από την Εξ. 6.29 προκύπτει ο ρυθμός μεταβολής ενός στοιχείου του πίνακα πυκνότητας

$$\dot{\rho}_{nm} = \dot{c}_n c_m^* + c_n \dot{c}_m^*. \quad (6.34)$$

Εννοείται ότι τα  $c_n^*$  και  $\dot{c}_n$  μπορούν να πραγματοποιηθούν με οιαδήποτε σειρά, διότι αν π.χ.  $z = \alpha + i\beta$ ,  $z \in \mathcal{C}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ , τότε  $z^* = \alpha - i\beta$ ,  $\dot{z} = \dot{\alpha} + i\dot{\beta}$ , και  $\dot{z}^* = \dot{\alpha} - i\dot{\beta} = \dot{z}^*$ . Από την εξίσωση Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t)$$

και την Εξ. 6.24, προκύπτει

$$i\hbar \dot{c}_n = \sum_k c_k H_{nk} \quad (6.35)$$

Χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του στοιχείου πίνακα ενός τελεστή (Εξ. 3.30) και την ορθοκανονικότητα των  $\Phi_k(\vec{r})$ , δηλαδή ότι  $\int dV \Phi_n(\vec{r})^* \Phi_k(\vec{r}) = \delta_{nk}$ . Οπότε,

$$-i\hbar \dot{c}_n^* = \sum_k c_k^* H_{nk}^*. \quad (6.36)$$

$H_{nk}^* = H_{kn}$ , αφού η Χαμιλτονιανή είναι ερμιτιανός τελεστής. Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει η χρονική εξέλιξη του στοιχείου πίνακα του πίνακα πυκνότητας

$$\boxed{i\hbar \dot{\rho}_{nm} = \sum_k (H_{nk} \rho_{km} - \rho_{nk} H_{km})} \quad (6.37)$$

Σε λίγο διαφορετική διατύπωση, αν πάρουμε τη χρονική εξέλιξη στο γενικό ορισμό (Εξ. 6.14), προκύπτει

$$\dot{\rho} = |\dot{\Psi}\rangle \langle \Psi| + |\Psi\rangle \langle \dot{\Psi}|, \quad (6.38)$$

ενώ από την εξίσωση Schrödinger

$$i\hbar|\dot{\Psi}\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle \quad (6.39)$$

προκύπτει

$$-i\hbar\langle\dot{\Psi}| = \langle\Psi|\hat{H}^\dagger. \quad (6.40)$$

$\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ , αφού η Χαμιλτονιανή είναι ερμιτιανός τελεστής. Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει η χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας

$$i\hbar\dot{\rho} = \hat{H}|\Psi\rangle\langle\Psi| - |\Psi\rangle\langle\Psi|\hat{H} = \hat{H}\rho - \rho\hat{H},$$

ήτοι συνοπτικότερα,

$$\boxed{i\hbar\dot{\rho} = [\hat{H}, \rho]} \quad (6.41)$$

που είναι η Εξ. 6.33.

Ας σημειωθεί ότι κατά τον ορισμό του στοιχείου πίνακα ενός τελεστή (Εξ. 3.30)

$$H_{nk} = \int dV \Phi_n(\vec{r})^* \hat{H} \Phi_k(\vec{r}). \quad (6.42)$$

Ας πούμε ότι έχουμε μια Χαμιλτονιανή διαταραγμένου δισταθμικού συστήματος όπως στην Εξ. 3.21

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t),$$

όπου  $U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  είναι η δυναμική ενέργεια της διαταραχής και  $\hat{H}_0$  είναι η Χαμιλτονιανή του αδιατάρακτου δισταθμικού συστήματος. Τότε, από την Εξ. 6.42 και την Εξ. 3.21, προκύπτει

$$\begin{aligned} H_{nk} &= \int dV \Phi_n(\vec{r})^* \hat{H}_0 \Phi_k(\vec{r}) + \int dV \Phi_n(\vec{r})^* U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r}) \Rightarrow \\ H_{nk} &= E_k \delta_{nk} + U_{\mathcal{E}nk}(t). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Αν συνδυάσουμε τις Εξ. 6.35 και 6.43, προκύπτει

$$i\hbar\dot{c}_n = c_n E_n + \sum_k c_k U_{\mathcal{E}nk}(t) \quad (6.44)$$

Σε δισταθμικό σύστημα, κι αν έχουμε προσέγγιση διπόλου οπότε τα διαγώνια  $U_{\mathcal{E}kk}(t)$  μηδενίζονται (Ενότητα 3.3, Εξ. 3.45), προκύπτουν

$$i\hbar\dot{c}_1 = E_1 c_1 + U_{\mathcal{E}12}(t) c_2, \quad (6.45)$$

$$i\hbar\dot{c}_2 = E_2 c_2 + U_{\mathcal{E}21}(t) c_1. \quad (6.46)$$

Για πραγματικές  $\Phi_k(\vec{r})$ ,  $U_{\mathcal{E}21}(t) = U_{\mathcal{E}12}(t)$ .

## 6.5 Η χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας με μηχανισμούς αποδιεγέρσεως.

Οι Εξ. 6.45 και 6.46 που μόλις βρήκαμε στην Ενότητα 6.4 μπορούν να τροποποιηθούν ώστε να συμπεριληφθούν οι αποδιεγέρσεις των ενεργειακών σταθμών 1 και 2, οι οποίες μπορεί να οφείλονται είτε σε αυθόρμητη εκπομπή είτε σε άλλους πιθανούς μηχανισμούς όπως π.χ. σε συγκρούσεις με τα άτομα του αερίου μίγματος σε ένα laser αερίου. Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 5, η γρήγορη αποδιέγερση της κατώτερης στάθμης (1) συμβάλει στην επίτευξη αναστροφής πληθυσμού. Μάλιστα είδαμε (Εξ. 5.42) ότι για τη λειτουργία ενός laser θα πρέπει ο χρόνος ζωής της ανώτερης στάθμης (2) να είναι μεγαλύτερος του χρόνου ζωής της κατώτερης στάθμης (1), ήτοι  $t_2 > t_1$ . Η συμπερίληψη των αποδιεγέρσεων των ενεργειακών σταθμών 1 και 2 γίνεται προσθέτοντας στη Χαμιλτονιανή του διαταραγμένου δισταθμικού συστήματος, δηλαδή στην Εξ. 3.21, τον όρο

$$-\frac{i\hbar}{2}\hat{\Gamma}, \quad (6.47)$$

όπου ο τελεστής  $\hat{\Gamma}$  έχει την ιδιότητα  $\hat{\Gamma}\Phi_k(\vec{r}) = \gamma_k\Phi_k(\vec{r})$ ,  $\gamma_k \in \mathbb{R}$ . Δηλαδή

$$\Gamma_{nk} = \gamma_k\delta_{nk} \quad (6.48)$$

ή σε μορφή πίνακα

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Έτσι η Χαμιλτονιανή γίνεται

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{i\hbar}{2}\hat{\Gamma} + U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t). \quad (6.50)$$

Τότε η Εξ. 6.43 τροποποιείται σε

$$H_{nk} = E_k\delta_{nk} + U_{\mathcal{E}nk}(t) - \frac{i\hbar}{2}\gamma_k\delta_{nk}. \quad (6.51)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την Εξ. 6.35 και την Εξ. 6.51 λαμβάνουμε

$$i\hbar\dot{c}_n = c_n E_n + \sum_k c_k U_{\mathcal{E}nk}(t) - \frac{i\hbar}{2}c_n\gamma_n \quad (6.52)$$

Επομένως, αν λάβουμε υπ' όψιν τους μηχανισμούς αποδιεγέρσεως, σε δισταθμικό σύστημα, οι Εξ. 6.45 και 6.46 αντικαθίστανται από τις

$$i\hbar\dot{c}_1 = E_1c_1 + U_{\varepsilon_{12}}(t)c_2 - \frac{i\hbar}{2}\gamma_1c_1, \quad (6.53)$$

$$i\hbar\dot{c}_2 = E_2c_2 + U_{\varepsilon_{21}}(t)c_1 - \frac{i\hbar}{2}\gamma_2c_2. \quad (6.54)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. 6.53 και 6.54, και υποθέτοντας ότι  $U_{\varepsilon_{21}}(t) = U_{\varepsilon_{12}}(t)$ , μπορεί να αποδειχθεί ότι η χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας με μηχανισμούς αποδιεγέρσεως, δίνεται από την εξίσωση

$$\boxed{i\hbar\dot{\rho} = [\hat{H}, \rho] - \frac{i\hbar}{2}\{\hat{\Gamma}, \rho\}} \quad (6.55)$$

Υπενθυμίζεται ότι  $[ , ]$  σημαίνει μεταθέτης και  $\{ , \}$  αντιμεταθέτης.

## 6.6 Αναφορές 6ου Κεφαλαίου.

Η αρίθμηση αναφέρεται στη βιβλιογραφία όπως αυτή παρατίθεται συνολικά πριν από τα Παραρτήματα.

[50] M.I. Berciu, Notes on Statistical Mechanics (2007), Department of Physics and Astronomy, University of British Columbia, Vancouver, Canada.

[51] J. von Neumann, Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik, Gottinger Nachrichten 1 (1927) 245-272.

[52] L. Landau, Das Dampfungproblem in der Wellenmechanik, Zeitschrift für Physik 45 (1927) 430-441.

[53] U. Fano, Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques, Reviews of Modern Physics 29 (1957) 74-93.



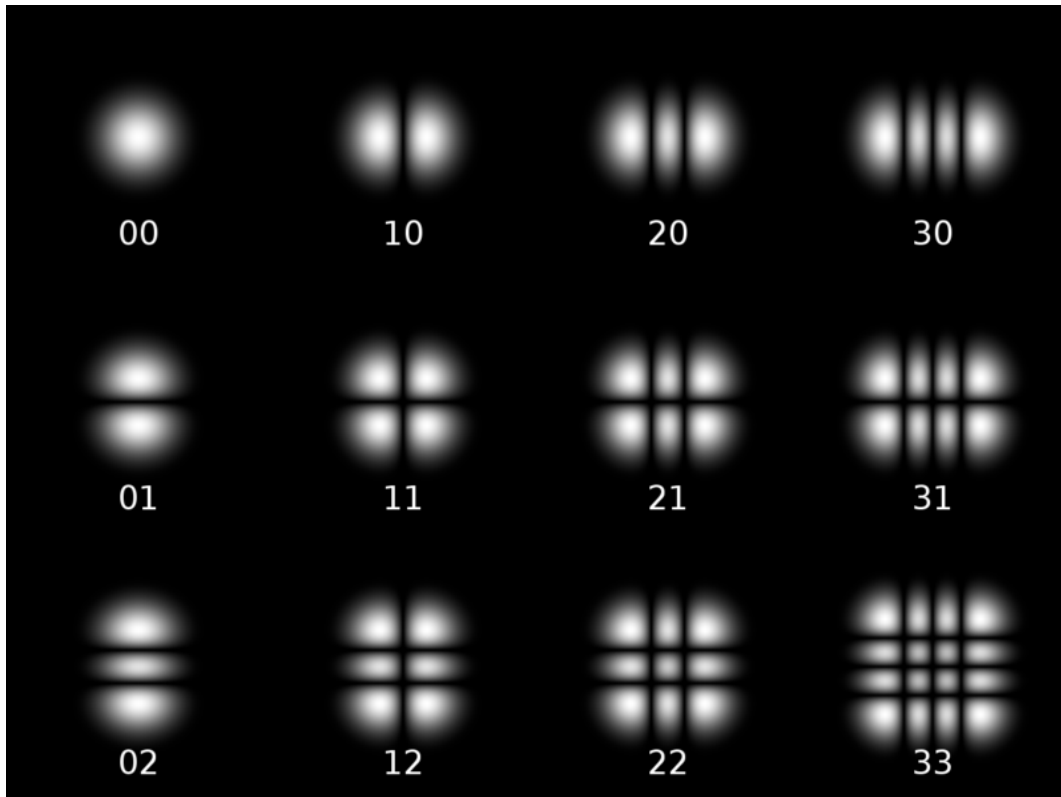
# Κεφάλαιο 7

## ΔΙΑΦΟΡΑ ΑΚΟΜΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΤΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΩΝ Lasers.

### 7.1 Τεχνικές απομόνωσης των $TEM_{00}$ και $TEM_{p'q'}$ ανώτερης τάξεως.

Στο Σχήμα 5.12 παρουσιάζονται οι εγκάρσιοι τρόποι  $TEM_{p'q'}$ . Ας πάρουμε εδώ την περίπτωση της ορθογώνιας παραλληλεπίπεδης κοιλότητας [40], την οποία ξαναπαρουσιάζουμε για διευκόλυνση των αναγνωστών στο Σχήμα 7.1. Παρατηρούμε ότι ο  $TEM_{00}$  είναι περισσότερο συγκεντρωμένος κοντά στον άξονα  $z$  (κεντραρισμένος στο σημείο  $x = y = 0$ ) από τους  $TEM_{p'q'}$  ανώτερης τάξεως: καθώς αυξάνονται οι δείκτες, ο τρόπος καταλαμβάνει μεγαλύτερη έκταση στο επίπεδο  $xy$ . Η πόλωση της δέσμης του φωτός στην έξοδο του laser εξαρτάται από την ανάμιξη των πολώσεων των  $TEM_{p'q'}$  που περιέχει [54]. Η πόλωση της εξερχόμενης δέσμης μπορεί να διορθωθεί με τη βοήθεια ενός παραθύρου σε γωνία Brewster, π.χ. δείτε τις Ενότητες 7.2 και 7.4. Οι  $TEM_{p'q'}$  ανώτερης τάξεως μπορούν να αποκοπούν με την εισαγωγή ενός διαφράγματος στην πορεία της εξερχομένης δέσμης. Το διάφραγμα αυτό ("ίριδα" = οπή μεταβλητού εύρους) κλείνει τόσο ώστε να μην αφήνει να περάσουν οι  $TEM_{p'q'}$  ανώτερης τάξεως που έχουν χωρική έκταση μεγαλύτερη από το εύρος της οπής. Έτσι, μπορούμε να απομονώσουμε ακόμα και μια κηλίδα, δηλαδή τον  $TEM_{00}$ . Ενώ, ανοίγοντας το εύρος του διαφράγματος, διέρχονται και  $TEM_{p'q'}$  ανώτερης τάξεως.

Μπορούμε από την υπέρθεση πολλών  $TEM_{p'q'}$  να απομονώσουμε μόνο έναν, ανώτερης τάξεως, με διάφορα τεχνάσματα. Όπως, π.χ. με ένα πολύ λεπτό νήμα, το οποίο τοποθετείται *οριζόντια*, στο εσωτερικό της κοιλότητας συντονισμού, στο κέντρο της δέσμης laser. Το λεπτό νήμα εισάγει απώλειες λόγω περίθλασης στον



Σχήμα 7.1: Εγκάρσιοι τρόποι  $TEM_{p',q'}$  σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα [40]. Ο  $TEM_{00}$  είναι περισσότερο συγκεντρωμένος κοντά στον άξονα  $z$  από τους  $TEM_{p',q'}$  ανώτερης τάξεως: καθώς αυξάνονται οι δείκτες, οι τρόποι καταλαμβάνουν μεγαλύτερη έκταση στο επίπεδο  $xy$ .

$TEM_{00}$  επειδή αυτός επικεντρώνεται στο  $x = y = 0$ . Έτσι ο  $TEM_{00}$  καταστρέφεται ενώ π.χ. παραμένει ο  $TEM_{01}$ , ο οποίος έχει ένταση μηδέν στη θέση  $x = y = 0$ , οπότε δεν υφίσταται απώλειες. Αν αντιθέτως τοποθετήσουμε το νήμα κατακόρυφα, δεν υφίσταται απώλειες ο  $TEM_{10}$ . Επιπλέον, αν το οριζόντιο νήμα μετατοπιστεί λίγο πάνω, τότε θα βρει τον άνω λοβό του 01, οπότε θα καταστρέψει όλο τον τρόπο 01, ενώ κι αν το οριζόντιο νήμα μετατοπιστεί λίγο κάτω, τότε θα βρει τον κάτω λοβό του 01, οπότε θα καταστρέψει όλο τον τρόπο 01. Αν το κατακόρυφο νήμα μετατοπιστεί λίγο αριστερά, τότε θα βρει τον αριστερό λοβό του 10, οπότε θα καταστρέψει όλο τον τρόπο 10, ενώ κι αν το κατακόρυφο νήμα μετατοπιστεί λίγο δεξιά, τότε θα βρει τον δεξιό λοβό του 10, οπότε θα καταστρέψει όλο τον τρόπο 10. Αυτά συμβαίνουν διότι η αλληλεπίδραση με ένα κομμάτι του τρόπου καταστρέφει όλο τον τρόπο, οι περιοχές όπου η ένταση του τρόπου μηδενίζεται και η περιοχές όπου η ένταση του τρόπου

δεν μηδενίζεται αποτελούν μια αδιάσπαστη ενότητα του τρόπου. Η τοποθέτηση του οριζόντιου νήματος σε ανώτερη ή κατώτερη θέση, οποία καταστρέφει τον 01 αλλά και η τοποθέτηση του κατακόρυφου νήματος σε αριστερότερη ή δεξιότερη θέση, οποία καταστρέφει τον 10, καταστρέφουν και τον 00, αφού η έντασή του είναι παντού μη μηδενική (ο 00 δεν έχει κανένα κόμβο).

Αν μετατοπιστεί λίγο ακόμα το κατακόρυφο νήμα, θα βρεθεί στο σημείο όπου το πεδίο του 02 μηδενίζεται. Ομοίως, αν μετατοπιστεί λίγο ακόμα το οριζόντιο νήμα, θα βρεθεί στο σημείο όπου το πεδίο του 20 μηδενίζεται. Αυτή η νέα θέση του νήματος θα επιτρέψει στον 02 (ή στον 20) να επιζήσει, εφόσον στη νέα θέση έχει μηδενική ένταση και άρα δεν υφίσταται απώλειες λόγω περιθλάσεως από το λεπτό νήμα. Καταστρέφονται όμως οι 01 και 00 (ή οι 10 και 00). Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να απομονωθούν  $TEM_{p,q'}$  ακόμα μεγαλύτερης τάξεως.

## 7.2 Εξισώσεις Fresnel. Γωνία Brewster.

Υπενθυμίζουμε (Ενότητα 1.4) ότι οι Εξ. Maxwell με όρους ολιχού φορτίου και ρεύματος, σε διαφορική μορφή (differential form) και ολοκληρωτική μορφή (integral form), είναι

διαφορική μορφή	ολοκληρωτική μορφή
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\Rightarrow \Phi_{E,S=\partial V} = \oint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{εντός } V}}{\epsilon_0}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\Rightarrow \Phi_{B,S=\partial V} = \oint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{HE}\Delta} = \oint_{L=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t}$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\Rightarrow \oint_{L=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{του διαπερνά την } S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t}$

Μεταβήκαμε από τη μία μορφή στην άλλη χρησιμοποιώντας το θεώρημα Gauss και το θεώρημα Stokes

θεώρημα Gauss	$\oint_{S=\partial V} \vec{\Delta} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\Delta} dV$
θεώρημα Stokes	$\oint_{L=\partial S} \vec{\Delta} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{\Delta} \cdot d\vec{a}$

Υπενθυμίζεται ότι τα διανύσματα  $\vec{D}$  και  $\vec{H}$  συνδέονται με τα διανύσματα  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$ , αντιστοίχως, με τις σχέσεις

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (7.1)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (7.2)$$

Ας υποθέσουμε (Υπόθεση 1) ότι τα  $\epsilon, \mu$  είναι σταθερές και όχι τανυστές.

Ενώ, οι Εξ. Maxwell με όρους ελευθέρου (free, εξ ου ο δείκτης  $f$ ) φορτίου και ρεύματος, σε διαφορική μορφή και ολοκληρωτική μορφή, είναι

$$\begin{array}{ll} \text{διαφορική μορφή} & \text{ολοκληρωτική μορφή} \\ \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f} & \Rightarrow \boxed{\oint_{S=\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} = q_f, \text{ εντός } V} \end{array} \quad (7.3)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \Rightarrow \boxed{\oint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0} \quad (7.4)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{\text{HE}\Delta} = \oint_{L=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t}} \quad (7.5)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \Rightarrow \boxed{\oint_{L=\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{f,\text{που διαπερνά την } S} + \frac{\partial \Phi_{D,S}}{\partial t}} \quad (7.6)$$

Αν δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία και ρεύματα, οι εξισώσεις γίνονται

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \oint_{S=\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (7.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \oint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (7.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \oint_{R=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t} \quad (7.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \oint_{R=\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial \Phi_{D,S}}{\partial t} \quad (7.10)$$

Αν έχουμε μια διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων 1 και 2, τότε **επαναλαμβάνοντας την πορεία που ακολουθήσαμε στην Ενότητα 1.5**, εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss σε στοιχειώδη  $S = \partial V$

$$\oint_{S=\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{D_{1\perp} = D_{2\perp}} \quad (7.11)$$

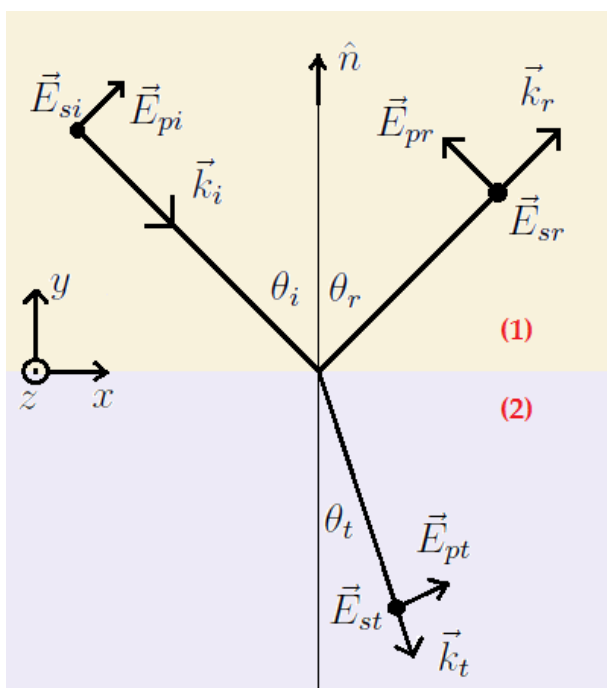
$$\oint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{B_{1\perp} = B_{2\perp}} \quad (7.12)$$

$D_{1\perp}, D_{2\perp}, B_{1\perp}, B_{2\perp}$  είναι οι αλγεβρικές τιμές των καθέτων στην διαχωριστική επιφάνεια συνιστωσών των  $\vec{D}$  ή  $\vec{B}$  στην πλευρά του μέσου 1 ή 2. Δηλαδή προκύπτει ότι τα  $D_{\perp}$  και  $B_{\perp}$  είναι συνεχή στη διεπιφάνεια. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Stokes σε στοιχειώδες  $L = \partial S$

$$\oint_{L=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{E_{1\parallel} = E_{2\parallel}} \quad (7.13)$$

$$\oint_{L=\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial \Phi_{D,S}}{\partial t} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{H_{1\parallel} = H_{2\parallel}} \quad (7.14)$$

$E_{1\parallel}, E_{2\parallel}, H_{1\parallel}, H_{2\parallel}$  είναι οι αλγεβρικές τιμές των παραλλήλων στην διαχωριστική επιφάνεια συνιστωσών των  $\vec{E}$  ή  $\vec{H}$  στην πλευρά του μέσου 1 ή 2. Δηλαδή προκύπτει ότι τα  $E_{\parallel}$  και  $H_{\parallel}$  είναι συνεχή στη διεπιφάνεια.



Σχήμα 7.2: Πρόσπτωση ΗΜ κύματος σε διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων 1 και 2. Επίπεδο προσπτώσεως είναι το επίπεδο που σχηματίζουν το προσπίπτον κυματόνισμα  $\vec{k}_i$  και το κάθετο στη διεπιφάνεια, στο σημείο προσπτώσεως, μοναδιαίο άνυσμα  $\hat{n}$ , δηλαδή εδώ το επίπεδο  $xy$ . Φαίνονται οι γωνίες προσπτώσεως, ανακλάσεως, διαθλάσεως  $\theta_i, \theta_r, \theta_t$ , αντιστοίχως, καθώς και οι  $s$  και  $p$  συνιστώσες του προσπίπτοντος, ανακλωμένου, διαθλωμένου ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}_{si}, \vec{E}_{pi}, \vec{E}_{sr}, \vec{E}_{pr}, \vec{E}_{st}, \vec{E}_{pt}$ , αντιστοίχως.

Ας θεωρήσουμε τώρα την πρόσπτωση ενός ΗΜ κύματος σε μια **διεπιφάνεια** δηλαδή μια διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων 1 και 2 (Σχήμα 7.2) και ότι δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία ή ρεύματα, οπότε ισχύουν οι Εξ. 7.7, 7.8, 7.9, 7.10 καθώς και

οι Εξ. 7.11, 7.12, 7.13, 7.14. Περαιτέρω, ας ονομάσουμε  $q$  το επίπεδο προσπτώσεως, δηλαδή το επίπεδο που σχηματίζουν το προσπίπτον κυματόνισμα (incident wave vector)  $\vec{k}_i$  και το κάθετο στη διεπιφάνεια, στο σημείο προσπτώσεως, μοναδιαίο άνωσμα  $\hat{n}$ . Στο Σχήμα 7.2 είναι το επίπεδο  $xy$ . Παρεμπιπτόντως, ας ονομάσουμε  $\vec{k}_r$  το ανακλώμενο κυματόνισμα (reflected wave vector) και  $\vec{k}_t$  το διερχόμενο (transmitted) ή διαθλώμενο (refracted) κυματόνισμα. Η πόλωση ενός ΗΜ κύματος που προσπίπτει σε μια διαχωριστική επιφάνεια χαρακτηρίζεται από τη διεύθυνση του  $\vec{E}$  ως προς το  $q$ . Συγκεκριμένα, η πόλωση χαρακτηρίζεται ως  $s$  ή  $p$  από τις γερμανικές λέξεις senkrecht=κάθετος ή parallel, αντιστοίχως, αναλόγως με το αν το  $\vec{E}$  είναι κάθετο ή παράλληλο στο επίπεδο  $q$ . Σχηματικά, αν ταυτίσουμε το επίπεδο προσπτώσεως με το επίπεδο της σελίδας,

- ⊙  $\vec{E}$  πόλωση  $s$  ( $\vec{E} \perp q$ ) πόλωση TE (transverse electric)
- ↗  $\vec{E}$  πόλωση  $p$  ( $\vec{E} \in q$ ) πόλωση TM (transverse magnetic)

Παρακάτω θα εξετάσουμε ξεχωριστά την πρόσπτωση ΗΜ κύματος σε διαχωριστική επιφάνεια δύο υλικών είτε για την περίπτωση της πολώσεως TE ή αλλιώς πολώσεως  $s$  είτε για την περίπτωση της πολώσεως TM ή αλλιώς πολώσεως  $p$ . Πριν προχωρήσουμε, υπενθυμίζεται ότι  $\vec{E} \times \vec{B} \parallel \vec{k}$ . Με το δείκτη  $\perp$  δηλώνουμε συνιστώσα πεδίου κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια και με το δείκτη  $\parallel$  δηλώνουμε συνιστώσα παράλληλη στη διαχωριστική επιφάνεια.

Στο Σχήμα 7.3 αριστερά παρουσιάζεται η **πόλωση TE ή αλλιώς πόλωση  $s$** , δηλαδή η κατάσταση όπου  $\vec{E} \perp q$ . Από την Εξ. 7.1, επειδή  $\vec{E} \perp q \Rightarrow \vec{D} \perp q$ . Τότε,

Συνθήκη Συνέχειας  $D_{\perp}$  (Εξ. 7.11)  $\Rightarrow$  τίποτε ( $\nexists$  τέτοιες συνιστώσες για πόλωση  $s$ )

Συνθήκη Συνέχειας  $B_{\perp}$  (Εξ. 7.12)  $\Rightarrow -B_i \sin \theta_i - B_r \sin \theta_r = -B_t \sin \theta_t$

Συνθήκη Συνέχειας  $E_{\parallel}$  (Εξ. 7.13)  $\Rightarrow E_r + E_i = E_t$

Συνθήκη Συνέχειας  $H_{\parallel}$  (Εξ. 7.14)  $\Rightarrow -\frac{B_i \cos \theta_i}{\mu_0 \mu_1} + \frac{B_r \cos \theta_r}{\mu_0 \mu_1} = -\frac{B_t \cos \theta_t}{\mu_0 \mu_2}$

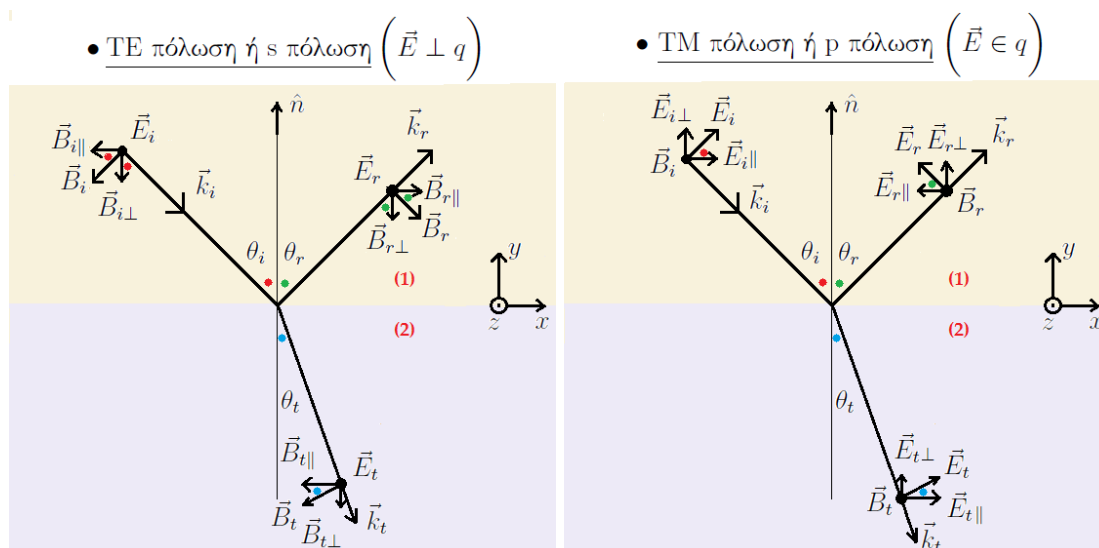
Στο Σχήμα 7.3 δεξιά παρουσιάζεται η **πόλωση TM ή αλλιώς πόλωση p**, δηλαδή η κατάσταση όπου  $\vec{E} \in q$ , οπότε  $\vec{B} \perp q$ .

Συνθήκη Συνέχειας  $D_{\perp}$  (Εξ. 7.11)  $\Rightarrow \varepsilon_1(E_i \sin \theta_i + E_r \sin \theta_r) = \varepsilon_2 E_t \sin \theta_t$

Συνθήκη Συνέχειας  $B_{\perp}$  (Εξ. 7.12)  $\Rightarrow$  τίποτε ( $\nexists$  τέτοιες συνιστώσες για πόλωση p)

Συνθήκη Συνέχειας  $E_{\parallel}$  (Εξ. 7.13)  $\Rightarrow E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t$

Συνθήκη Συνέχειας  $H_{\parallel}$  (Εξ. 7.14)  $\Rightarrow \frac{B_i}{\mu_0 \mu_1} + \frac{B_r}{\mu_0 \mu_1} = \frac{B_t}{\mu_0 \mu_2}$



Σχήμα 7.3: **Αριστερά:** πόλωση TE ή αλλιώς πόλωση s ( $\vec{E} \perp q$ ). Φαίνονται τα  $\vec{E}_i, \vec{E}_r, \vec{E}_t, \vec{B}_i, \vec{B}_{i\perp}, \vec{B}_{i\parallel}, \vec{B}_r, \vec{B}_{r\perp}, \vec{B}_{r\parallel}, \vec{B}_t, \vec{B}_{t\perp}, \vec{B}_{t\parallel}$ . **Δεξιά:** πόλωση TM ή αλλιώς πόλωση p ( $\vec{E} \in q$ ). Φαίνονται τα  $\vec{B}_i, \vec{B}_r, \vec{B}_t, \vec{E}_i, \vec{E}_{i\perp}, \vec{E}_{i\parallel}, \vec{E}_r, \vec{E}_{r\perp}, \vec{E}_{r\parallel}, \vec{E}_t, \vec{E}_{t\perp}, \vec{E}_{t\parallel}$ . Ο δείκτης  $\perp$  σημαίνει συνιστώσα κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια και ο δείκτης  $\parallel$  συνιστώσα παράλληλη στη διαχωριστική επιφάνεια. Με τις χρωματιστές βούλες δηλώνονται ίσες γωνίες.

Έστω ότι  $c_0$  είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό και  $c$  η ταχύτητα του φωτός εντός κάποιου υλικού, ενώ  $n$  είναι ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού. Τότε

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E}{B} = c \\ n = \frac{c_0}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow B = n \frac{E}{c_0}. \quad (7.15)$$



Ας υποθέσουμε ότι (Υπόθεση 2) κατά την αλλαγή υλικών και κατά τη διέλευση μέσω υλικού δεν αλλάζει η συχνότητα  $\nu$  του ΗΜ κύματος. Λόγω του θεμελιώδους νόμου της κυματικής

$$c = \lambda\nu = \frac{2\pi}{k}\nu, \quad (7.16)$$

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{2\pi\nu|\vec{k}|}{|\vec{k}_0|2\pi\nu} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |\vec{k}_i| = n_i|\vec{k}_0| \\ |\vec{k}_r| = n_r|\vec{k}_0| \\ |\vec{k}_t| = n_t|\vec{k}_0| \\ n_1 = n_i = n_r \\ n_2 = n_t \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} |\vec{k}_i| = n_1|\vec{k}_0| \\ |\vec{k}_r| = n_1|\vec{k}_0| \\ |\vec{k}_t| = n_2|\vec{k}_0| \end{array}} \quad (7.17)$$

Αν τα πλάτη είναι σταθερά, τότε στην πόλωση TE, η συνέχεια της  $E_{\parallel}$ , δηλαδή η σχέση  $E_r + E_i = E_t$ , συνεπάγεται

$$\left. \begin{array}{l} E_{0r}e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} + E_{0i}e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} = E_{0t}e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)} \\ \forall t, \forall \vec{r} \text{ στη διεπιφάνεια} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t = \vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t = \vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t} \quad (7.18)$$

ήτοι καταλήγουμε σε μια συνθήκη ταιριάσματος φάσεων (phase matching condition). Ενώ, αν τα πλάτη είναι σταθερά στην πόλωση TM, η συνέχεια της  $H_{\parallel}$ , δηλαδή η σχέση  $\frac{B_i}{\mu_0\mu_1} + \frac{B_r}{\mu_0\mu_1} = \frac{B_t}{\mu_0\mu_2}$  συνεπάγεται, παρομοίως, την Εξ. 7.18. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την Υπόθεση 2 συνάγεται ότι  $\omega_r = \omega_i = \omega_t$ , άρα

$$\boxed{\vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}} \quad (7.19)$$

Ας κοιτάξουμε το Σχήμα 7.3, ας θυμηθούμε την Εξ. 7.17. Τότε,  $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} \Rightarrow$

$$|\vec{k}_i||\vec{r}|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = |\vec{k}_r||\vec{r}|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_r\right) \Rightarrow n_1|\vec{k}_0|\sin\theta_i = n_1|\vec{k}_0|\sin\theta_r \Rightarrow \boxed{\theta_r = \theta_i} \quad (7.20)$$

που είναι ο νόμος της ανακλάσεως (reflection law). Ακόμα,  $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r} \Rightarrow$

$$|\vec{k}_i||\vec{r}|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = |\vec{k}_t||\vec{r}|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_t\right) \Rightarrow n_1|\vec{k}_0|\sin\theta_i = n_2|\vec{k}_0|\sin\theta_t \Rightarrow \boxed{n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t} \quad (7.21)$$

που είναι ο νόμος της διαθλάσεως (refraction law).

Τα  $t_{TE}, r_{TE}$  και  $t_{TM}, r_{TM}$  που ορίζονται λίγο παρακάτω (Εξ. 7.22, 7.24 και Εξ. 7.31, 7.33) είναι απλώς πηλίκα πλατών και όχι ανακλαστικότητα ή ανακλασιμότητα (reflectance,  $R$ ) ή διαπερατότητα ή διελευσιμότητα (transmittance,  $T$ ). Τα δύο τελευταία ορίζονται στις Εξ. 7.54.

**Ας εξετάσουμε λεπτομερέστερα την πόλωση TE**, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που βρήκαμε λίγο πριν. Θα υποθέσουμε ότι τα υλικά μας είναι μη μαγνητικά, δηλαδή  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} E_r + E_i = E_t \\ \frac{B_i \cos \theta_i}{\mu_0 \mu_1} - \frac{B_r \cos \theta_r}{\mu_0 \mu_1} = \frac{B_t \cos \theta_t}{\mu_0 \mu_2} \\ \mu_1 = \mu_2 = 1 \\ B = n \frac{E}{c_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_r + E_i = E_t \\ n_1 E_i \cos \theta_i - n_1 E_r \cos \theta_r = n_2 E_t \cos \theta_t \\ n := \frac{n_2}{n_1} \text{ (ο σχετικός δείκτης διαθλάσεως)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} E_r + E_i = E_t \\ E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r = n E_t \cos \theta_t \end{array} \right\} \xrightarrow{\theta_i = \theta_r} \left. \begin{array}{l} E_r + E_i = E_t \\ E_i - E_r = \frac{n E_t \cos \theta_t}{\cos \theta_i} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{( προσθέτοντας κατά μέλη ) } 2E_i = E_t \left( 1 + \frac{n \cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right)$$

$$\boxed{t_{TE} := \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}} \quad (7.22)$$

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad \text{ή} \quad \sin \theta_i = n \sin \theta_t$$

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n^2}}$$

$$t_{TE} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n^2}}}$$

$$\boxed{t_{TE} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}} \quad (7.23)$$

$$\left. \begin{aligned} E_t &= E_i + E_r = \frac{(E_i - E_r) \cos \theta_i}{n \cos \theta_t} \\ E_r \left( 1 + \frac{\cos \theta_i}{n \cos \theta_t} \right) &= E_i \left( \frac{\cos \theta_i}{n \cos \theta_t} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{r_{TE} := \frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos \theta_i - n \cos \theta_t}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}} \quad (7.24)$$

$$\boxed{r_{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}} \quad (7.25)$$

Άρα, οι Εξ. 7.23 και 7.25 οδηγούν στο συμπέρασμα

$$\boxed{t_{TE} = r_{TE} + 1} \quad (7.26)$$

Αν θέλουμε να μην υπάρχει ανάκλαση TE, πρέπει  $r_{TE} = 0$ , άρα λόγω της Εξ. 7.24

$$\left. \begin{aligned} n_i \cos \theta_i &= n_t \cos \theta_t \\ \text{αλλά (Εξ. 7.21)} \quad n_i \sin \theta_i &= n_t \sin \theta_t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (7.27)$$

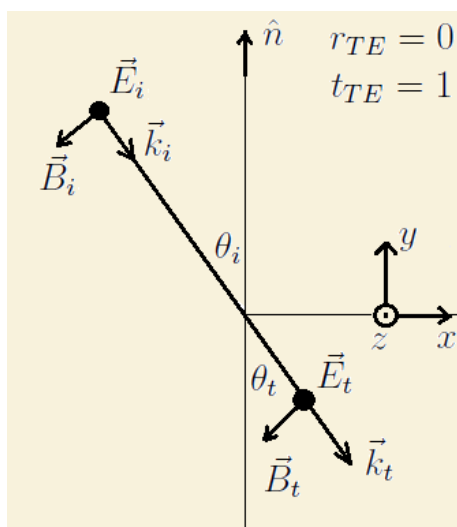
$$\left. \begin{aligned} \tan \theta_i &= \tan \theta_t \\ \text{όμως οι } \theta_i, \theta_t &\text{ είναι οξείες γωνίες} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (7.28)$$

$$\boxed{\theta_t = \theta_i} \quad (7.29)$$

οπότε λόγω των Εξ. 7.27 συνεπάγεται

$$\boxed{n_t = n_i} \quad (7.30)$$

Οι Εξ. 7.29 και 7.30 σημαίνουν ότι το ΗΜ κύμα δεν αλλάζει μέσο διαδόσεως. Δηλαδή πρόκειται για τετριμμένη λύση, σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει διεπιφάνεια. Συμπερασματικά, δεν είναι δυνατόν να μην υπάρχει ανακλώμενη  $s$  πόλωση. Λόγω αυτών, η Εξ. 7.22 δίνει  $t_{TE} = 1$ . Τα  $r_{TE} = 0$ ,  $t_{TE} = 1$  επαληθεύουν την Εξ. 7.26. Δείτε το Σχήμα 7.4.



Σχήμα 7.4: Αν θέλουμε να μην υπάρχει ανάκλαση TE (να μην υπάρχει ανακλώμενη  $s$  πόλωση), το ΗΜ κύμα δεν αλλάζει μέσο διαδόσεως. Δηλαδή πρόκειται για τετριμμένη λύση, σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει διεπιφάνεια. **Συμπέρασμα:** Δεν είναι δυνατόν να μην υπάρχει ανακλώμενη  $s$  πόλωση.

Ας εξετάσουμε λεπτομερέστερα την πόλωση TM, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που βρήκαμε λίγο πριν. Θα υποθέσουμε ότι τα υλικά μας είναι μη μαγνητικά, δηλαδή  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ .

$$\left. \begin{aligned} E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r &= E_t \cos \theta_t \\ \frac{B_i}{\mu_0 \mu_1} + \frac{B_r}{\mu_0 \mu_1} &= \frac{B_t}{\mu_0 \mu_2} \\ \mu_1 &= \mu_2 = 1 \\ B &= n \frac{E}{c_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r &= E_t \cos \theta_t \\ n_1 E_i + n_1 E_r &= n_2 E_t \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \theta_i = \theta_r \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned} E_i - E_r &= E_t \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \\ E_i + E_r &= n E_t \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$(\text{προσθέτοντας κατά μέλη}) \quad 2E_i = E_t \left( n + \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{t_{TM} := \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 \cos \theta_i}{n \cos \theta_i + \cos \theta_t} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}} \quad (7.31)$$

$$\acute{\eta} \quad t_{TM} = \frac{2 \cos \theta_i}{n \cos \theta_i + \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n^2}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{t_{TM} = \frac{2n \cos \theta_i}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}} \quad (7.32)$$

$$\left. \begin{aligned} E_t &= \frac{n \cos \theta_i}{\cos \theta_t} (E_i - E_r) = (E_i + E_r) \\ E_i \left( \frac{n \cos \theta_i}{\cos \theta_t} - 1 \right) &= E_r \left( \frac{n \cos \theta_i}{\cos \theta_t} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{r_{TM} := \frac{E_r}{E_i} = \frac{n \cos \theta_i - \cos \theta_t}{n \cos \theta_i + \cos \theta_t} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}} \quad (7.33)$$

$$\boxed{r_{TM} = \frac{n^2 \cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}} \quad (7.34)$$

Άρα

$$\boxed{r_{TM} - nt_{TM} = -1} \quad (7.35)$$

Αν θέλουμε να μην υπάρχει ανάκλαση TM, πρέπει  $r_{TM} = 0$ , άρα λόγω της Εξ. 7.33

$$\left. \begin{aligned} n_t \cos \theta_i &= n_i \cos \theta_t \\ \text{αλλά (Εξ. 7.21) } n_t \sin \theta_t &= n_i \sin \theta_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{\cos \theta_t}{\sin \theta_i} \Rightarrow \sin 2\theta_t = \sin 2\theta_i \quad (7.36)$$

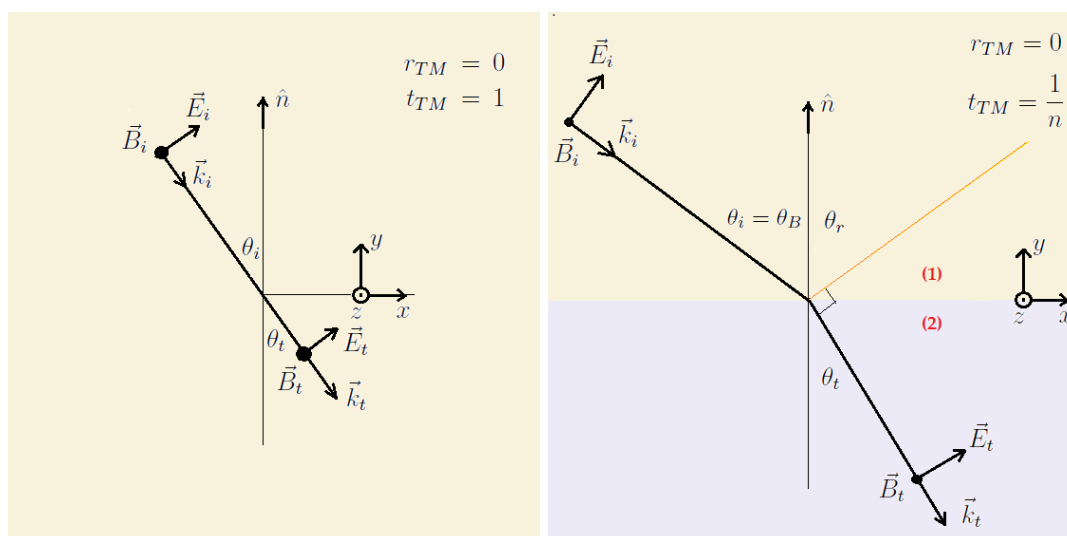
$$\text{Άρα,} \quad (1) \quad 2\theta_t = 2\theta_i \quad \acute{\eta} \quad (2) \quad 2\theta_t = \pi - 2\theta_i$$

**Από την επιλογή (1) προκύπτει**

$$\boxed{\theta_t = \theta_i} \quad (7.37)$$

και λόγω της Εξ. 7.21

$$\boxed{n_t = n_i} \quad (7.38)$$



Σχήμα 7.5: **Αριστερά:** Αν θέλουμε να μην υπάρχει ανάκλαση TM (να μην υπάρχει ανακλώμενη  $p$  πόλωση), η μία περίπτωση (**επιλογή (1)**) είναι το HM κύμα να μην αλλάξει μέσο διαδόσεως. Δηλαδή πρόκειται για τετριμμένη λύση, σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει διεπιφάνεια. Τα  $r_{TM} = 0$ ,  $t_{TM} = 1$ , λόγω της Εξ. 7.38, επαληθεύουν την Εξ. 7.35, δηλαδή  $r_{TM} - nt_{TM} = -1$ . **Δεξιά:** Αν θέλουμε να μην υπάρχει ανάκλαση TM (να μην υπάρχει ανακλώμενη  $p$  πόλωση), στην άλλη περίπτωση (**επιλογή (2)**) η ανακλώμενη δέσμη είναι κάθετη στη διαθλώμενη δέσμη. Όμως, η ανακλώμενη δέσμη, η οποία εδώ σημειώνεται με την πορτοκαλί γραμμή, αφορά την πόλωση TE. Ισχύει  $n = n_t/n_i = \tan\theta_i$  και η γωνία  $\theta_i$  που ικανοποιεί την σχέση αυτή ονομάζεται **γωνία Brewster**,  $\theta_B$ . Δηλαδή,  $\tan\theta_B = n_t/n_i = n$ . Τα  $r_{TM} = 0$ ,  $t_{TM} = 1/n$ , επαληθεύουν την Εξ. 7.35, δηλαδή  $r_{TM} - nt_{TM} = -1$ . **Συμπέρασμα:** Είναι δυνατόν να μην υπάρχει ανακλώμενη πόλωση  $p$  και αυτό συμβαίνει όταν  $\theta_i = \theta_B$ .

Οι Εξ. 7.37-7.38 σημαίνουν ότι το HM κύμα δεν αλλάζει μέσο διαδόσεως. Δηλαδή πρόκειται για τετριμμένη λύση, σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει διεπιφάνεια. Λόγω αυτών, η Εξ. 7.31 δίνει  $t_{TM} = 1$ . Τα  $r_{TM} = 0$ ,  $t_{TM} = 1$ , λόγω της Εξ. 7.38, επαληθεύουν την Εξ. 7.35. Δείτε το Σχήμα 7.5 αριστερά.

**Από την επιλογή (2) προκύπτει**  $\theta_t = \frac{\pi}{2} - \theta_i$  ή  $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ , το οποίο λόγω του νόμου της ανακλάσεως (Εξ. 7.20) οδηγεί στο  $\theta_r + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ . Αν ονομάσουμε  $\lambda$  τη γωνία μεταξύ ανακλωμένης και διαθλωμένης δέσμης, ισχύει  $\theta_r + \lambda + \theta_t = \pi$ . Οπότε,  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ , δηλαδή η ανακλώμενη δέσμη είναι κάθετη στη διαθλώμενη δέσμη. Δείτε το

Σχήμα 7.5 δεξιά.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Λόγω του νόμου της διαθλάσεως (Εξ. 7.21), } n_t \sin \theta_t = n_i \sin \theta_i \\ \text{και της επιλογής (2), } \theta_t = \frac{\pi}{2} - \theta_i \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$n_t \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta_i \right) = n_i \sin \theta_i \Rightarrow \frac{n_t}{n_i} = \frac{\sin \theta_i}{\cos \theta_i} \Rightarrow$$

$$\boxed{n = \frac{n_t}{n_i} = \tan \theta_i} \quad (7.39)$$

Η γωνία  $\theta_i$  που ικανοποιεί την Εξ. 7.39 ονομάζεται **γωνία Brewster**,  $\theta_B$ . (Τα ίδια προκύπτουν και από την  $n_t \cos \theta_i = n_i \cos \theta_t$  των Εξ. 7.36). Τότε η Εξ. 7.31 γίνεται

$$t_{TM} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_t \cos \theta_i + n_i \sin \theta_i} = \frac{2}{n + \tan \theta_i} = \frac{2}{2n} \Rightarrow$$

$$\boxed{t_{TM} = \frac{1}{n}} \quad (7.40)$$

Τα  $r_{TM} = 0$ ,  $t_{TM} = \frac{1}{n}$ , επαληθεύουν την Εξ. 7.35. Δείτε το Σχήμα 7.5 δεξιά. Συμπερασματικά, είναι δυνατόν να μην υπάρχει ανακλώμενη πόλωση  $p$  και αυτό συμβαίνει όταν  $\theta_i = \theta_B$ .

Οι Εξ. 7.22, 7.24, 7.31, 7.33 καθώς και οι ισοδύναμες τους ονομάζονται **εξισώσεις Fresnel** (Fresnel equations). Παρουσιάζονται συνοπτικά εδώ:

$$\boxed{t_{TE} := \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}} \quad (7.41)$$

$$\boxed{r_{TE} := \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}} \quad (7.42)$$

$$\boxed{t_{TM} := \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}} \quad (7.43)$$

$$\boxed{r_{TM} := \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}} \quad (7.44)$$

### 7.3 Ολική εσωτερική ανάκλαση.

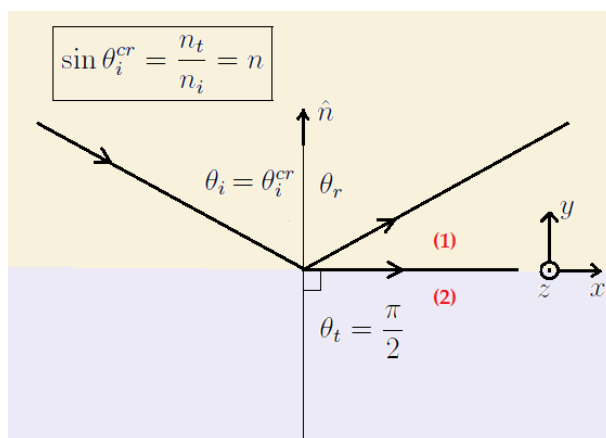
Ας υποθέσουμε ότι  $n_i > n_t$  και ας χρησιμοποιήσουμε τον νόμο της διαθλάσεως (Εξ. 7.21).

$$\left. \begin{array}{l} \text{νόμος διαθλάσεως } n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \\ n_i > n_t \Rightarrow n = \frac{n_t}{n_i} < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sin \theta_i < \sin \theta_t \\ \text{οι } \theta_i, \theta_t \text{ είναι οξείες γωνίες} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_i < \theta_t \quad (7.45)$$

Αλλά, αυξάνοντας την  $\theta_i$  αυξάνεται η  $\theta_t$ , διότι από το νόμο της διαθλάσεως (Εξ. 7.21),  $\nearrow \theta_i \Rightarrow \nearrow \sin \theta_i \Rightarrow \nearrow \sin \theta_t \Rightarrow \nearrow \theta_t$ . Έτσι, αυξάνοντας την  $\theta_i$ , αυξάνεται η  $\theta_t$ , παραμένοντας μεγαλύτερη από την  $\theta_i$  (Εξ. 7.45). Όταν, λοιπόν, η  $\theta_t$  φτάσει στην τιμή  $\frac{\pi}{2}$ , η τιμή της  $\theta_i$  ονομάζεται κρίσιμη γωνία, δηλαδή  $\theta_i^{cr} = \theta_i$ . Τότε θα έχουμε  $n_i \sin \theta_i^{cr} = n_t \sin(\pi/2)$ . Άρα,

$$\boxed{\sin \theta_i^{cr} = \frac{n_t}{n_i} = n} \quad (7.46)$$

Η κατάσταση αυτή όπου η διαθλώμενη ακτίνα εφάπτεται στη διεπιφάνεια, δηλαδή στην ουσία δεν περνά στο άλλο υλικό, ονομάζεται ολική εσωτερική ανάκλαση (total internal reflection). Δείτε το Σχήμα 7.6. Τότε,



Σχήμα 7.6: Ολική εσωτερική ανάκλαση: η διαθλώμενη ακτίνα εφάπτεται στη διεπιφάνεια, δηλαδή στην ουσία δεν περνά στο άλλο υλικό,  $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ . Η τιμή της  $\theta_i$  στην οποία συμβαίνει αυτό ονομάζεται κρίσιμη γωνία, δηλαδή  $\theta_i^{cr} = \theta_i$ . Τότε ισχύει  $\sin \theta_i^{cr} = \frac{n_t}{n_i} = n$ .



$$t_{TE} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} = \frac{2n_i \cos \theta_i^{cr}}{n_i \cos \theta_i^{cr} + n_t \cos \left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2$$

$$r_{TE} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} = \frac{n_i \cos \theta_i^{cr} - n_t \cos \left(\frac{\pi}{2}\right)}{n_i \cos \theta_i^{cr} + n_t \cos \left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

Παρατηρούμε ότι η Εξ. 7.26  $t_{TE} = r_{TE} + 1$  ισχύει, αφού  $2 = 1 + 1$ .

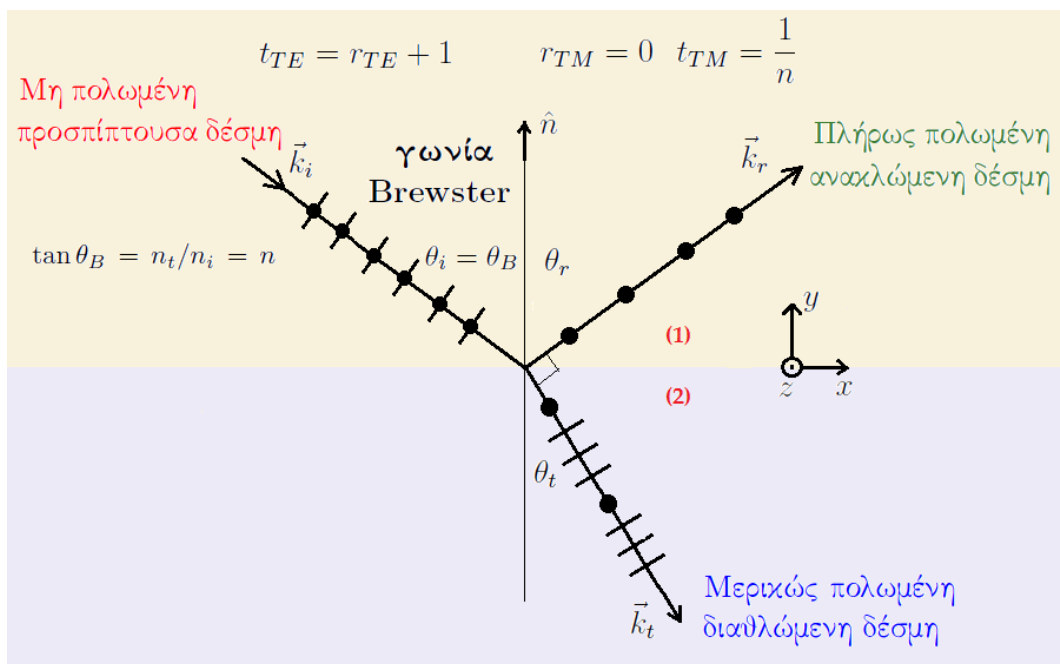
$$t_{TM} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t} = \frac{2n_i \cos \theta_i^{cr}}{n_t \cos \theta_i^{cr} + n_i \cos \left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{n}$$

$$r_{TM} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t} = \frac{n_t \cos \theta_i^{cr} - n_i \cos \left(\frac{\pi}{2}\right)}{n_t \cos \theta_i^{cr} + n_i \cos \left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

Παρατηρούμε ότι η Εξ. 7.35  $r_{TM} - nt_{TM} = -1$  ισχύει, αφού  $1 - n\frac{2}{n} = -1$ .

## 7.4 Εκπομπή πολωμένης δέσμης.

Σύμφωνα με όσα είδαμε στην Ενότητα 7.2, όταν η γωνία προσπτώσεως ισούται με τη γωνία Brewster ( $\theta_i = \theta_B$ ), τότε από **μη πολωμένη προσπίπτουσα δέσμη** προκύπτουν **πλήρως πολωμένη ανακλώμενη δέσμη** και **μερικώς πολωμένη διαθλώμενη δέσμη**. Αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.7. Έτσι, αν στην έξοδο μιας διατάξεως Laser τοποθετηθεί υλικό τέτοιο ώστε η εξερχόμενη δέσμη να προσπίπτει σε αυτό υπό γωνία  $\theta_i = \theta_B$ , τότε, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε είτε την πλήρως πολωμένη ανακλώμενη δέσμη είτε την μερικώς πολωμένη διαθλώμενη δέσμη. Οι τεχνικές λεπτομέρειες μπορεί να είναι διαφορετικές στα διάφορα είδη laser [44], [45], [46].



Σχήμα 7.7: Όταν η γωνία προσπτώσεως ισούται με τη γωνία Brewster ( $\theta_i = \theta_B$ ), τότε από **μη πολωμένη προσπίπτουσα δέσμη** προκύπτουν **πλήρως πολωμένη ανακλώμενη δέσμη** και **μερικώς πολωμένη διαθλώμενη δέσμη**.

## 7.5 Διάνυσμα Poynting.

Το διάνυσμα Poynting ορίζεται ως

$$\boxed{\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H}} \quad (7.47)$$

και από άποψη μονάδων έχουμε

$$[\vec{S}] = [\vec{E}][\vec{H}] = \frac{\text{VA}}{\text{mm}} = \frac{\text{VC}}{\text{m}^2\text{s}} = \frac{\text{joule}}{\text{m}^2\text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

δηλαδή περιγράφει ισχύ ανά μονάδα επιφάνειας.

$$|\vec{S}| = |\vec{E}||\vec{H}| = \frac{|\vec{E}||\vec{B}|}{\mu\mu_0} = \frac{|\vec{E}|^2 n}{\mu\mu_0 c_0} = |\vec{E}|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}{\mu^2\mu_0^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{|\vec{S}| = |\vec{E}|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}} \quad (7.48)$$

Χρησιμοποιήσαμε την

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = c \\ n = \frac{c_0}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow |\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|n}{c_0}.$$

Ακόμα, όπως ίσως θυμόμαστε,

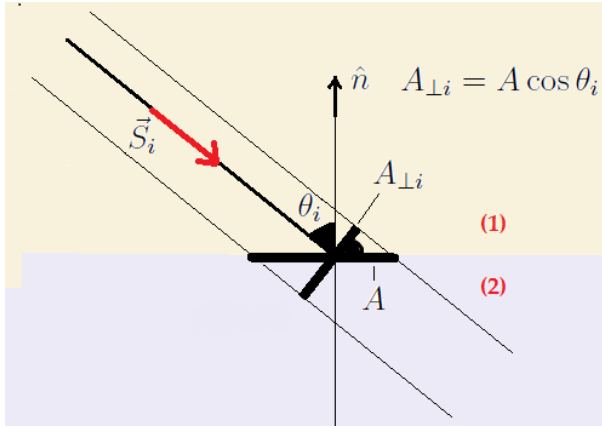
$$\left. \begin{array}{l} c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \\ c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} \end{array} \right\} \Rightarrow n := \frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}{\varepsilon_0\mu_0}} \Rightarrow \boxed{n = \sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τα μέτρα των ανυσμάτων Poynting για την προσπίπτουσα, την ανακλώμενη και τη διαθλώμενη δέσμη, από την Εξ. 7.48.

$$|\vec{S}_i| = |\vec{E}_i|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_i\varepsilon_0}{\mu_i\mu_0}} = |\vec{E}_i|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}} \quad (7.49)$$

$$|\vec{S}_r| = |\vec{E}_r|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}} = |\vec{E}_r|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}} \quad (7.50)$$

$$|\vec{S}_t| = |\vec{E}_t|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_t\varepsilon_0}{\mu_t\mu_0}} = |\vec{E}_t|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\mu_2\mu_0}} \quad (7.51)$$



Σχήμα 7.8: Το διάνυσμα Poynting της προσπίπτουσας δέσμης  $\vec{S}_i$ , ένα κομμάτι της διεπιφάνειας  $A$  και η προβολή του  $A_{\perp i}$  κάθετα στο  $\vec{S}_i$ .  $A_{\perp i} = A \cos \theta_i$ .

Στο Σχήμα 7.8 φαίνεται το διάνυσμα Poynting της προσπίπτουσας δέσμης  $\vec{S}_i$ , ένα κομμάτι της διεπιφάνειας  $A$  και η προβολή του  $A_{\perp i}$  κάθετα στο  $\vec{S}_i$ . Από το Σχήμα φαίνεται ότι  $A_{\perp i} = A \cos \theta_i$ . Παρόμοια ισχύουν και για την ανακλώμενη και την διαθλώμενη δέσμη. Συνοπτικά

$$A_{\perp i} = A \cos \theta_i$$

$$A_{\perp r} = A \cos \theta_r$$

$$A_{\perp t} = A \cos \theta_t$$

Ας ονομάσουμε  $P_i(A_{\perp i})$  την ισχύ που προσπίπτει στην επιφάνεια  $A_{\perp i}$  κ.ο.κ. κι ας θυμηθούμε ότι το διάνυσμα Poynting περιγράφει ισχύ ανά μονάδα επιφάνειας. Τότε

$$|\vec{S}_i| = \frac{P_i(A_{\perp i})}{A_{\perp i}} \Rightarrow P_i(A_{\perp i}) = |\vec{S}_i| A_{\perp i} \Rightarrow P_i A_{\perp i} = |\vec{S}_i| A \cos \theta_i$$

$$\text{ομοίως} \Rightarrow P_r A_{\perp r} = |\vec{S}_r| A \cos \theta_r$$

$$\text{ομοίως} \Rightarrow P_t A_{\perp t} = |\vec{S}_t| A \cos \theta_t$$

Όμως, αν τα υλικά δεν απορροφούν ενέργεια, τότε η προσπίπτουσα ισχύς ισούται με την ανακλώμενη ισχύ συν τη διαθλώμενη ισχύ. Δηλαδή

$$P_i(A_{\perp i}) = P_r(A_{\perp r}) + P_t(A_{\perp t}) \quad (7.52)$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } |\vec{S}_i| A \cos \theta_i &= |\vec{S}_r| A \cos \theta_r + |\vec{S}_t| A \cos \theta_t \Rightarrow \\ 1 &= \frac{|\vec{S}_r|}{|\vec{S}_i|} + \frac{|\vec{S}_t| \cos \theta_t}{|\vec{S}_i| \cos \theta_i} \Rightarrow 1 = \frac{|\vec{E}_r|^2}{|\vec{E}_i|^2} + \frac{|\vec{E}_t|^2}{|\vec{E}_i|^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2}} \cos \theta_t \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε τις Εξ. 7.49, 7.50, 7.51. Με άλλα λόγια,

$$\boxed{1 = R + T} \quad (7.53)$$

όπου ορίσαμε

ανακλαστικότητα ή ανακλασιμότητα (reflectance)	$R := \frac{ \vec{E}_r ^2}{ \vec{E}_i ^2}$
διαπερατότητα ή διελυσιμότητα (transmittance)	$T := \frac{ \vec{E}_t ^2}{ \vec{E}_i ^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2}} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$

(7.54)

Οι ποσότητες  $r$  και  $t$  (π.χ. Εξ. 7.41, 7.42, 7.43, 7.44) ορίστηκαν ως λόγοι πλατών. Οπότε, μπορούμε να γράψουμε

$$1 = r^2 + t^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2}} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \quad (7.55)$$

$$R = r^2 \quad (7.56)$$

$$T = t^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2}} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \quad (7.57)$$

Για μη μαγνητικά υλικά,  $\mu_1 = \mu_2 = 1 \Rightarrow T = \frac{|\vec{E}_t|^2}{|\vec{E}_i|^2} \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = t^2 n \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$ .

## 7.6 Αναφορές 7ου Κεφαλαίου.

Η αρίθμηση αναφέρεται στη βιβλιογραφία όπως αυτή παρατίθεται συνολικά πριν από τα Παραρτήματα.

[40] “Hermite-gaussian” by DrBob at English Wikipedia. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Commons.

[44] M. Young Οπτική και λέιζερ Οπτικές Ύνες και Κυματοδηγοί, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ. Μετάφραση: Η. Ζουμπούλης, Γ. Κουρούκλης, Α. Κώνστα, Ε. Λιαροκάπης, Κ. Ράπτης, Ι. Ράπτης, Α. Σεραφετινίδης, Ε. Φαμπρικέζη. Επιστημονική επιμέλεια: Η. Ζουμπούλης, Α. Κώνστα, Πρωτότυπη έκδοση: Optics and Lasers, Springer-Verlag, 2000. Έκδοση 2008. ISBN: 9602546758.

[45] J. Wilson and J. Hawkes, Οπτοηλεκτρονική: μια εισαγωγή. Μετάφραση: Α.Α. Σεραφετινίδης, Μ. Ι. Μακροπούλου, Α. Παπαγιάννης, Ι. Ζεργιώτη, Ε. Φαμπρικέζη. Επιστημονική επιμέλεια: Α.Α. Σεραφετινίδης. Πρωτότυπη έκδοση: Optoelectronics: an introduction, 3rd edition, Prentice Hall, 1998. Έκδοση 2007. ISBN: 9789602546697.

[46] Σ. Βες, Εισαγωγή στην Κβαντική οπτική και Laser, Εκδότης: Γιαχούδης - Γιαπούλης, ISBN: 9780007425389. Θεσσαλονίκη 1999.

[54] Φ. Παλληχάρη, Πειράματα με Laser και ιδιότητες της δέσμης του, Έκδοση ΕΚ-ΠΑ (2009), Αθήνα.

# Βιβλιογραφία

- [1] National Institute of Standards and Technology (NIST), USA: CODATA Internationally recommended values of the Fundamental Physical Constants. NIST CODATA.
- [2] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (3rd ed.), Oxford University Press (2000), ISBN: 0198501765.
- [3] R. Siegel and J.R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer* (4th ed.), Taylor and Francis (2002), ISBN: 1560328398.
- [4] Roger Van Zee, J. Patrick Looney, *Cavity-Enhanced Spectroscopies, Volume 40 (Experimental Methods in the Physical Sciences)*, Academic Press (2003), ISBN: 0124759874.
- [5] O. Lummer und F. Kurlbaum, Der electrisch geglühte “absolut schwarze” Körper und seine Temperaturmessung, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesselschaft* 17 (1898) 106.
- [6] O. Lummer und F. Kurlbaum, Der elektrisch geglühte “schwarze” Körper, *Annalen der Physik* 310 (1901) 829.
- [7] K. Mizuno, J. Ishii, H. Kishida, Y. Hayamizu, S. Yasuda, D. N. Futaba, M. Yumura and K. Hata, A black body absorber from vertically aligned single-walled carbon nanotubes, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 106 (2009) 6044.
- [8] Zu-Po Yang, Lijie Ci, J. A. Bur, Shawn-Yu Lin, and P. M. Ajayan, Experimental Observation of an Extremely Dark Material Made By a Low-Density Nanotube Array, *Nano Letters* 8 (2008) 446.

- [9] Δείτε π.χ.  
A.N. Matveev, *Molecular Physics*, Mir Publishers (1985), Moscow, p. 86 ή  
A. Kikoin and I. Kikoin, *Molecular Physics*, Mir Publishers (1978), Moscow,  
p. 78 ή  
Χρ. Τρικαλινός, *Μοριακή Φυσική Θερμοδυναμική* (2009), Αθήνα, σελ. 75.
- [10] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (3rd ed.), John Wiley & Sons (1998),  
New York, ISBN: 9780471309321.
- [11] A. Wolski, *Theory of Electromagnetic Fields*, arXiv:1111.4354v2.
- [12] M. Planck, *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum*,  
*Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* 2 (1900) 237.
- [13] A. Einstein, *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden  
heuristischen Gesichtspunkt*. *Annalen der Physik* 17 (1905) 132-148.
- [14] G.N. Lewis, *The conservation of photons*, *Nature* 118 (1926) 874-875.
- [15] W.W. Coblenz, *Constants of spectral radiation of a uniformly heated enclosure  
or so-called black body. II*, *Bulletin of the Bureau of Standards* 13 (1916)  
459-477. Publisher National Bureau of Standards (USA).
- [16] H. Hertz, *Ueber den Einfluss des ultravioletten Lichtes auf die elektrische  
Entladung*, *Annalen der Physik* 267 (1887) 983-1000.
- [17] R. Millikan, *A Direct Determination of "h"*, *Physical Review* 4 (1914) 73-75.
- [18] R. Millikan, *A Direct Photoelectric Determination of Planck's "h"*, *Physical  
Review* 7 (1916) 355-388.
- [19] A. Einstein, *Zur Quantentheorie der Strahlung*, *Mitteilungen der Physikalischen  
Gesellschaft Zürich* 16 (1916) 47-62; *Physikalische Zeitschrift* 18 (1917)  
121-128.
- [20] F. Mandl, *Στατιστική φυσική*, Εκδότης: Γ.Α. Πνευματικός, 2013, Μετάφραση:  
Α. Αγγελάκη - Γ. Θεοδώρου, ISBN: 9789607258564.
- [21] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, E.A. Cornell,  
*Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*. *Science*  
269 (1995) 198-201.



- [22] Hertzsprung-Russel Diagram identifying many well known stars in the Milky Way galaxy. ESO - Hertzsprung-Russell Diagram. This photograph was produced by European Southern Observatory (ESO). Their website states: "All ESO still and motion pictures, with the exception of the ESO Logo, are released under the Creative Commons Attribution 4.0 International License, unless the credit byline indicates otherwise."
- [23] A.B. Ellis, M.J. Geselbracht, B.J. Johnson, G.C. Lisensky, W.R. Robinson, Teaching General Chemistry: A Materials Science Companion, American Chemical Society Books, Washington D.C. (1993), ISBN: 084122725X.
- [24] B. Henderson and G.F. Imbusch, Optical Spectroscopy of Inorganic Solids, Oxford Science Publications (2006), ISBN-13: 9780521804844, ISBN-10: 110740536X.
- [25] V.V. Tirkii and E.F. Martynovich, Intraband radioluminescence of LiF crystals, Optics and Spectroscopy 88 (2000) 533-537. Translated from Optika i Spektroskopiya 88 (2000) 593-597. Original Russian Text Copyright 2000 by Tirkii, Martynovich.
- [26] B. Henderson and K.P. O' Donnell, W.M. Yen (Ed.), Laser Spectroscopy of Solids II (Topics in Applied Physics), in Chapter 4: Laser spectroscopy of color centers, 65 (1989) 123. ISBN-10: 3662309297, ISBN-13: 978-3662309292.
- [27] G. Baldacchini, U.M. Grassano, and A. Tanga, Magnetic circular dichroic effects in the luminescence of F centers in KI, KBr, and KCl, Physical Review B 16 (1977) 5570-5584.
- [28] R. Rodríguez-Mijangos, R. Pérez-Salas, E. Muñtoz-Sandoval and M. Barboza-Flores, Stokes shift of the F center electronic transitions in mixed ionic crystals, Radiation Effects and Defects in Solids: Incorporating Plasma Science and Plasma Technology 138 (1996) 153-158 (Section B: Crystal lattice defects and amorphous materials).
- [29] G. Bastard, Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures, Publisher: EDP Sciences, 1992, ISBN-10: 2868830927, ISBN-13: 978-2868830920.
- [30] R.M. Eisberg, Θεμελιώδης Σύγχρονη Φυσική, Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού, 4η έκδοση (1995), Αθήνα, ISBN: 9607258142.

- [31] Created in Orbital viewer, free to use (<http://www.orbitals.com/orb/ov.htm>).
- [32] Wikipedia, Wikipedia Atomic orbital. Created in Orbital viewer (<http://www.orbitals.com/orb/ov.htm>) Electron orbital series. Dhatfield - Own work, Public Domain, many files, Uploaded by Dhatfield, Uploaded: September 25, 2008.
- [33] S. Gasiorowicz, Quantum Physics, Second Edition, John Wiley and Sons Inc. (1996), New York, ISBN-13: 9780471857372, ISBN-10: 0471857378.
- [34] D.A. Steck, Quantum and Atom Optics, Oregon Center for Optics and Department of Physics, University of Oregon, revision 0.8.3, 25 May 2012, available online at <http://steck.us/teaching>.
- [35] E.T. Jaynes and F.W. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, Proceedings of the IEEE 51 (1963) 89-109.
- [36] Γ.Ι. Παπαδόπουλος, Φ.Λ. Παλληγάκη, Κβαντική Οπτική και Lasers, Αθήνα, 2009.
- [37] W. Zimmermann Jr, The Classical Electromagnetic Modes of a Rectangular Resonant Cavity, arXiv:1207.0792.
- [38] [optique-ingenieur.org](http://optique-ingenieur.org) courses: Longitudinal and transverse modes.
- [39] O. Svelto, Principles of Lasers, Springer Science+Business Media (2010), Springer New York Dordrecht Heidelberg London (5th ed.), ISBN: 9781441913012, e-ISBN: 9781441913029.
- [40] “Hermite-gaussian” by DrBob at English Wikipedia. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Commons.
- [41] “Laguerre-gaussian” by DrBob at English Wikipedia. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Commons.
- [42] T.H. Maiman, Stimulated Optical Radiation in Ruby, Nature 187 (1960) 493-494.
- [43] M. Weber, Handbook of laser wavelengths, Taylor and Francis Group (1999), ISBN-13: 9780849335082, ISBN-10: 0849335086.

- [44] M. Young, *Οπτική και λέιζερ Οπτικές Ίνες και Κυματοδηγοί*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ. Μετάφραση: Η. Ζουμπούλης, Γ. Κουρούκλης, Α. Κώνστα, Ε. Λιαροκάπης, Κ. Ράπτης, Ι. Ράπτης, Α. Σεραφετινίδης, Ε. Φαμπρικέζη. Επιστημονική επιμέλεια: Η. Ζουμπούλης, Α. Κώνστα, Πρωτότυπη έκδοση: *Optics and Lasers*, Springer-Verlag, 2000. Έκδοση 2008. ISBN: 9602546758.
- [45] J. Wilson and J. Hawkes, *Οπτοηλεκτρονική: μια εισαγωγή*. Μετάφραση: Α.Α. Σεραφετινίδης, Μ. Ι. Μακροπούλου, Α. Παπαγιάννης, Ι. Ζεργιώτη, Ε. Φαμπρικέζη. Επιστημονική επιμέλεια: Α.Α. Σεραφετινίδης. Πρωτότυπη έκδοση: *Optoelectronics: an introduction*, 3rd edition, Prentice Hall, 1998. Έκδοση 2007. ISBN: 9789602546697.
- [46] Σ. Βεσ, *Εισαγωγή στην Κβαντική οπτική και Laser*, Εκδότης: Γιαχούδης - Γιαπούλης, ISBN: 9780007425389. Θεσσαλονίκη 1999.
- [47] R.N. Hall, Stimulated emission semiconductor devices, 24 October 1962, US Patent number 3245002, 5 April 1966.
- [48] A. Zora, G.P. Triberis, C. Simserides, Near-Field Optical Properties of Quantum Dots, Applications and Perspectives, *Recent Patents on Nanotechnology* 5 (2011) pp. 188-224; A. Zora, C. Simserides, G.P. Triberis, The effect of the size of self-assembled individual quantum dots on their PL spectra, *Phys. Status Solidi C* 5 (2008) 3806-3808.
- [49] Fujitsu (September 10, 2004). Fujitsu, University of Tokyo Develop World's First 10Gbit/s Quantum Dot Laser Featuring Breakthrough Temperature-Independent Output. Press Release.
- [50] M.I. Berciu, *Notes on Statistical Mechanics* (2007), Department of Physics and Astronomy, University of British Columbia, Vancouver, Canada.
- [51] J. von Neumann, *Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik*, *Gottinger Nachrichten* 1 (1927) 245-272.
- [52] L. Landau, *Das Dampfungproblem in der Wellenmechanik*, *Zeitschrift für Physik* 45 (1927) 430-441.
- [53] U. Fano, *Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques*, *Reviews of Modern Physics* 29 (1957) 74-93.

- [54] Φ. Παλληγάρη, Πειράματα με Laser και ιδιότητες της δέσμης του, Έκδοση ΕΚ-ΠΑ (2009), Αθήνα.
- [55] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Muehlig, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch (2001), Thun und Frankfurt am Main, ISBN: 3817120052 (Buch), ISBN: 381712015X (Buch mit CD-ROM).

# Παράρτημα Α΄

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄.1 Ασκήσεις Κεφαλαίου 1:

Εισαγωγή στην κβαντική φύση του φωτός.

**Άσκηση 1.** Συμβατικά στην περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος μακρινό υπέρυθρο (far infrared, FIR) έχουμε μήκος κύματος  $25 \mu\text{m} < \lambda < 1000 \mu\text{m}$ . Βρείτε σε τι  $x$  (Εξ. 1.8) αντιστοιχεί το FIR για θερμοκρασία (α΄) 300 K, δηλαδή περίπου για τη θερμοκρασία ενός ζώου, (β΄) 6000 K, δηλαδή περίπου για την ενεργό θερμοκρασία της φωτόσφαιρας του Ηλίου, (γ΄) 6 K.

**Άσκηση 2.** Συμβατικά στην περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος υπεριώδες (ultraviolet, UV) έχουμε μήκη κύματος  $10 \text{ nm} < \lambda < 400 \text{ nm}$ . Βρείτε σε τι  $x$  (Εξ. 1.8) αντιστοιχεί το UV για θερμοκρασία (α΄) 300 K, δηλαδή περίπου για τη θερμοκρασία ενός ζώου, (β΄) 6000 K, δηλαδή περίπου για την ενεργό θερμοκρασία της φωτόσφαιρας του Ηλίου, (γ΄) 6 K.

**Άσκηση 3.** Να εξεταστεί η συμπεριφορά του νόμου Planck στα εξής όρια: (α΄) μηδενική συχνότητα, και (β΄) άπειρη συχνότητα. Επίσης, να αποδειχθεί ότι (γ΄) στις πολύ μικρές συχνότητες ταυτίζεται με το νόμο Rayleigh-Jeans, ενώ (δ΄) στις πολύ μεγάλες συχνότητες ταυτίζεται με το νόμο Wien.

Λύση ασκήσεως 3.

β'

Για  $\nu \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \rho = \rho_0 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^3}{e^x - 1} \right) = \rho_0 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3x^2}{e^x} \right) = 0$$

Για  $\nu \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho = \rho_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{e^x - 1} \right) \stackrel{\text{τελικά}}{=} \rho_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6}{e^x} \right) = 0$$

Για μικρές συχνότητες, δηλαδή για μικρά  $x$  ( $x \downarrow$ ):

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots \quad (\text{A'.1})$$

δηλαδή

$$e^x - 1 = 1 + 1\frac{x}{1!} + 1\frac{x^2}{2!} + \dots - 1 \approx x \quad (\text{1ης τάξεως προσέγγιση}), \quad (\text{A'.2})$$

οπότε

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \simeq \rho_0 \frac{x^3}{x} = \rho_0 x^2 = \rho_{RJ}. \quad (\text{A'.3})$$

Για μεγάλες συχνότητες, δηλαδή για μεγάλα  $x$  ( $x \uparrow$ ):

$$e^x - 1 \simeq e^x \Rightarrow \rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \simeq \rho_0 \frac{x^3}{e^x} = \rho_W \quad (\text{A'.4})$$

**Άσκηση 4.** Αποδείξτε ότι  $\rho_W(\nu, T) \neq \rho_{RJ}(\nu, T)$  για μικρές και μεγάλες συχνότητες (δηλαδή για μικρά και μεγάλα  $x$ ).

**Λύση ασκήσεως 4.**

Για μεγάλα  $x$  ( $x \uparrow$ )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho_{RJ} = \rho_0 \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty \neq \lim_{x \rightarrow \infty} \rho_W = \rho_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0 \quad (\text{A'.5})$$

Για μικρά  $x$  ( $x \downarrow$ ), παρόλο που για  $x \rightarrow 0$  και τα δύο μηδενίζονται

$$\lim_{x \rightarrow 0} \rho_{RJ} = \rho_0 \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \rho_W = \rho_0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^x} = 0, \quad (\text{A'.6})$$

ωστόσο, παραμένουν άνισα. Πράγματι, με τη βοήθεια του αναπτύγματος

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots \quad (\text{A'.7})$$

διαπιστώνουμε ότι

$$e^x = 1 + 1\frac{x}{1!} + 1\frac{x^2}{2!} + \dots \approx 1 + x \quad (\text{1ης τάξεως προσέγγιση}), \quad (\text{A'.8})$$

οπότε

$$\rho_W = \rho_0 \frac{x^3}{e^x} \approx \rho_0 \frac{x^3}{1+x} \neq \rho_0 x^2 = \rho_{RJ}. \quad (\text{A'.9})$$

**Άσκηση 5.** Αποδείξτε ότι η αντικατάσταση ενός ανύσματος θέσεως

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r} \quad (\text{A'.10})$$

ισοδυναμεί στις σφαιρικές συντεταγμένες με τις αντικαταστάσεις

$$\begin{aligned} r &\rightarrow r \\ \theta &\rightarrow \pi - \theta \\ \phi &\rightarrow \pi + \phi \end{aligned} \quad (\text{A'.11})$$

**Άσκηση 6.** Η συνάρτηση  $\Gamma$  [55] είναι επέκταση σε πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς του παραγοντικού με το όρισμά του μετατοπισμένο κατά  $-1$ . Αποδεικνύεται τελικά ότι

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{για } n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{παραγοντική μορφή} \quad (\text{A'.12})$$

Η συνάρτηση  $\Gamma$  ορίζεται για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς εκτός από τους αρνητικούς ακεραίους και το μηδέν  $(0, -1, -2, \dots)$ . Εάν ο μιγαδικός  $z$  έχει θετικό πραγματικό μέρος,  $Real(z) > 0$ , τότε ορίζεται από τη σχέση

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{μορφή Euler} \quad (\text{A'.13})$$

δ'

Ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί σε όλους τους μιγαδικούς εκτός από τους μη θετικούς ακεραίους με τρόπο που δε μας ενδιαφέρει εδώ. Η συνάρτηση  $\Gamma$  χρησιμοποιείται κυρίως στις πιθανότητες και τη στατιστική. Ο συμβολισμός  $\Gamma(z)$  οφείλεται στον Legendre. Υπάρχουν κι άλλες μορφές

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt \quad (\text{A'.14})$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 [\ln(1/t)]^{z-1} dt \quad (\text{A'.15})$$

(α') Ξεκινώντας από τη μορφή Euler, αποδείξτε ότι

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{A'.16})$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad (\text{A'.17})$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (\text{A'.18})$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (\text{A'.19})$$

Δίνεται το ολοκλήρωμα Gauss

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (\text{A'.20})$$

(β') Να αποδειχθεί ότι

$$I = \int_0^\infty e^{-\gamma r} r^n dr = \gamma^{-(n+1)} n! \quad (\text{A'.21})$$

όπου  $n = 1, 2, 3, \dots$  και  $\gamma > 0$ .

**Άσκηση 7.** Ελέγξτε τα ακόλουθα [36,55]: (α') Θεωρώντας γνωστό ότι  $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}|a|$ , δείξτε ότι για  $t > 0$ ,  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2(xt/2)}{x^2} dx = \frac{\pi t}{2}$ . (β')  $e^{\pm i(\phi+\pi)} = -e^{\pm i\phi}$  (γ')  $\int_0^{2\pi} e^{i\phi} d\phi = 0$  (δ') Σε προσέγγιση πρώτης τάξεως  $\sqrt{c+x} \approx \sqrt{c} + \frac{x}{2\sqrt{c}}$ .

**Λύση ασκήσεως 7.**

Τα τρία πρώτα είναι πολύ απλά. Το ανάπτυγμα Taylor μια πραγματικής ή μιγαδικής συναρτήσεως  $f(x)$ , πραγματικής ή μιγαδικής μεταβλητής  $x$ , η οποία είναι απείρως παραγωγίσιμη σε ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό  $a$  είναι η δυναμοσειρά

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad (\text{A'.22})$$



όπου κατά τα γνωστά  $n!$  είναι το παραγοντικό του  $n$  και  $f^{(n)}(a)$  είναι η  $n$ -οστή παράγωγος της  $f$  στο σημείο  $a$ . Η μηδενικής τάξεως παράγωγος της  $f$  είναι εξ ορισμού η ίδια η  $f$ ,  $(x - a)^0 := 1$  και  $0! := 1$ . Για  $a = 0$ , η δυναμοσειρά καλείται και σειρά Maclaurin, δηλαδή

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad (\text{A'.23})$$

Σε προσέγγιση πρώτης τάξεως

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x. \quad (\text{A'.24})$$

Οπότε για την  $f(x) = \sqrt{c+x}$ , συνεπάγεται  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{c+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ , ενώ  $f(0) = \sqrt{c}$ . Άρα  $f(x) \approx \sqrt{c} + \frac{x}{2\sqrt{c}}$ .

**Άσκηση 8.** Για θερμοκρασία (α') 300 K, (β') 6000 K και (γ') 6 K: Υπολογίστε το μήκος κύματος  $\lambda_{\Delta}$  στο οποίο η πρόβλεψη του νόμου Rayleigh-Jeans  $\rho_{RJ}$  είναι διπλάσια από την πειραματική τιμή  $\rho$  την οποία εξηγεί ο νόμος Planck. Σε ποια περιοχή του ΗΜ φάσματος ανήκει το  $\lambda_{\Delta}$  κάθε φορά;

**Άσκηση 9.** Υποθέστε ότι η ΗΜ ενέργεια ενός resonator ("ταλαντωτή") συχνότητας  $\nu$  εντός της κοιλότητας μέλανος σώματος μπορεί να πάρει μόνο διακεκριμένες τιμές (είναι δηλαδή "κβαντισμένη") και μάλιστα ότι έχει τη μορφή

$$E_n = h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A'.25})$$

αντί της μορφής  $E_n = h\nu n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  που υπέθεσε ο Planck. Βρείτε πως διαφοροποιείται η πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα συχνότητας ΗΜ ακτινοβολίας μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία  $\rho(\nu, T)$  (μονάδες  $\frac{\text{J}}{\text{m}^3\text{Hz}}$ ) έναντι του νόμου του Planck (Εξ. 1.7).

**Άσκηση 10.** Υπολογίστε το  $\lambda_0$  όπου παρουσιάζει μέγιστο ο νόμος του Planck  $\rho(\lambda, T)$  θεωρώντας ότι μπορούν να προσεγγιστούν με μέλανα σώματα (1) το ανθρώπινο σώμα με θερμοκρασία  $\theta \approx 36.6^\circ \text{C}$ , (2) η φωτόσφαιρα του Ηλίου με "ένεργό θερμοκρασία"  $T \approx 5800 \text{K}$  και (3) η "φωτόσφαιρα" του αστέρα Αλτάιρ με "ένεργό θερμοκρασία"  $T \approx 7000 - 8500 \text{K}$ .

7'

**Απάντηση ασκήσεως 10.** (1)  $\approx 9355.2 \text{ nm} \approx 9.3552 \mu\text{m}$ , δηλαδή στο υπέρυθρο (infrared, IR). (2)  $\approx 500 \text{ nm}$ , δηλαδή στο πράσινο, ενώ το κίτρινο είναι  $\approx 570\text{-}590 \text{ nm}$ . (3)  $\approx 414$  έως  $341 \text{ nm}$ , δηλαδή ιώδες - υπεριώδες.

**Άσκηση 11.** Υποθέστε ότι αντί του νόμου του Planck  $\rho(\lambda, T)$  της Εξ. 1.94 λείπει το  $-1$  του παρονομαστή, δηλαδή έχουμε τον αντίστοιχο νόμο Wien. Αποδείξτε ότι τότε ο νόμος μετατοπίσεως του Wien θα ήταν  $\lambda_0 T = \frac{hc}{5k_B}$ .

**Άσκηση 12.** Για τα  $\lambda_0$  και  $\nu_0$  των Εξ. 1.100 και 1.89, αποδείξτε ότι  $\lambda_0 \nu_0 \approx 0.568c$ , ενώ αν αντί για το νόμο του Planck στη μορφή  $\rho(\nu, T)$  και  $\rho(\lambda, T)$  είχαμε τις αντίστοιχες εκφράσεις Wien, δηλαδή έλειπε το  $-1$  στον παρονομαστή, θα είχαμε  $\lambda_0 \nu_0 = \frac{3}{5}c$ .

**Άσκηση 13.** Από την κατανομή του νόμου του Planck  $\rho(\nu, T)$  να εξαχθεί η κατανομή  $\rho(\omega, T)$  όπου  $\omega = 2\pi\nu$  η κυκλική συχνότητα, δηλαδή να δειχθεί ότι

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \quad (\text{A'.26})$$

**Άσκηση 14.** Να αποδειχθούν οι Εξ. 1.58, 1.59, 1.60, καθώς και η Εξ. 1.61 που προκύπτουν με το χωρισμό των μεταβλητών  $x, y, z$ , εντός του  $\vec{r}$ . Οι αποδείξεις παραλήφθηκαν για λόγους συντομίας στο κυρίως κείμενο.

**Απάντηση ασκήσεως 14.** Χωρίζουμε τις μεταβλητές  $x, y, z$ , εντός του  $\vec{r}$ . Στην Εξ. 1.57

$$\nabla^2 \vec{E}_{\vec{r}} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_{\vec{r}} = \vec{0}$$

αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$\vec{E}_{\vec{r}}(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)\hat{e}$$

όπου το  $\hat{e}$  ορίζει την πόλωση, δηλαδή τον προσανατολισμό του  $\vec{E}$ . Οπότε

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} XYZ = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{g(y)} + \underbrace{\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}}_{h(z)} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

Δηλαδή τρεις συναρτήσεις που εξαρτώνται από διαφορετικές μεταβλητές έχουν σταθερό άθροισμα, οπότε υποθέτουμε ότι κάθε μία από αυτές ισούται με μια σταθερά. Τις σταθερές αυτές τις ονομάζουμε  $-k_x^2$ ,  $-k_y^2$ ,  $-k_z^2$ , αντιστοίχως. Οπότε προκύπτει η Εξ. 1.61

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

αλλά και

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \stackrel{\text{θέτουμε}}{=} -k_x^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \stackrel{\text{θέτουμε}}{=} -k_y^2 \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \stackrel{\text{θέτουμε}}{=} -k_z^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0$$

Άρα έχουμε λύσεις της μορφής

$$X(x) = A_1 \sin(k_x x) + B_1 \cos(k_x x) \quad \boxed{1}$$

$$Y(y) = A_2 \sin(k_y y) + B_2 \cos(k_y y) \quad \boxed{2}$$

$$Z(z) = A_3 \sin(k_z z) + B_3 \cos(k_z z) \quad \boxed{3}$$

Επομένως

$$\vec{E}_{\vec{r}}(x, y, z) = (\hat{e}_x + \hat{e}_y + \hat{e}_z)$$

$$[A_1 \sin(k_x x) + B_1 \cos(k_x x)][A_2 \sin(k_y y) + B_2 \cos(k_y y)][A_3 \sin(k_z z) + B_3 \cos(k_z z)].$$

Το  $\hat{e}$  έχει γενικά τυχαίο προσανατολισμό, οπότε το αναλύσαμε σε συνιστώσες κατά τους άξονες  $x, y, z$ , δηλαδή  $\hat{e} = \hat{e}_x + \hat{e}_y + \hat{e}_z$ . Συνεπώς

το  $E_x$  θα είναι κάποιος πρώτος συνδυασμός των  $\sin$  και  $\cos$  που περιέχονται στις  $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$

το  $E_y$  θα είναι κάποιος δεύτερος συνδυασμός των  $\sin$  και  $\cos$  που περιέχονται στις  $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$

το  $E_z$  θα είναι κάποιος τρίτος συνδυασμός των  $\sin$  και  $\cos$  που περιέχονται στις  $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$

ή'

Οι συνδυασμοί αυτοί θα πρέπει να είναι τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned} \text{το } E_x &\text{ να μηδενίζεται για } y = 0 \text{ και } z = 0 \\ \text{το } E_y &\text{ να μηδενίζεται για } x = 0 \text{ και } z = 0 \\ \text{το } E_z &\text{ να μηδενίζεται για } x = 0 \text{ και } y = 0 \end{aligned}$$

οπότε προκύπτουν οι Εξ. 1.58, 1.59, 1.60.

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } y = 0 \text{ και } z = 0 \\ E_y &= E_{y0} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } x = 0 \text{ και } z = 0 \\ E_z &= E_{z0} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } x = 0 \text{ και } y = 0 \end{aligned}$$

**Άσκηση 15.** Να αποδειχτεί η Εξ. 1.63 και οι Εξ. 1.64, 1.65, 1.66. Οι αποδείξεις παραλήφθηκαν για λόγους συντομίας στο κυρίως κείμενο.

**Απάντηση ασκήσεως 15.**

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 &\Rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (E_x, E_y, E_z) = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \\ &- E_{x0} k_x \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} + \\ &- E_{y0} k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} + \\ &- E_{z0} k_z \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} = 0 \Rightarrow \\ &k_x E_{x0} + k_y E_{y0} + k_z E_{z0} = 0, \text{ που είναι η Εξ. 1.63.} \end{aligned}$$

$$\text{Από την (3η) Εξίσωση Maxwell, } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ [E_{x0} \cos(k_x x) & [E_{y0} \cos(k_y y) & [E_{z0} \cos(k_z z) \\ \sin(k_y y) \sin(k_z z)] & \sin(k_x x) \sin(k_z z)] & \sin(k_x x) \sin(k_y y)] \end{array} \right| e^{-i\omega t} = - \left( \frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

ϑ'

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial B_x}{\partial t} &= [k_y E_{z0} \cos(k_z z) \sin(k_x x) \cos(k_y y) - k_z E_{y0} \cos(k_y y) \sin(k_x x) \cos(k_z z)] e^{-i\omega t} \Rightarrow \\
 -\frac{\partial B_x}{\partial t} &= [k_y E_{z0} - k_z E_{y0}] \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \\
 B_x &= \frac{[k_y E_{z0} - k_z E_{y0}]}{i\omega} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \\
 B_x &= \frac{i}{\omega} [k_z E_{y0} - k_y E_{z0}] \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \quad \text{που είναι η Εξ. 1.64.}
 \end{aligned}$$

Ομοίως και για τις υπόλοιπες Εξ. 1.65 και 1.66. Με “δημιουργικό πνεύμα”, στη χρονική ολοκλήρωση, για  $t = 0$ , θέσαμε  $\vec{B}(0) = \vec{0}$ .

**Άσκηση 16.** Να ελεγχθεί αν το  $\vec{B}$  (Εξ. 1.64, 1.65, 1.66) ικανοποιεί την  $\underline{\text{ΕΣΣ}}^*$  στα τοιχώματα, αλλά και τι προκύπτει από τη (2η) Εξίσωση Maxwell,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  και την (4η) Εξίσωση Maxwell,  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

**Άσκηση 17.** (Ουσιαστικά πρόκειται για επανάληψη της θεωρίας) Θεωρήστε γνωστό το νόμο του Planck

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Να αποδειχθούν οι δύο διατυπώσεις του νόμου των Stefan-Boltzmann

(α') για την πυκνότητα ενέργειας,  $\varrho(T)$ , και

(β') για την ένταση ακτινοβολίας,  $I$ .

(γ') Να αποδειχθεί ο νόμος του Planck στη μορφή  $\rho(\lambda, T)$ .

(δ') Ποιές είναι οι μονάδες μετρήσεως των  $\rho(\nu, T)$ ,  $\rho(\lambda, T)$ ,  $\varrho(T)$ ,  $I$  στο Διεθνές

Σύστημα Μονάδων; Δίνεται  $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ .

## Α'.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 2: Μηχανισμοί αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτι- νοβολίας - ύλης (δισταθμικό σύστημα).



**Άσκηση 1.** Ας θεωρήσουμε την (Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση και ας εστιάσου-  
με στη διατήρηση ενέργειας και ορμής. Επίσης, ας θεωρήσουμε το άτομο αρχικά  
ακίνητο. Σε ποιά περιοχή μηκών κύματος  $\lambda$ , η κινητική ενέργεια του ατόμου μετά  
την απορρόφηση του φωτονίου είναι αρκετά μεγάλη (ας πούμε ίση με ~~την ενέργεια~~  
του φωτονίου που απορροφάται) ούτως ώστε να μην μπορούμε να την αγνοήσουμε  
στο ενεργειακό ισοζύγιο. Δίνονται: μάζα πρωτονίου  $m_p = 1.672621777(74) \times 10^{-27}$   
kg, σταθερά Planck  $h = 6.62606957(29) \times 10^{-34}$  Js ταχύτητα του φωτός στο κενό  
 $c = 2.99792458 \times 10^8$  m/s. Θεωρήστε χάριν απλότητας ότι η μάζα του ατόμου  
 $m_{\alpha t} \approx Zm_p + Nm_n + Zm_e \approx Am_p$ .

**Άσκηση 2.** Ας συγκρίνουμε τις πιθανότητες αυθόρμητης εκπομπής και εξαναγκα-  
σμένης εκπομπής. Αν επιθυμούμε αυξημένη συνοχή χρειαζόμαστε μεγάλες ή μικρές  
συχνότητες, μεγάλες ή μικρές θερμοκρασίες; Κρίνοντας από τη σύγκριση των παρα-  
πάνω πιθανοτήτων είναι ευκολότερη η δημιουργία συνεκτικής δέσμης στα ραδιοκύματα  
ή στο υπέρυθρο;

**Άσκηση 3.** Έστω ότι επιθυμούμε η πιθανότητα αυθόρμητης εκπομπής να ισούται  
με την πιθανότητα εξαναγκασμένης εκπομπής. Σε τι θερμοκρασία είναι αυτό εφικτό  
στα FM ραδιοκύματα π.χ. σε συχνότητα 100 MHz και στο υπεριώδες π.χ. σε μήκος  
κύματος 200 nm;

**Άσκηση 4.** Το dalton (Da) ή η ενοποιημένη ατομική μονάδα μάζας (unified a-  
tomic mass unit),  $u = 1.660538921(073) \times 10^{-27}$  kg, ορίζεται ως το 1/12 της  
μάζας του ατόμου του πιο κοινού ισοτόπου του άνθρακα ( $^{12}\text{C}$ ). Ας θεωρήσουμε  
ότι αναφερόμαστε στο άτομο του  $^{12}\text{C}$  που έχει από 6 πρωτόνια, νετρόνια και η-  
λεκτρόνια. Δίνονται  $m_p = 1.007276466812(90) u$ ,  $m_n = 1.00866491600(43) u$ ,  
 $m_e = 5.4857990946(22) \times 10^{-4} u$ . Αν προσθέσουμε  $6 m_p + 6 m_n + 6 m_e$  βρίσκουμε  
περίπου 12.099  $u$  και όχι 12  $u$ , πράγμα που οφείλεται στο “έλλειμμα μάζας”, δηλα-  
δή στο ότι μέρος της μάζας ηρεμίας χρησιμοποιείται για να συνδεθούν τα πρωτόνια,  
νετρόνια, ηλεκτρόνια φτιάχνοντας το άτομο. Ας θεωρήσουμε την (Εξαναγκασμένη)  
Απορρόφηση και ας εστιάσουμε στη διατήρηση ενέργειας και ορμής. Ας θεωρήσουμε  
το άτομο αρχικά ακίνητο. Σε ποια περιοχή μηκών κύματος,  $\lambda$ , η κινητική ενέργεια του

ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αρκετά μεγάλη (ας πούμε ίση με το ένα δέκατο της ενέργειας του φωτονίου που απορροφάται) ούτως ώστε να μη μπορούμε να την αγνοήσουμε στο ενεργειακό ισοζύγιο; Δίνονται  $h = 6.62606957(29) \times 10^{-34}$  Js,  $c = 2.99792458 \times 10^8$  m/s.

**Άσκηση 5.** Θεωρούμε συλλογή ατόμων υδρογόνου σε θερμοδυναμική ισορροπία και ότι οι ιδιοενέργειες κάθε ατόμου δίνονται από τη γνωστή σχέση Bohr  $E_n \approx \frac{-13.6 \text{ eV}}{n^2}$ . Υποθέστε ότι η θερμοκρασία είναι (α') 4.2 K και (β') 300 K. Δίνεται η σταθερά Boltzmann  $k_B = 1.3806488(13) \times 10^{-23}$  J/K =  $8.6173324(78) \times 10^{-5}$  eV/K. (A) Συγκρίνετε τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται στην 1η τροχιά Bohr με τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται στη 2η τροχιά και συνεχίστε ανά ζεύγη έως την 5η τροχιά (ζεύγη 1η-2η, 2η-3η, 3η-4η, 4η-5η). (B) Συγκρίνετε τον αριθμό των ατόμων που μεταβαίνουν σε χρόνο  $dt$  από την 1η στη 2η τροχιά με εξαναγκασμένη διεργασία,  $dN_{1 \rightarrow 2}^{e\xi}$ , με τον αριθμό των ατόμων που μεταβαίνουν σε χρόνο  $dt$  από την 2η στην 1η τροχιά με εξαναγκασμένη διεργασία,  $dN_{2 \rightarrow 1}^{e\xi}$ . Συνεχίστε ανά ζεύγη έως την 5η τροχιά (ζεύγη 1η-2η, 2η-3η, 3η-4η, 4η-5η). Υποθέστε ότι  $B_{12} = B_{21}$ .

**Άσκηση 6.** Θεωρήστε μια κβαντική τελεία σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με εσωτερικό GaAs διαστάσεων  $8 \times 4 \times 4$  nm και περίβλημα  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  με μοριακό κλάσμα Al,  $x$ , τέτοιο ώστε η ασυνέχεια της ζώνης αγωγιμότητας μεταξύ των δύο υλικών να είναι  $V_b = 224$  meV. Θεωρήστε κατά προσέγγιση την ενεργό μάζα στη ζώνη αγωγιμότητας ίση περίπου με αυτή του GaAs, δηλαδή  $m^* \approx 0.067m_e$ .

(A) Πόσες ενεργειακές στάθμες έχει αυτή η κβαντική τελεία; Αν δεν μπορείτε να το αποδείξετε, θεωρήστε γνωστό ότι ένα κβαντικό φρέαρ εύρους  $L$  περιέχει  $n = 1 + \text{Int} \left[ \sqrt{\frac{2m^*V_bL^2}{\pi^2\hbar^2}} \right]$  δέσμιες ενεργειακές καταστάσεις [29].  $\text{Int}[\xi]$  είναι το ακέραιο μέρος του  $\xi$ .

(B) Σε τι μήκος κύματος αντιστοιχεί η μετάβαση από την θεμελιώδη στην πρώτη διεγερμένη στάθμη της εν λόγω κβαντικής τελείας;

(Γ) Περαιτέρω, υποθέστε ότι έχουμε μια μεγάλη συλλογή από τέτοιες κβαντικές τελείες με ένα ηλεκτρόνιο στην κάθε μία και ότι η στατιστική Boltzmann με ίδια στατιστικά βάρη μπορεί να περιγράψει τον πληθυσμό των ενεργειακών σταθμών. Η θερμοκρασία ας είναι (α') 4.2 K και (β') 300 K. Συγκρίνετε τον αριθμό των κβαντικών τελειών όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην θεμελιώδη στάθμη με τον αριθμό των κβαντικών τελειών όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην 1η διεγερμένη στάθμη.

(Δ) Έστω τώρα ότι όλη αυτή η συλλογή κβαντικών τελειών βρίσκεται εντός κα-

ιβ'

ταλλήλου ΗΜ πεδίου. Συγκρίνετε τον αριθμό των κβαντικών τελειών που μεταβαίνουν σε χρόνο  $dt$  από τη θεμελιώδη στην 1η διεγερμένη στάθμη με εξαναγκασμένη διεργασία,  $dN_{1 \rightarrow 2}^{e\xi}$ , με τον αριθμό των κβαντικών τελειών που μεταβαίνουν σε χρόνο  $dt$  από την 1η διεγερμένη στη θεμελιώδη στάθμη με εξαναγκασμένη διεργασία,  $dN_{2 \rightarrow 1}^{e\xi}$ . Δίνεται η ανηγμένη σταθερά Planck  $\hbar = 1.054571726(47) \times 10^{-34}$  Js, το στοιχειώδες φορτίο  $e = 1.602176565(35) \times 10^{-19}$  C, η μάζα του ηλεκτρονίου  $m_e = 9.10938291(40) \times 10^{-31}$  kg, η σταθερά Boltzmann  $k_B = 1.3806488(13) \times 10^{-23}$  J/K =  $8.6173324(78) \times 10^{-5}$  eV/K. Και γενικώς όποια σταθερά σας χρειάζεται, θεωρήστε την γνωστή.



### A'.3 Ασκήσεις Κεφαλαίου 3:

Ημικλασική αντιμετώπιση της αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτινοβολίας - ύλης (δισταθμικού συστήματος).

Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο κλασικά  
- Δισταθμικό σύστημα κβαντικά.

**Άσκηση 1.** Θεωρήστε τις εξισώσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις Rabi μετά την Rotating Wave Approximation (RWA), δηλαδή

$$\begin{aligned}\dot{C}_1(t) &= C_2(t) \frac{iE_0\mathcal{P}}{2\hbar} e^{-i(\Omega-\omega)t} \\ \dot{C}_2(t) &= C_1(t) \frac{iE_0\mathcal{P}}{2\hbar} e^{i(\Omega-\omega)t}\end{aligned}$$

Θέλουμε να τις λύσουμε με αρχικές συνθήκες  $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ .

(α) Κάντε το μετασχηματισμό

$$\begin{aligned}C_1(t) &= \mathcal{C}_1(t) e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} \\ C_2(t) &= \mathcal{C}_2(t) e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}\end{aligned}$$

και αποδείξτε ότι προκύπτει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{C}}_1(t) \\ \dot{\mathcal{C}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1(t) \\ \mathcal{C}_2(t) \end{bmatrix}.$$

Ορίσαμε αποσυντονισμό (detuning) το  $\Delta := \omega - \Omega$  και συχνότητα Rabi το  $\Omega_R := \frac{E_0\mathcal{P}}{\hbar}$ .

(β') Ορίστε το διάνυσμα

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1(t) \\ \mathcal{C}_2(t) \end{bmatrix}$$

και τον πίνακα

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} = -i\mathcal{A} = -i \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}$$

ιδ'

οπότε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων γίνεται

$$\dot{\vec{x}}(t) = \tilde{\mathcal{A}}\vec{x}(t)$$

Δοκιμάστε λύσεις της μορφής

$$\vec{x}(t) = \vec{v}e^{\tilde{\lambda}t}$$

και αποδείξτε ότι εν τέλει έχουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

όπου  $\tilde{\lambda} = -i\lambda$ .

(γ') Λύστε το πρόβλημα για  $\Delta = 0$ .

(δ') Λύστε το πρόβλημα για  $\Delta \neq 0$ .

(ε') Συγκρίνετε το πλάτος και την περίοδο των ταλαντώσεων που προκύπτουν στις περιπτώσεις  $\Delta = 0$  και  $\Delta \neq 0$ .

**Άσκηση 2.** Θεωρήστε δεδομένη την περίπτωση όπου ισχύει η Εξ. 3.83, ειδικότερα ότι η πιθανότητα παρουσίας του ηλεκτρονίου στην άνω στάθμη είναι

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2 \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}{4\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} t^2.$$

Λάβετε υπ' όψιν τον ορισμό της συχνότητας Rabi,  $\Omega_R = \frac{\mathcal{P}\mathcal{E}_0}{\hbar}$  (δείτε την Εξ. 3.52) και επιπλέον θεωρήστε ότι βρισκόμαστε σε συντονισμό. Εκτιμήστε το χρόνο που χρειάζεται ώστε  $P_2(t) = 1$ , θεωρώντας ότι το μέτρο της διπολικής ροπής  $\mathcal{P}$  είναι της τάξεως μεγέθους  $ea_0$  όπου  $e$  είναι το στοιχειώδες φορτίο  $\approx 1.602 \times 10^{-19}$  C και  $a_0 \approx 0.529$  Å είναι η ακτίνα Bohr. Για το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου πάρτε τρεις περιπτώσεις, συγκεκριμένα  $10^3$ ,  $10^5$  και  $10^8$  V/m. Δίνεται και η ανηγμένη σταθερά του Planck  $\hbar \approx 1.054 \times 10^{-34}$  Js.

Λύση:

Αν θέλουμε η πιθανότητα να γίνει ίση με μονάδα και βρισκόμαστε σε συντονισμό όπου

$\Delta := \omega - \Omega = 0$ , τότε ονομάζοντας  $x := \frac{\Delta t}{2} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{x^2} \rightarrow 1$ . Επομένως,

προκύπτει  $t = \frac{2\hbar}{\mathcal{P}\mathcal{E}_0}$ . Συγκριμένα

$$E_0 = 10^3 \text{ V/m} \Rightarrow t = \frac{2 \times 1.054 \times 10^{-34} \text{ Js}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \cdot 10^3 \text{ V/m}} \approx 2.5 \times 10^{-8} \text{ s} = 25 \text{ ns}$$

$$E_0 = 10^5 \text{ V/m} \Rightarrow t = \frac{2 \times 1.054 \times 10^{-34} \text{ Js}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \cdot 10^5 \text{ V/m}} \approx 2.5 \times 10^{-10} \text{ s} = 0.25 \text{ ns}$$

$$E_0 = 10^8 \text{ V/m} \Rightarrow t = \frac{2 \times 1.054 \times 10^{-34} \text{ Js}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \cdot 10^8 \text{ V/m}} \approx 2.5 \times 10^{-13} \text{ s} = 0.25 \text{ ps}$$

**Άσκηση 3.** Αποδείξτε ότι ισχύει η πιο κάτω έκφραση για το διάνυσμα θέσεως

$$\vec{r} = \frac{r}{2} \sin \theta [(\hat{x} - i\hat{y})e^{i\varphi} + (\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\varphi}] + r \cos \theta \hat{z}.$$

την οποία χρησιμοποιήσαμε στην Ενότητα 3.11.

Λύση:

$$\begin{aligned} (\hat{x} - i\hat{y})e^{i\varphi} &= (\hat{x} - i\hat{y})(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \hat{x} \cos \varphi + \cancel{\hat{x}i \sin \varphi} - \cancel{i\hat{y} \cos \varphi} + \hat{y} \sin \varphi \\ (\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\varphi} &= (\hat{x} + i\hat{y})(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \hat{x} \cos \varphi - \cancel{\hat{x}i \sin \varphi} + \cancel{i\hat{y} \cos \varphi} + \hat{y} \sin \varphi \\ \Rightarrow [\dots] &= 2\hat{x} \cos \varphi + 2\hat{y} \sin \varphi \Rightarrow \frac{r}{2} \sin \theta [\dots] + r \cos \theta \hat{z} = \\ &= r \cos \varphi \sin \theta \hat{x} + r \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + r \cos \theta \hat{z} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \vec{r} \end{aligned}$$

**Άσκηση 4.** Έχοντας δεδομένο ότι οι συντελεστές Einstein δίνονται από τις Εξ. 3.79, 3.80, 3.81

$$B_{12} = \frac{\mathcal{P}^2 \pi}{6\hbar^2 \epsilon_0},$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3},$$

$$B_{12} = B_{21},$$

υπολογίστε τους για τις ατομικές μεταβάσεις  $100 \rightarrow 210$  και  $100 \rightarrow 21 \pm 1$  στο άτομο του Υδρογόνου. Δεχτείτε ότι βρισκόμαστε σε συντονισμό.

Λύση:

Οι πράξεις στην Ενότητα 3.11 δείχνουν ότι

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{P}}_{100210} &= -\frac{2^{15/2}}{3^5} ea_0 \hat{z} & \Rightarrow |\vec{\mathcal{P}}_{100210}| &= \frac{2^{15/2}}{3^5} ea_0 \\ \vec{\mathcal{P}}_{10021\pm 1} &= -\frac{2^7}{3^5} (\hat{x} \pm i\hat{y}) ea_0 & \Rightarrow |\vec{\mathcal{P}}_{10021\pm 1}| &= \frac{2^{15/2}}{3^5} ea_0\end{aligned}$$

Οπότε ενιαία μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{P} = \frac{2^{15/2}}{3^5} ea_0$$

Άρα,  $\mathcal{P} \approx \frac{2^{15/2}}{3^5} 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \approx 0.6313 \times 10^{-29} \text{ Cm}$ , αφού το στοιχειώδες φορτίο  $e \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$  και η ακτίνα Bohr  $a_0 \approx 0.529 \text{ \AA}$ . Επομένως,

$$B = B_{12} = B_{21} \approx 0.02121 \times 10^{22} \frac{\text{m}^3}{\text{Js}^2}$$

Λάβαμε τη διηλεκτρική σταθερά του κενού  $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  και την ανηγμένη σταθερά Planck  $\hbar \approx 1.054 \times 10^{-34} \text{ Js}$ .

Αφού δεχτήκαμε ότι βρισκόμαστε σε συντονισμό  $\Delta := \omega - \Omega = 0 \Rightarrow \omega = \Omega$ . Ας υπολογίσουμε, λοιπόν, το  $\Omega$ . Για τις στάθμες του ατόμου του υδρογόνου έχουμε  $E_n = -13.6 \text{ eV}/n^2$ . Άρα,  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ ,  $E_2 = -3.4 \text{ eV} \Rightarrow E_2 - E_1 = 10.2 \text{ eV} \Rightarrow \Omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \approx 15.5 \times 10^{15} \text{ Hz} = 15.5 \text{ PHz}$

$$A_{21} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B = \frac{8\pi \hbar^3 \omega^3}{h^2 c^3} B = \frac{2\hbar \Omega^3}{\pi c^3} B \approx \frac{\Omega^3 \mathcal{P}^2}{3c^3 \hbar \epsilon_0} \approx 1.963 \times 10^9 \text{ Hz}$$

Ως Άσκηση 5. Κάποιες ενδεικτικές πράξεις για την Ενότητα 3.11.

$$\begin{aligned}
 100 \vec{r} 100 &= (\pi a_0^3)^{-1/2} (\pi a_0^3)^{-1/2} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi e^{-\frac{2r}{a_0}} r \left\{ \frac{\sin \theta}{2} \left[ (\hat{i} - i\hat{j})e^{i\phi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\hat{i} + i\hat{j})e^{-i\phi} \right] + \hat{k} \cos \theta \right\} \\
 &= \frac{a_0^4}{\pi a_0^3} \int_0^\infty \left( \frac{r}{a_0} \right)^3 e^{-\frac{2r}{a_0}} d\left( \frac{r}{a_0} \right) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi \left\{ \frac{\sin \theta}{2} \left[ (\hat{i} - i\hat{j})e^{i\phi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\hat{i} + i\hat{j})e^{-i\phi} \right] + \hat{k} \cos \theta \right\} \\
 &= \frac{a_0}{\pi} \int_0^\infty q^3 e^{-2q} dq \left\{ \int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2 \theta}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \left[ (\hat{i} - i\hat{j})e^{i\phi} + (\hat{i} + i\hat{j})e^{-i\phi} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta \hat{k} \int_0^{2\pi} d\phi \right\}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty q^3 e^{-2q} dq = 2^{-(3+1)} 3! = \frac{2 \cdot 3}{2^4} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$\gamma = 2 \quad n = 3$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi [\dots] = (\hat{i} - i\hat{j}) \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi} + (\hat{i} + i\hat{j}) \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i\phi}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{\pm i\phi} = \int_0^{2\pi} d\phi \cos(\pm\phi) + i \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\pm\phi) = \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \pm i \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi = 0$$

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2 \theta}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4} \left\{ \pi - \int_0^\pi \cos 2\theta \right\} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin 2\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{-\cos 2\theta}{2} \Big|_0^\pi \right] = 0$$

$$\text{Άρα } 100 \vec{r} 100 = \frac{a_0}{\pi} \frac{3}{2^3} \left\{ \frac{\pi}{4} \cdot 0 + 0 \cdot 2\pi \right\} = 0, \text{ αναμενόμενο διότι}$$

$$100 \vec{r} 100 = \int (\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha)(\text{περιπ}\tau\eta)(\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha) = 0$$

ιη'

$$\begin{aligned}
 \text{Ενώ, } 100\ 100 &= (\pi a_0^3)^{-1} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi e^{-\frac{2r}{a_0}} \\
 &= \frac{a_0^3}{\pi a_0^3} \int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right) \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dq q^2 e^{-2q} \left[ -\cos \theta \right]_0^\pi \cdot 2\pi = \frac{1}{\pi} 2^{-(2+1)} 2!(1+1) \cdot 2\pi = \frac{2^3}{2^3} = 1 \\
 \gamma &= 2 \quad n = 2
 \end{aligned}$$

Αναμενόμενο γιατί η  $\Phi_{100}(\vec{r})$  είναι κανονικοποιημένη.

$$\begin{aligned}
 100\ \vec{r}\ 200 &= (\pi a_0^3)^{-1/2} (32\pi a_0^3)^{-1/2} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi e^{-\frac{r}{a_0}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} r \\
 &\quad \left\{ \frac{\sin \theta}{2} \left[ (\hat{i} - \hat{j})e^{i\phi} + (\hat{i} + \hat{j})e^{-i\phi} \right] + \hat{k} \cos \theta \right\} \\
 &= \frac{a_0^4}{\pi a_0^3 4\sqrt{2}} \int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right) \left(\frac{r}{a_0}\right)^3 e^{-\frac{3r}{2a_0}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi \left\{ \frac{\sin \theta}{2} \left[ \dots \right] + \hat{k} \cos \theta \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty dq q^3 e^{-\frac{3q}{2}} (2 - q) &= 2 \int_0^\infty dq q^3 e^{-\frac{3q}{2}} - \int_0^\infty dq q^4 e^{-\frac{3q}{2}} = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{-(3+1)} 3! - \left(\frac{3}{2}\right)^{-(4+1)} 4! \\
 \gamma &= \frac{3}{2} \quad n = 3 \qquad \qquad \gamma = \frac{3}{2} \quad n = 4 \\
 &= \frac{2 \cdot 2^4}{3^4} 2 \cdot 3 - \frac{2^5}{3^5} 2 \cdot 3 \cdot 2^2 = \frac{2^6}{3^3} - \frac{2^8}{3^4} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - \left(\frac{4}{3}\right)^4
 \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2 \theta}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \left[ (\hat{i} - \hat{j})e^{i\phi} + (\hat{i} + \hat{j})e^{-i\phi} \right] + \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta \hat{k} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi}{4} \cdot 0 + 0 \cdot 2\pi = 0$$

Άρα,  $100\ \vec{r}\ 200 = \frac{a_0}{\pi 4\sqrt{2}} \left( \left(\frac{4}{3}\right)^3 - \left(\frac{4}{3}\right)^4 \right) \cdot 0 = 0$ , αναμενόμενο διότι,

$$100\ \vec{r}\ 200 = \int (\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha)(\pi\epsilon\rho\iota\tau\tau\eta)(\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Ενώ, } 100\ 200 &= (\pi a_0^3)^{-1/2} (32\pi a_0^3)^{-1/2} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi e^{-\frac{r}{a_0}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \\
&= \frac{a_0^3}{\pi a_0^3 4\sqrt{2}} \int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right) \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{3r}{2a_0}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty dq q^2 e^{-\frac{3q}{2}} (2 - q) 4\pi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2 \int_0^\infty dq q^2 e^{-\frac{3q}{2}} - \int_0^\infty dq q^3 e^{-\frac{3q}{2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{-(2+1)} 2! - \left(\frac{3}{2}\right)^{-(3+1)} 3! \right\} \\
&\quad \gamma = \frac{3}{2} \quad n = 2 \quad \gamma = \frac{3}{2} \quad n = 3 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{2^5}{3^3} - \frac{2^5}{3^3} \right\} = 0
\end{aligned}$$

Αναμενόμενο διότι οι  $\Phi_{100}(\vec{r})$  και  $\Phi_{200}(\vec{r})$  είναι ορθογώνιες.

$$\begin{aligned}
200\ 200 &= \frac{1}{32\pi a_0^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \\
&= \frac{a_0^3}{32\pi a_0^3} \int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right) \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi}_{4\pi \text{ (ολική στερεά γωνία)}} \\
&= \frac{1}{8} \left\{ \int_0^\infty dq q^2 (4 + q^2 - 4q) e^{-q} \right\} \\
&= \frac{1}{8} \left\{ 4 \int_0^\infty dq q^2 e^{-q} + \int_0^\infty dq q^4 e^{-q} - 4 \int_0^\infty dq q^3 e^{-q} \right\} \\
&\quad \gamma = 1 \quad n = 2 \quad \gamma = 1 \quad n = 4 \quad \gamma = 1 \quad n = 3 \\
&= \frac{1}{8} \left\{ 4 \cdot 1^{-(2+1)} 2! + 1^{-(4+1)} 4! - 4 \cdot 1^{-(3+1)} 3! \right\} = \frac{8 + 4! - 4!}{8} = 1
\end{aligned}$$

Αναμενόμενο διότι η  $\Phi_{200}(\vec{r})$  είναι κανονικοποιημένη.

$\chi'$

$$\begin{aligned}
 200 \vec{r} 200 &= (32\pi a_0^3)^{-1/2} (32\pi a_0^3)^{-1/2} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi e^{-\frac{r}{a_0}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 r \\
 &\quad \left\{ \frac{\sin \theta}{2} \left[ (\hat{i} - \hat{j}) e^{i\phi} + (\hat{i} + \hat{j}) e^{-i\phi} \right] + \hat{k} \cos \theta \right\} \\
 &= \frac{a_0^4}{32\pi a_0^3} \int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right) \left(\frac{r}{a_0}\right)^3 e^{-\frac{r}{a_0}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi \\
 &\quad \left\{ \frac{\sin \theta}{2} \left[ \dots \right] + \hat{k} \cos \theta \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty dq q^3 (2 - q)^2 e^{-q} &= \int_0^\infty dq q^3 (4 + q^2 - 4q) e^{-q} = \\
 &= 4 \int_0^\infty dq q^3 e^{-q} + \int_0^\infty dq q^5 e^{-q} - 4 \int_0^\infty dq q^4 e^{-q} \\
 &\quad \gamma = 1 \quad n = 3 \quad \gamma = 1 \quad n = 5 \quad \gamma = 1 \quad n = 4 \\
 &= 4 \cdot 1^{-(3+1)} 3! + 1^{-(5+1)} 5! - 4 \cdot 1^{-(4+1)} 4! = 4! + 4!5 - 4!4 = \\
 &= 4!(1 + 5 - 4) = 2 \cdot 4!
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \int_0^{2\pi} d\phi \left[ (\hat{i} - \hat{j}) e^{i\phi} + (\hat{i} + \hat{j}) e^{-i\phi} \right] + \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta \hat{k} \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &\int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} - \left[ \frac{\sin 2\theta}{2 \cdot 2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \\
 &\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta = \int_0^\pi \sin \theta d(\sin \theta) = 0
 \end{aligned}$$

Οπότε:

$$200 \vec{r} 200 = \frac{a_0}{32\pi} 2 \cdot 4! \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 2\pi \right\} = 0$$

Αναμενόμενο διότι  $\int (\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha)(\text{περιττή})(\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha) = 0$



#### A'.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 4:

Κβαντική αντιμετώπιση της αλληλεπιδράσεως HM πεδίου - Δισταθμικού Συστήματος. Κβάντωση HM πεδίου.

**Άσκηση 1.** Ο δείκτης του HM τρόπου  $m$  παραλείπεται για απλότητα.

(A) Να βρείτε τι κάνουν οι όροι  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $\hat{a} \hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{S}_+ \hat{S}_-$ ,  $\hat{S}_- \hat{S}_+$ ,  $\hat{S}_+ \hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{S}_+ \hat{a}$ ,  $\hat{S}_- \hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{S}_- \hat{a}$ , στις καταστάσεις  $|\downarrow, n\rangle$  και  $|\uparrow, n\rangle$ .

(B) Να υπολογιστούν τα  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ ,  $\langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_+ \hat{a} \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_- \hat{a} \rangle$ , για τις καταστάσεις  $|\downarrow, n\rangle$  και  $|\uparrow, n\rangle$ .

Απάντηση:

(A)

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |\uparrow, n\rangle = \hat{a}^\dagger \sqrt{n} |\uparrow, n-1\rangle = \sqrt{n} \sqrt{n} |\uparrow, n\rangle = n |\uparrow, n\rangle,$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |\downarrow, n\rangle = \hat{a}^\dagger \sqrt{n} |\downarrow, n-1\rangle = \sqrt{n} \sqrt{n} |\downarrow, n\rangle = n |\downarrow, n\rangle.$$

$$\hat{a} \hat{a}^\dagger |\uparrow, n\rangle = \hat{a} \sqrt{n+1} |\uparrow, n+1\rangle = \sqrt{n+1} \sqrt{n+1} |\uparrow, n\rangle = (n+1) |\uparrow, n\rangle,$$

$$\hat{a} \hat{a}^\dagger |\downarrow, n\rangle = \hat{a} \sqrt{n+1} |\downarrow, n+1\rangle = \sqrt{n+1} \sqrt{n+1} |\downarrow, n\rangle = (n+1) |\downarrow, n\rangle.$$

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- |\uparrow, n\rangle = \hat{S}_+ |\downarrow, n\rangle = |\uparrow, n\rangle = 1 |\uparrow, n\rangle, \text{ ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή } 1$$

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- |\downarrow, n\rangle = \hat{S}_+ |0, n\rangle = |0, n\rangle = 0 |\downarrow, n\rangle, \text{ ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή } 0^1.$$

$$\hat{S}_- \hat{S}_+ |\uparrow, n\rangle = \hat{S}_- |0, n\rangle = |0, n\rangle = 0 |\uparrow, n\rangle, \text{ ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή } 0^2$$

$$\hat{S}_- \hat{S}_+ |\downarrow, n\rangle = \hat{S}_- |\uparrow, n\rangle = |\downarrow, n\rangle = 1 |\downarrow, n\rangle, \text{ ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή } 1.$$

$$\hat{S}_+ \hat{a}^\dagger |\uparrow, n\rangle = \sqrt{n+1} |0, n+1\rangle,$$

$$\hat{S}_+ \hat{a}^\dagger |\downarrow, n\rangle = \sqrt{n+1} |\uparrow, n+1\rangle.$$

$$\hat{S}_+ \hat{a} |\uparrow, n\rangle = \sqrt{n} |0, n-1\rangle,$$

---


$${}^1\text{διότι } 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\text{διότι } 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\kappa\beta'$

$$\hat{S}_+ \hat{a} |\downarrow, n\rangle = \sqrt{n} |\uparrow, n-1\rangle.$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_- \hat{a}^\dagger |\uparrow, n\rangle &= \sqrt{n+1} |\downarrow, n+1\rangle, \\ \hat{S}_- \hat{a}^\dagger |\downarrow, n\rangle &= \sqrt{n+1} |0, n+1\rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_- \hat{a} |\uparrow, n\rangle &= \sqrt{n} |\downarrow, n-1\rangle, \\ \hat{S}_- \hat{a} |\downarrow, n\rangle &= \sqrt{n} |0, n-1\rangle. \end{aligned}$$

(B)

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{|\uparrow, n\rangle} &= \langle \uparrow, n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \uparrow, n \rangle = n \langle \uparrow, n | \uparrow, n \rangle = n, \\ \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{|\downarrow, n\rangle} &= \langle \downarrow, n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \downarrow, n \rangle = n \langle \downarrow, n | \downarrow, n \rangle = n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle_{|\uparrow, n\rangle} &= \langle \uparrow, n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | \uparrow, n \rangle = (n+1) \langle \uparrow, n | \uparrow, n \rangle = n+1, \\ \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle_{|\downarrow, n\rangle} &= \langle \downarrow, n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | \downarrow, n \rangle = (n+1) \langle \downarrow, n | \downarrow, n \rangle = n+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{|\uparrow, n\rangle} &= \langle \uparrow, n | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \uparrow, n \rangle = \langle \uparrow, n | \uparrow, n \rangle = 1, \\ \langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{|\downarrow, n\rangle} &= \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \downarrow, n \rangle = \langle \downarrow, n | 0, n \rangle = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle_{|\uparrow, n\rangle} &= \langle \uparrow, n | \hat{S}_- \hat{S}_+ | \uparrow, n \rangle = \langle \uparrow, n | 0, n \rangle = 0, \\ \langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle_{|\downarrow, n\rangle} &= \langle \downarrow, n | \hat{S}_- \hat{S}_+ | \downarrow, n \rangle = \langle \downarrow, n | \downarrow, n \rangle = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \rangle_{|\uparrow, n\rangle} &= \langle \uparrow, n | \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger | \uparrow, n \rangle = \sqrt{n+1} \langle \uparrow, n | 0, n+1 \rangle = 0, \\ \langle \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \rangle_{|\downarrow, n\rangle} &= \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger | \downarrow, n \rangle = \sqrt{n+1} \langle \downarrow, n | \uparrow, n+1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_+ \hat{a} \rangle_{|\uparrow, n\rangle} &= \langle \uparrow, n | \hat{S}_+ \hat{a} | \uparrow, n \rangle = \sqrt{n} \langle \uparrow, n | 0, n-1 \rangle = 0, \\ \langle \hat{S}_+ \hat{a} \rangle_{|\downarrow, n\rangle} &= \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ \hat{a} | \downarrow, n \rangle = \sqrt{n} \langle \downarrow, n | \uparrow, n-1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \rangle_{|\uparrow, n\rangle} &= \langle \uparrow, n | \hat{S}_- \hat{a}^\dagger | \uparrow, n \rangle = \sqrt{n+1} \langle \uparrow, n | \downarrow, n+1 \rangle = 0, \\ \langle \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \rangle_{|\downarrow, n\rangle} &= \langle \downarrow, n | \hat{S}_- \hat{a}^\dagger | \downarrow, n \rangle = \sqrt{n+1} \langle \downarrow, n | 0, n+1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_- \hat{a} \rangle_{|\uparrow, n\rangle} &= \langle \uparrow, n | \hat{S}_- \hat{a} | \uparrow, n \rangle = \sqrt{n} \langle \uparrow, n | \downarrow, n-1 \rangle = 0, \\ \langle \hat{S}_- \hat{a} \rangle_{|\downarrow, n\rangle} &= \langle \downarrow, n | \hat{S}_- \hat{a} | \downarrow, n \rangle = \sqrt{n} \langle \downarrow, n | 0, n-1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

♣ Για το ηλεκτρόνιο ισχύουν σχέσεις αντιμεταθέσεως (Εξ. 4.141). Μεταξύ άλλων, είχαμε αποδείξει (Εξ. 4.120) ότι

$$\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+ = \hat{\mathbf{I}} \Rightarrow \hat{S}_- \hat{S}_+ = \hat{\mathbf{I}} - \hat{S}_+ \hat{S}_- \Rightarrow \langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle = \langle \hat{\mathbf{I}} \rangle - \langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle$$

Αλλά αν μια κατάσταση  $|\kappa\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  είναι κανονικοποιημένη, τότε  $\langle \hat{\mathbf{I}} |_{|\kappa\rangle} = \langle \kappa | \hat{\mathbf{I}} | \kappa \rangle =$

$\langle \kappa | \kappa \rangle = \begin{bmatrix} a^* & b^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = |a|^2 + |b|^2 = 1$ . Άρα,  $\langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle = 1 - \langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle$ , πράγμα που συμφωνεί με τα παραπάνω.

♠ Για τα φωτόνια ισχύουν σχέσεις μεταθέσεως (Εξ. 4.139). Μεταξύ άλλων, είχαμε αποδείξει ότι  $[\hat{a}_m, \hat{a}_\ell^\dagger] = \delta_{m\ell} \Rightarrow [\hat{a}_m, \hat{a}_m^\dagger] = 1 \Rightarrow \hat{a}_m \hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m = 1 \Rightarrow \hat{a}_m \hat{a}_m^\dagger = 1 + \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \Rightarrow \langle \hat{a}_m \hat{a}_m^\dagger \rangle = 1 + \langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle$ , πράγμα που συμφωνεί με τα παραπάνω.

**Άσκηση 2.** Να αποδειχτούν:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \\ \text{(II)} \quad & [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \\ \text{(III)} \quad & \hat{N}(\hat{a}|n\rangle) = (n-1)(\hat{a}|n\rangle) \\ \text{(IV)} \quad & \hat{N}(\hat{a}^\dagger|n\rangle) = (n+1)(\hat{a}^\dagger|n\rangle) \end{aligned}$$

όπου  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , δηλαδή ο τελεστής του αριθμού των φωτονίων,  $\hat{a}^\dagger$  ο τελεστής δημιουργίας φωτονίων και  $\hat{a}$  ο τελεστής καταστροφής φωτονίων.

**Άσκηση 3.** Από την Εξ. 4.81, χρησιμοποιώντας τις Εξ. 4.98 και 4.99 αλλά και την Εξ. 4.96 να αποδειχτεί η Εξ. 4.100.

**Άσκηση 4.** Θεωρήστε την αναβίβαση και καταβίβαση ηλεκτρονίου μεταξύ των ενεργειακών σταθμών δισταθμικού συστήματος ( $\Delta\Sigma$ ).

(α') Ορίστε τους σπίνορες που περιγράφουν το ηλεκτρόνιο σε κάθε μία από τις δύο στάθμες του  $\Delta\Sigma$  καθώς και στο κενό, σε μορφή πινάκων στήλης.

(β') Ορίστε τους τελεστές αναβιβάσεως και καταβιβάσεως ηλεκτρονίων,  $\hat{S}_+$  και  $\hat{S}_-$  σε μορφή πινάκων. Δείξτε τι αποτέλεσμα έχει η δράση τους στους σπίνορες.

(γ') Βρείτε τα  $\hat{S}_+ + \hat{S}_-$  καθώς και  $\hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+$ .

(δ') Δείξτε ότι η χαμιλτονιανή που περιγράφει το  $\Delta\Sigma$  είναι  $\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+$  και δείξτε πως προκύπτει  $H_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-$ .

(ε') Δείξτε ότι

$$\{\hat{S}_+, \hat{S}_+^\dagger\} = \hat{\mathbf{I}} \quad \{\hat{S}_-, \hat{S}_-^\dagger\} = \hat{\mathbf{I}} \quad \{\hat{S}_+, \hat{S}_+\} = \hat{\mathbf{0}} \quad \{\hat{S}_-, \hat{S}_-\} = \hat{\mathbf{0}}$$

κδ'

$\hat{\mathbf{I}}$  είναι ο διαγώνιος μοναδιαίος πίνακας  $2 \times 2$  και  $\hat{\mathbf{0}}$  είναι ο μηδενικός πίνακας  $2 \times 2$ .  
(ς') Ας θυμηθούμε τώρα τους πίνακες Pauli  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$ ,  $\hat{\sigma}_z$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Αποδείξτε ότι οι πίνακες Pauli αντιμετατίθενται.

## A'.5 Ασκήσεις Κεφαλαίου 5: Lasers.

**Άσκηση 1.** Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\rho$  συναρτήσει του  $\tau$  και να εξηγηθούν με τη βοήθεια των Εξ. 5.73, 5.74, 5.75 μεταβάλλοντας το  $\tau_1 = 0.25$  ή  $0.5$  ή  $0.75$  ή  $1.0$  ή  $1.5$  και διατηρώντας τα  $r_N = 1.5$ ,  $A'/A = 10^{-9}$ ,  $\tau_0 = 10$ .

**Άσκηση 2.** Θεωρήστε τις διαφορικές εξισώσεις ρυθμών laser στην αδιάστατη μορφή

$$\begin{aligned}\frac{d\nu_1}{d\tau} &= \nu_2 + \rho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \\ \frac{d\nu_2}{d\tau} &= r_N + \rho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \\ \frac{d\rho}{d\tau} &= -\frac{\rho}{\tau_0} + \left\{ \frac{A'}{A}\nu_2 + \rho(\nu_2 - \nu_1) \right\} \frac{1}{\tau_0(1 - \tau_1)}\end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι εάν  $\frac{A'}{A} \ll 1$ , τότε στη στάσιμη κατάσταση ισχύουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \tau_1 r_N, \quad \forall r_N \\ \nu_2 &= \begin{cases} r_N, & \forall r_N < 1 \\ \tau_1 r_N + (1 - \tau_1), & \forall r_N > 1 \end{cases} \\ \rho &= \begin{cases} 0, & \forall r_N < 1 \\ r_N - 1, & \forall r_N > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

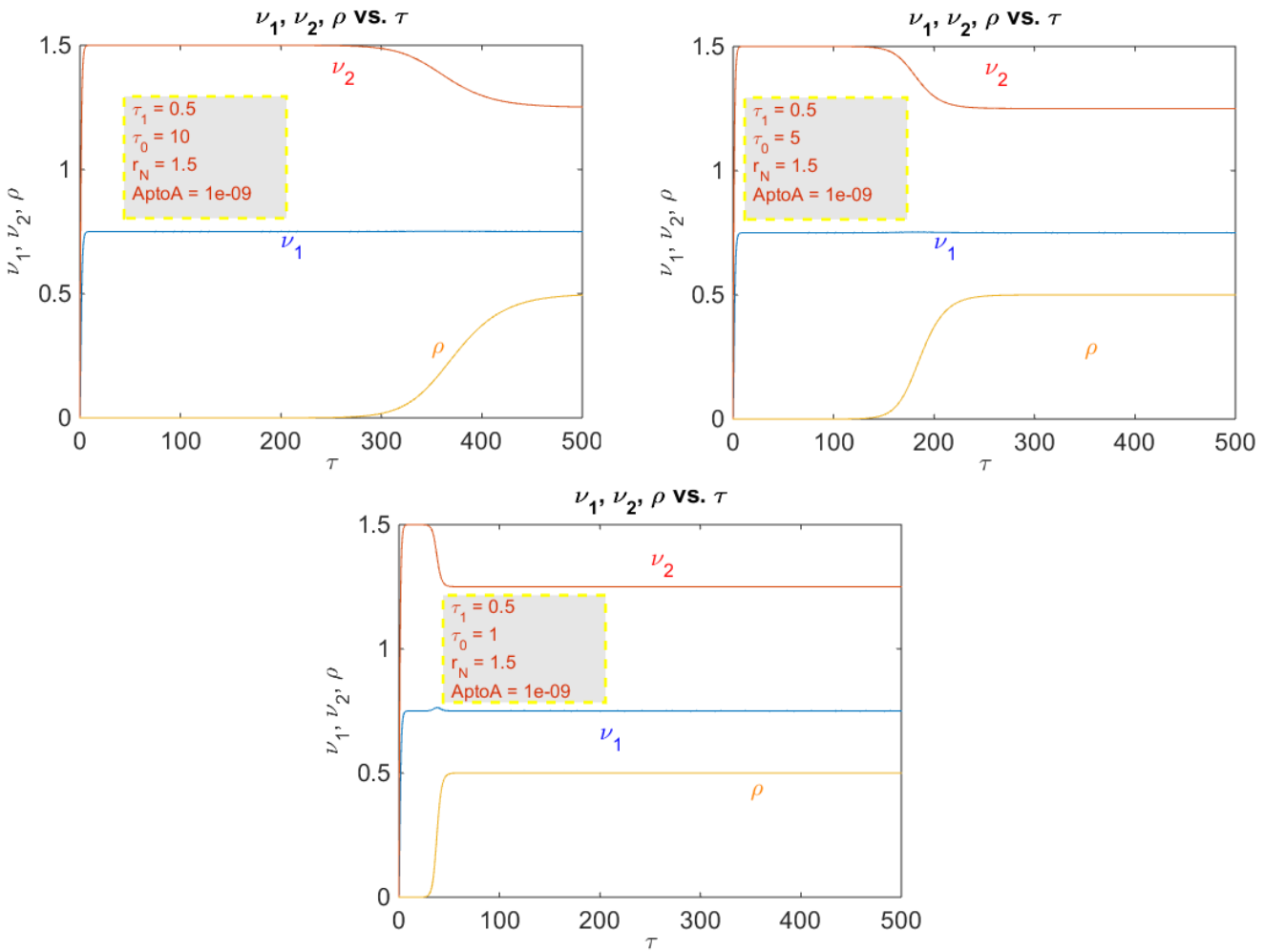
**Άσκηση 3.** Στο Σχήμα A'.1 οι εικόνες παριστάνουν τη λύση των εξισώσεων Εξ. 5.73, 5.74, 5.75 μεταβάλλοντας το  $\tau_0 = 10$  ή  $5.0$  ή  $1.0$  και διατηρώντας  $\tau_1 = 0.5$ ,  $r_N = 1.5$ ,  $A'/A = 10^{-9}$ .

(α') Πόσος είναι ο λόγος των χρόνων ζωής των σταθμών 1 και 2;

(β') Γιατί υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η  $\rho$  για να γίνει αισθητή;

~~(γ') Στην τελευταία εικόνα παρατηρούμε μια πρόσκαιρη μικρή αύξηση της  $\nu_1$  κατά την απότομη πτώση της  $\nu_2$  η οποία συνοδεύεται με απότομη αύξηση της  $\rho$ . Εξηγήστε γιατί το τοπικό αυτό ακρότατο της  $\nu_1$  ταυτίζεται με σημείο καμπής της  $\nu_2$ .~~

κτ'



Σχήμα Α.1: Η λύση των εξισώσεων Εξ. 5.73, 5.74, 5.75, αν μεταβάλλουμε το  $\tau_0 = 10$  ή 5.0 ή 1.0, διατηρώντας  $\tau_1 = 0.5$ ,  $r_N = 1.5$ ,  $A'/A = 10^{-9}$ . Στην εικόνα εμφανίζεται  $\rho$  αλλά πρόκειται για το αδιάστατο  $\varrho$  της Εξ. 5.75.

**Άσκηση 4.** Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\rho$  συναρτήσει του  $\tau$  και να εξηγηθούν με τη βοήθεια των Εξ. 5.73, 5.74, 5.75, αν μεταβάλλουμε το  $A'/A = 10^{-9}$  ή  $10^{-4}$  ή  $10^{-1}$  διατηρώντας τα  $\tau_1 = 0.5$ ,  $\tau_0 = 10$ ,  $r_N = 1.5$ .

## A'.6 Ασκήσεις Κεφαλαίου 6: Πίνακας Πυκνότητας.

**Άσκηση 1.** Αποδείξτε ότι εάν η Χαμιλτονιανή είναι χρονικώς ανεξάρτητη, η Εξ. 6.33 έχει λύση

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\hat{\rho}(0)e^{i\hat{H}t/\hbar}.$$

**Άσκηση 2.** Από την Εξ. 6.41 αποδείξτε την Εξ. 6.37.

Λύση: Από την Εξ. 6.41 έχουμε

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\rho}_{nm} &= [\hat{H}, \hat{\rho}]_{nm} = \langle n | \hat{H}\hat{\rho} | m \rangle - \langle n | \hat{\rho}\hat{H} | m \rangle = \\ &= \sum_{\ell} \langle n | \hat{H} | \ell \rangle \langle \ell | \hat{\rho} | m \rangle - \sum_{\ell} \langle n | \hat{\rho} | \ell \rangle \langle \ell | \hat{H} | m \rangle = \\ &= \sum_{\ell} (H_{n\ell}\rho_{\ell m} - \rho_{n\ell}H_{\ell m}) \end{aligned}$$

που είναι η Εξ. 6.37.

**Άσκηση 3.** Ορίζοντας τον Πίνακα 6.49, χρησιμοποιώντας τις Εξ. 6.53 και 6.54, υποθέτωντας ότι  $U_{\varepsilon 21}(t) = U_{\varepsilon 12}(t)$ , αποδείξτε ότι η χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας με μηχανισμούς αποδιεγέρσεως δίνεται από την Εξ. 6.55.

## A'.7 Αναφορές Ασκήσεων.

Η αρίθμηση αναφέρεται στη βιβλιογραφία όπως αυτή παρατίθεται συνολικά πριν από τα Παραρτήματα.

[55] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Muehlig, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch (2001), Thun und Frankfurt am Main, ISBN: 3817120052 (Buch), ISBN: 381712015X (Buch mit CD-ROM).

# Παράρτημα Β'

## ΒΟΗΘΗΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΛΕΠΤΟΜΕΡΕΙΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ

### Β'.1 Αριθμητική πρόοδος.

Υπενθυμίζεται ο ορισμός της αριθμητικής προόδου  $(a_n)$  και μερικές σχετικές σχέσεις.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \varpi, \quad n = (0), 1, 2, 3, \dots && \varpi \text{ διαφορά} \\ a_n &= a_1 + (n - 1)\varpi && \text{αναδρομικός τύπος} \\ \beta &= \frac{\alpha + \gamma}{2} && \beta \text{ ο αριθμητικός μέσος} \\ S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) && \text{άθροισμα } n \text{ πρώτων όρων} \end{aligned} \tag{B'.1}$$

### Β'.2 Γεωμετρική πρόοδος.

Υπενθυμίζεται ο ορισμός της γεωμετρικής προόδου  $(a_n)$  και μερικές σχετικές σχέσεις.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lambda \neq 0, \quad n = (0), 1, 2, 3, \dots && \lambda \text{ λόγος} \\ a_n &= a_1 \lambda^{n-1} && \text{αναδρομικός τύπος} \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma && \beta \text{ γεωμετρικός μέσος} \\ S_n &= \begin{cases} a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}, & \lambda \neq 1 \\ a_1 n, & \lambda = 1 \end{cases} && \text{άθροισμα } n \text{ πρώτων όρων} \\ S_\infty &= \frac{a_1}{1 - \lambda} && \text{άθροισμα απείρων όρων } (|\lambda| < 1) \end{aligned} \tag{B'.2}$$

κη'



### B'.3 Μια αναπαράσταση της συναρτήσεως $\delta$ .

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση  $\delta_a(x) = \frac{1}{\pi|a|} \frac{\sin^2(ax)}{x^2}$ , όπου  $a \neq 0$  είναι μια προσέγγιση της  $\delta(x)$ . Επί παραδείγματι:

$$\begin{aligned} \star \quad \lim_{x \rightarrow 0} \delta_a(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\pi|a|} \frac{\sin^2(ax)}{a^2 x^2} a^2 = \frac{|a|}{\pi} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(ax)}{a^2 x^2} = \frac{|a|}{\pi} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \right)^2 \\ &= \frac{|a|}{\pi} \left( \lim_{ax \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \right)^2 = \frac{|a|}{\pi} 1^2 = \frac{|a|}{\pi} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \delta_a(x) = \frac{|a|}{\pi}} \Rightarrow \boxed{\lim_{a \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \delta_a(x) \right) = \infty} \end{aligned}$$

$$\star \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi|a|} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = \frac{1}{\pi|a|} \pi|a| = 1 \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) dx = 1}$$

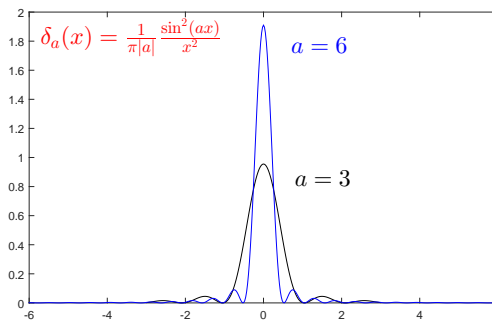
Μόλις χρησιμοποιήσαμε το ορισμένο ολοκλήρωμα [55]

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} |a|$$

με  $a \neq 0$ . Δηλαδή η συνάρτηση  $\delta_a(x)$  στο όριο  $a \rightarrow \infty$  παριστά την  $\delta(x)$  ήτοι

$$\boxed{\lim_{a \rightarrow \infty} \delta_a(x) = \delta(x)}$$

Στο Σχήμα B'.1 φαίνεται η  $\delta_a(x)$  για  $a = 3, 6$ .



Σχήμα B'.1: Η  $\delta_a(x)$  για  $a = 3, 6$ .

Οπότε, εντελώς κατά προσέγγιση θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\boxed{\delta(x) \sim \frac{1}{\pi|a|} \frac{\sin^2(ax)}{x^2}} \quad (\text{B'.3})$$

λ'

Ας παίξουμε λίγο με τη συνάρτηση με προτασιακό τύπο

$$f(x) \equiv \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (\text{B'.4})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} \right)^2 = 1 \quad (\text{B'.5})$$

δηλαδή για  $x = 0$  έχουμε απόλυτο μέγιστο με τιμή 1.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \text{για } x = n\pi, n \in \mathbb{Z}^* \text{ έχουμε απόλυτα ελάχιστα με τιμή } 0 \quad (\text{B'.6})$$

Ας ψάξουμε για τοπικά μέγιστα και ελάχιστα

$$f'(x) = \frac{2 \sin x \cos x x^2 - \sin^2 x 2x}{x^4} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x \sin x (x \cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{x=0}_{\downarrow} \quad \text{ή} \quad \underbrace{\sin x = 0}_{\downarrow} \quad \text{ή} \quad \underbrace{x = \tan x}_{\downarrow}$$

το απόλυτο μέγιστο

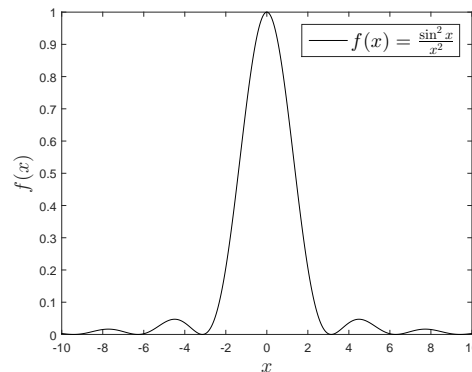
τα απόλυτα ελάχιστα

$x \simeq \pm 4.49, \pm 7.72, \dots$

$x = n\pi, n \in \mathbb{Z}^*$

αν το διερευνήσουμε θα διαπιστώσουμε ότι πρόκειται για τοπικά μέγιστα

Η γραφική παράσταση της  $f(x)$  παρουσιάζεται στο Σχήμα Β'.2.



Σχήμα Β'.2:  $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ .

### B'.4 Από την Εξ. 3.27 στην Εξ. 3.28.

Η Εξ. 3.27 είναι

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) \right] = [\hat{H}_0 + U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)] \left[ \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) \right].$$

Ας υπολογίσουμε τα δύο μέλη αυτής της εξίσωσης. Το Α' μέλος:

$$A' = i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) + i\hbar \sum_k C_k(t) (-i\Omega_k) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r})$$

Οπότε λόγω της Εξ. 3.12 προκύπτει

$$A' = i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) + \sum_k C_k(t) E_k e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}).$$

Β' μέλος:

$$B' = \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} E_k \Phi_k(\vec{r}) + \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r}).$$

Άρα απλοποιώντας τον 2ο όρο του Α' μέλους με τον 1ο όρο του Β' μέλους προκύπτει

$$i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) = \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r}). \quad (\text{B'.7})$$

Τώρα εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι οι  $\Phi_k(\vec{r})$  είναι ορθοκανονικές. Πολλαπλασιάζουμε την Εξ. (B'.7) με  $\Phi_{k'}^*(\vec{r})$  και ολοκληρώνουμε στο χώρο.

$$i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t) e^{-i\Omega_k t} \int \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \Phi_k(\vec{r}) dV = \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \int \Phi_{k'}^*(\vec{r}) U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r}) dV \Rightarrow$$

Όμως αφού οι  $\Phi_k(\vec{r})$  είναι ορθοκανονικές,

$$\int \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \Phi_k(\vec{r}) dV = \delta_{k'k}$$

οπότε

$$i\hbar \dot{C}_{k'}(t) e^{-i\Omega_{k'} t} = \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} U_{\mathcal{E}k'k}(t). \quad (\text{B'.8})$$

λβ'

Ονομάσαμε

$$U_{\varepsilon k'k}(t) = \int \Phi_{k'}^*(\vec{r}) U_{\varepsilon}(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r}) dV = \langle \Phi_{k'} | U_{\varepsilon}(\vec{r}, t) | \Phi_k \rangle$$

τα στοιχεία πίνακα της δυναμικής ενέργειας της διαταραχής. Άρα, εν τέλει, καταλήγουμε στην

$$\dot{C}_{k'}(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_k C_k(t) e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k)t} U_{\varepsilon k'k}(t)$$

που είναι η Εξ. 3.28. Δηλαδή καταλήγουμε σε ένα Γραμμικό Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων 1<sup>ης</sup> Τάξεως. Αν λύσουμε το Σύστημα αυτό ουσιαστικά λύνουμε το πρόβλημα (3.21), (3.22).

### B'.5 Λύση για $\Delta = 0$ .

Παραθέτουμε την αναλυτική ΛΥΣΗ για  $\Delta = 0$ . Αν υποθέσουμε  $\Delta := \omega - \Omega = 0$

τότε  $A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & 0 \end{bmatrix}$  και  $\lambda_{2,1} = \pm \frac{\Omega_R}{2}$

Για  $\lambda_1 = -\frac{\Omega_R}{2}$

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = -\frac{\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\Omega_R}{2} v_{21} = -\frac{\Omega_R}{2} v_{11} \\ -\frac{\Omega_R}{2} v_{11} = -\frac{\Omega_R}{2} v_{21} \end{cases} \Rightarrow v_{21} = v_{11} \end{aligned} \right\}$$

Οπότε π.χ. το κανονικοποιημένο  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ .

Για  $\lambda_2 = \frac{\Omega_R}{2}$

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \frac{\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\Omega_R}{2} v_{22} = \frac{\Omega_R}{2} v_{12} \\ -\frac{\Omega_R}{2} v_{12} = \frac{\Omega_R}{2} v_{22} \end{cases} \Rightarrow v_{22} = -v_{12} \end{aligned} \right\}$$

Οπότε π.χ. το κανονικοποιημένο  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ .

Άρα

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \vec{v}_1 e^{-i\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{-i\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} C_1(t) e^{i\frac{(\Omega-\omega)}{2}t} \\ C_2(t) e^{-i\frac{(\Omega-\omega)}{2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \end{bmatrix} \Rightarrow (\text{υποθέσαμε } \Delta = 0) \Rightarrow$$

λδ'

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \end{bmatrix}$$

Έστωσαν Αρχικές Συνθήκες  $C_1(0) = 1$  και  $C_2(0) = 0$ . Άρα

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \frac{c_1}{\sqrt{2}} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow c_1 + c_2 = \sqrt{2} \\ 0 = \frac{c_1}{\sqrt{2}} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow c_1 = c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Οπότε

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{1}{2} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \\ i \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\boxed{\begin{array}{l} |C_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \\ |C_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \end{array}}$$

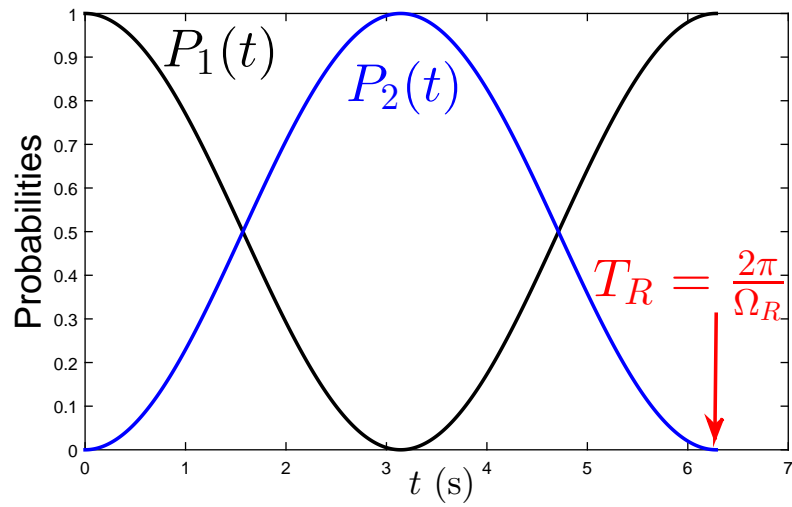
Φυσικά  $|C_k(t)|^2 := P_k(t)$  είναι η πιθανότητα να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο στη στάθμη  $k$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Η περίοδος των ταλαντώσεων είναι

$$\boxed{T_R = \frac{2\pi}{\Omega_R}}$$

Παρατηρούμε ότι στο συντονισμό όπου  $\omega = \Omega \Leftrightarrow \Delta = 0$ , το πλάτος των ταλαντώσεων είναι

$$\boxed{\mathcal{A} = 1}$$

Στη γενικότερη περίπτωση, το πλάτος εξαρτάται από το detuning π.χ.  $\mathcal{A} = \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2 + \Omega_R^2}$ . Στο Σχήμα 3.5 παρουσιάζονται αυτές οι ταλαντώσεις δισταθμικού συστήματος σε συντονισμό.



Σχήμα Β.3: Ταλαντώσεις δισταθμικού συστήματος σε συντονισμό, δηλαδή με  $\omega = \Omega \Leftrightarrow \Delta = 0$ . Η περίοδος των ταλαντώσεων είναι  $T_R = \frac{2\pi}{\Omega_R}$ , ενώ το πλάτος τους  $\mathcal{A} = 1$ . Εντελώς τυπικά θέσαμε στο σχήμα  $\Omega_R = 1 \text{ s}^{-1}$ , αλλά αυτή η τιμή δεν έχει κάποια σχέση με τις τιμές της  $\Omega_R$  σε πραγματικά συστήματα.

λτ'

## B'.6 Μερικές τριγωνομετρικές σχέσεις.

Θα αποδείξουμε τη σχέση που σημειώνεται με ★ στην Ενότητα 3.5, δηλαδή την

$$e^{ix} - 1 = 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}.$$

$$\cos x + i \sin x - 1 = 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) i \sin\left(\frac{x}{2}\right) = i \sin x - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\cos x - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \cos x - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

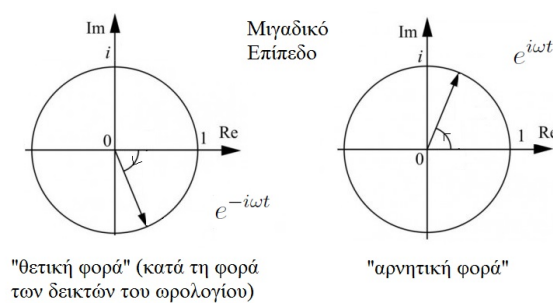
που ισχύει, διότι  $\cos(a \pm \beta) = \cos a \cos \beta \mp \sin a \sin \beta$

Κατ' αντιστοιχία παρατίθεται και η  $\sin(a \pm \beta) = \sin a \cos \beta \pm \sin \beta \cos a$

## B'.7 Περιστρεφόμενα διανύσματα.

Έστω ηλεκτρικό πεδίο της μορφής  $\vec{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 \hat{z} \cos \omega t$ . Μερικές φορές είναι βολικό να το αποσυνθέσουμε στη θετικώς περιστρεφόμενη και στην αρνητικώς περιστρεφόμενη του συνιστώσα,  $\vec{\mathcal{E}}(t)^{(+)}$  και  $\vec{\mathcal{E}}(t)^{-}$ , αντιστοίχως. Δηλαδή

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \hat{z} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \hat{z} e^{-i\omega t} + \frac{\mathcal{E}_0}{2} \hat{z} e^{i\omega t} := \vec{\mathcal{E}}(t)^{(+)} + \vec{\mathcal{E}}(t)^{-}$$



Σχήμα B'.4: Περιστρεφόμενα διανύσματα (Rotating Waves).



## Β'.8 Στοιχεία πίνακα τελεστή.

$$\langle \psi | \hat{M} | \phi \rangle = \int dx'' \int dx' \langle \psi | x'' \rangle \langle x'' | \hat{M} | x' \rangle \langle x' | \phi \rangle = \int dx'' \int dx' \psi^*(x'') \langle x'' | \hat{M} | x' \rangle \phi(x')$$

$$\left. \begin{aligned} \langle x'' | \hat{x} | x' \rangle &= \langle x'' | x' | x' \rangle = x' \langle x'' | x' \rangle = x' \delta(x'' - x') = x'' \delta(x'' - x') \\ \langle x'' | \hat{p} | x' \rangle &\stackrel{\text{αποδεικνύεται...} \blacktriangledown}{=} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x''} \delta(x'' - x') \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  αναπτύσσοντας σε δυνάμεις του  $\hat{x}$  και του  $\hat{p}$

$$\langle x'' | \hat{M}(\hat{x}, \hat{p}) | x' \rangle = M\left(x'', -i\hbar \frac{\partial}{\partial x''}\right) \delta(x'' - x') \quad 1\Delta$$

$$\langle \vec{r}'' | \hat{M}(\hat{r}, \hat{p}) | \vec{r}' \rangle = M(\vec{r}'', -i\hbar \vec{\nabla}'') \delta(\vec{r}'' - \vec{r}') \quad 3\Delta$$

οπότε π.χ.

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\ell | \hat{M} | \Phi_k \rangle &= \int d^3r' \int d^3r \langle \Phi_\ell | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \hat{M} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \Phi_k \rangle \\ &= \int d^3r' \int d^3r \Phi_\ell^*(\vec{r}') \hat{M}(\vec{r}', -i\hbar \vec{\nabla}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \Phi_k(\vec{r}) \\ &= \int d^3r \Phi_\ell^*(\vec{r}) \hat{M}(\vec{r}, -i\hbar \vec{\nabla}) \Phi_k(\vec{r}) \end{aligned}$$

που είναι η Εξ. 3.30.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \Leftrightarrow \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \Rightarrow$$

$$\langle x'' | \hat{x}\hat{p} | x' \rangle - \langle x'' | \hat{p}\hat{x} | x' \rangle = i\hbar \langle x'' | x' \rangle \Rightarrow$$

$$\langle x'' | x'' \hat{p} | x' \rangle - \langle x'' | \hat{p} x' | x' \rangle = i\hbar \delta(x'' - x') \Rightarrow$$

$$(x'' - x') \langle x'' | \hat{p} | x' \rangle = i\hbar \delta(x'' - x') \Rightarrow$$

$$\underbrace{\delta(x'' - x')}_{\text{αποδεικνύεται παρακάτω} \blacktriangledown} = -(x'' - x') \frac{\partial}{\partial x''} \delta(x'' - x') \Rightarrow$$

$$\cancel{(x'' - x')} \langle x'' | \hat{p} | x' \rangle = -i\hbar \cancel{(x'' - x')} \frac{\partial}{\partial x''} \delta(x'' - x') \Rightarrow$$

$$\langle x'' | \hat{p} | x' \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x''} \delta(x'' - x')$$

λη΄

Ομοίως, για την Εξ. 6.2, έχουμε

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{A} \rangle &= \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = \int d^3 r' \int d^3 r \langle \Psi(t) | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \hat{A} | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \Psi(t) \rangle \\
 &= \int d^3 r' \int d^3 r \Psi^*(\vec{r}, t) \hat{A}(\vec{r}, -i\hbar \vec{\nabla}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \Psi(\vec{r}', t) \\
 &= \int d^3 r \Psi^*(\vec{r}, t) \hat{A}(\vec{r}, -i\hbar \vec{\nabla}) \Psi(\vec{r}, t) \\
 &= \int d^3 r \sum_{k'} c_{k'}^*(t) \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \hat{A}(\vec{r}, -i\hbar \vec{\nabla}) \sum_k c_k(t) \Phi_k(\vec{r}) \\
 &= \sum_{k'} c_{k'}^*(t) \sum_k c_k(t) \int d^3 r \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \hat{A}(\vec{r}, -i\hbar \vec{\nabla}) \Phi_k(\vec{r}) \\
 &= \sum_{k, k'} c_k(t) c_{k'}^*(t) A_{k'k}
 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την Εξ. 6.1.

Ομοίως, για την Εξ. 6.7, έχουμε

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{A} \rangle_i &= \langle \Psi_i(t) | \hat{A} | \Psi_i(t) \rangle = \int d^3 r \int d^3 r' \langle \Psi_i(t) | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \hat{A} | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \Psi_i(t) \rangle \\
 &= \int d^3 r \int d^3 r' \langle \Psi_i(t) | \vec{r} \rangle \hat{A}(\vec{r}, -i\hbar \vec{\nabla}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \langle \vec{r}' | \Psi_i(t) \rangle \\
 &= \int d^3 r \langle \Psi_i(t) | \vec{r} \rangle \hat{A}(\vec{r}, -i\hbar \vec{\nabla}) \langle \vec{r} | \Psi_i(t) \rangle \\
 &= \int d^3 r \Psi_i^*(\vec{r}, t) \hat{A}(\vec{r}, -i\hbar \vec{\nabla}) \Psi_i(\vec{r}, t) \\
 &\text{ή απλούστερα} \\
 &= \int d^3 r \Psi_i^*(\vec{r}, t) \hat{A} \Psi_i(\vec{r}, t).
 \end{aligned}$$

▼ Ας κάνουμε την απόδειξη που αναφέραμε παραπάνω. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι

$$\boxed{x \delta'(x) = -\delta(x)} \quad (\text{B'.9})$$

Προς τούτο, θα ολοκληρώσουμε το αριστερό και δεξιό μέρος αφού το πολλαπλασιάσουμε με μια συνάρτηση  $f(x)$ .

Αριστερά:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta'(x)f(x)dx = \left[ x\delta(x)f(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \left( f(x) - xf'(x) \right) dx =$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)xf'(x)dx = -f(0) + 0 \cdot f'(0) = -f(0)$$

Δεξιά:

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = -f(0)$$

Συνδυάζοντας τα Αριστερά και τα Δεξιά προκύπτει η ζητούμενη ιδιότητα Β'.9. Οπότε,

$$x\delta'(x) = -\delta(x) \quad \text{ή} \quad x \frac{\partial}{\partial x} \delta(x) = -\delta(x) \quad \text{ή} \quad x'' \frac{\partial}{\partial x''} \delta(x'') = -\delta(x'')$$

$$(x'' - x') \frac{\partial}{\partial x''} \delta(x'' - x') = -\delta(x'' - x')$$

μ'

## B'.9 Λύση Συστήματος Διαφορικών Εξισώσεων με τη μέθοδο των Ιδιοτιμών.

Στο Κεφάλαιο 4 συναντάμε κάποια συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Επί παραδείγματι, το Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων 4.199 μπορεί, παραλείποντας για απλότητα το δείκτη  $m$  που δηλώνει τον HM τρόπο, να γραφεί ως

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} n\omega & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \Omega + (n-1)\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B'.10})$$

είναι δηλαδή της μορφής

$$\dot{\vec{x}}(t) = \overleftrightarrow{A} \vec{x}(t) \quad (\text{B'.11})$$

με

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}, \quad \overleftrightarrow{A} = (-i) \begin{pmatrix} n\omega & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \Omega + (n-1)\omega \end{pmatrix} \quad (\text{B'.12})$$

Ομοίως, το Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων 4.217 μπορεί, παραλείποντας για απλότητα το δείκτη  $m$  που δηλώνει τον HM τρόπο, να γραφεί ως

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} (n+1)\omega & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & \Omega + n\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B'.13})$$

είναι δηλαδή της μορφής

$$\dot{\vec{x}}(t) = \overleftrightarrow{A} \vec{x}(t) \quad (\text{B'.14})$$

με

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}, \quad \overleftrightarrow{A} = (-i) \begin{pmatrix} (n+1)\omega & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & \Omega + n\omega \end{pmatrix} \quad (\text{B'.15})$$

Επομένως τα προβλήματα αυτά μπορούν να λυθούν με τη μέθοδο των ιδιοτιμών όπως έγινε και στο Κεφάλαιο 3.

# Παράρτημα Γ΄

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ matlab

μβ'

## Γ'.1 fornu0ofT.m

### fornu0ofT.m

```
tic
xl=-5;
xr=+5;
step=(xr-xl)/100;
for i=1:101;
    x(i)=xl+step*(i-1);
    f(i)=3*(exp(x(i))-1) - x(i)*exp(x(i));
end
createfigurefornu0ofT(x,f);
toc
```

### createfigurefornu0ofT.m

```
function createfigurefornu0ofT(X1, Y1)
%CREATEFIGURE2(X1, Y1)
% X1: vector of x data
% Y1: vector of y data

% Auto-generated by MATLAB on 10-Feb-2015 11:02:08

% Create figure
figure1 = figure;

% Create axes
axes1 = axes('Parent',figure1,'YGrid','on','XGrid','on');
%% Uncomment the following line to preserve the Y-limits of the axes
% ylim(axes1,[-5 5]);
box(axes1,'on');
hold(axes1,'on');

% Create plot
plot(X1,Y1,'DisplayName','f(x)');
axis([-5,5,-5,5])
title('f(x)=3(e^x-1)-xe^x')
xlabel('x')
ylabel('f(x)')

% Create legend
legend1 = legend(axes1,'show');
set(legend1,'FontSize',9);
```

Σχήμα Γ'.1: Το πρόγραμμα matlab fornu0ofT.m.

## Γ'.2 forlambda0ofT.m

**forlambda0ofT.m**

```
tic
xl=-10;
xr=+10;
step=(xr-xl)/100;
for i=1:101;
    x(i)=xl+step*(i-1);
    f(i)=5*(exp(x(i))-1) - x(i)*exp(x(i));
end
createfigureforlambda0ofT(x,f);
toc
```

**createfigureforlambda0ofT.m**

```
function createfigureforlambda0ofT(X1, Y1)
%CREATEFIGURE2(X1, Y1)
% X1: vector of x data
% Y1: vector of y data

% Auto-generated by MATLAB on 10-Feb-2015 11:02:08

% Create figure
figure1 = figure;

% Create axes
axes1 = axes('Parent',figure1,'YGrid','on','XGrid','on');
%% Uncomment the following line to preserve the Y-limits of the axes
% ylim(axes1,[-5 5]);
box(axes1,'on');
hold(axes1,'on');

% Create plot
plot(X1,Y1,'DisplayName','f(\psi)');
axis([-10,10,-10,50])
title('f(\psi)=5(e^\psi-1)-\psie^\psi')
xlabel('\psi')
ylabel('f(\psi)')

% Create legend
legend1 = legend(axes1,'show');
set(legend1,'FontSize',9);
```

Σχήμα Γ'.2: Το πρόγραμμα matlab forlambda0ofT.m.

$\mu\delta'$

## Γ'.3 WienDisplacementANDPlanckofLambda.m

### WienDisplacementANDPlanckofLambda.m

```
clear all
clc
tic
x1=0; % nm
xr=8000; % nm
T = 1595 % K black body temperature
nop=2001;
step=(xr-x1)/(nop-1); % nm
for i=1:nop;
    x(i)=x1+step*(i-1); % nm
    x(i)=x(i)*1e-9;
    c1 = 499.24825e-26; %8nhc = 499.24825322511997970335670474955 x 10^{-26} J m
    c2 = 14.38777e-3; %hc/k_B = 14.387769599838156234952726573188 x 10^{-3} m K
    rho(i) = c1/(x(i)^5);
    rho(i)=rho(i)/(exp(c2/(x(i)*T))-1);
    x(i)=x(i)*1e9;
end
%plot(x,rho); figure(gcf);

lambda0= 2897772/T % nm (Wien Displacement Law)
createfigureforPlanckLambdaofT(x,rho,T,lambda0);
toc
```

### createfigureforPlanckLambdaofT.m

```
function createfigureforPlanckLambdaofT(X1, Y1, T, lambda0)
%CREATEFIGURE2(X1, Y1)
% X1: vector of x data
% Y1: vector of y data

% Auto-generated by MATLAB on 10-Feb-2015 11:02:08

% Create figure
figure1 = figure;

% Create axes
axes1 = axes('Parent',figure1,'YGrid','on','XGrid','on');
%% Uncomment the following line to preserve the Y-limits of the axes
% ylim(axes1,[-5 5]);
box(axes1,'on');
hold(axes1,'on');

% Create plot
plot(X1,Y1,'DisplayName','\rho(\lambda,T)');
axis([0,8000,0,2000])
%title('Planck's Law in terms of Wavelength and Temperature')
title(['\rho(\lambda,T) for T = ', num2str(T), ' K', '\lambda_0=', num2str(lambda0), ' nm'])
xlabel('\lambda (nm)')
ylabel('\rho(J/m^4)')

% Create legend
legend1 = legend(axes1,'show');
set(legend1,'FontSize',9);
```

Σχήμα Γ'.3: Το πρόγραμμα matlab WienDisplacementANDPlanckofLambda.m.



## Γ'.4 WienDisplacementANDPlanckofLambdaMultipleT.m

### WienDisplacementANDPlanckofLambdaMultipleT.m

```

clear all
clc
tic
x1=0; % nm
xr=5000; % nm
nop=2001;
step=(xr-x1)/(nop-1); % nm
for j=1:5
    T(j)=3000+j*500 % K black body temperature
    lambda0(j)= 2897772/T(j) % nm (Wien Displacement Law)
for i=1:nop;
    x(i)=x1+step*(i-1); % nm
    x(i)=x(i)*1e-9;
    c1 = 499.24825e-26; %8nhc = 499.24825322511997970335670474955 x
10{-26} J m
    c2 = 14.38777e-3; %hc/k_B = 14.387769599838156234952726573188 x
10{-3} m K
    rho(i,j) = c1/(x(i)^5);
    rho(i,j)=rho(i,j)/(exp(c2/(x(i)*T(j)))-1);
    x(i)=x(i)*1e9;
end
end

colorspec = {[1 0 0]; [1 0.5 0]; [0 1 0]; [0 0 1]; [0.4 0 1]};
figure(1);
title({'\rho(\lambda,T)', [' \lambda_0=', num2str(lambda0,4), ' nm']})
xlabel('\lambda (nm)')
ylabel('\rho(J/m^4)')
hold on
for i = 1:5
    plot(x,rho(:, i), 'Color', colorspec{i})
end
%legend(num2str(T(:)))
legend([num2str(T(1)), ' K'], [num2str(T(2)), ' K'], [num2str(T(3)), '
K'], [num2str(T(4)), ' K'], [num2str(T(5)), ' K'])
hold off

toc

```

Σχήμα Γ'.4: Το πρόγραμμα matlab WienDisplacementANDPlanckofLambdaMultipleT.m.

μτ'

## Γ'.5 Oscillations.m

### Oscillations.m

```
clear all
clc
tic
OmegaR=1
Delta=0.5
lambda = (sqrt(OmegaR^2+Delta^2))/2
TRonR =(2*pi)/(OmegaR)
TRoffR=(2*pi)/sqrt(OmegaR^2+Delta^2)
pi/lambda-TRoffR
nop=501;
tl= 0;
tr= TRonR;
step=(tr-tl)/(nop-1); % nm
for i=1:nop;
    t(i)=tl+step*(i-1);
    P1onR(i)=cos((OmegaR/2)*t(i))^2;
    P2onR(i)=sin((OmegaR/2)*t(i))^2;
    PloffR(i)= 1 + (OmegaR^2*(cos(2*lambda*t(i)) -
1))/(2*(OmegaR^2+Delta^2));
    P2offR(i)=(OmegaR^2)/(OmegaR^2+Delta^2)*sin(lambda*t(i))^2;
end
%plot(x,c,'k',x,y1,'b',x,y2,'r'); figure(gcf);
plot(t,P1onR,'k',t,P2onR,'b','LineWidth',2,'LineStyle','-'); hold on;
%legend('P_1(t)','P2(t)')
plot(t,PloffR,'r',t,P2offR,'g','LineWidth',2,'LineStyle','--')
h = legend('$P_1(t)$ on Resonance','$P_2(t)$ on Resonance','$P_1(t)$
off Resonance','$P_2(t)$ off Resonance');
set(h,'Interpreter','latex','FontSize',10)
title({'Oscillations in a two-level system'; '(On Resonance and Off
Resonance)'})
xlabel('$t(s)$','Interpreter','latex','FontSize',16)
ylabel('probabilities','FontSize',16)
annotation('textbox',...
    [0.7 0.45 0.17 0.15],...
    'String',{'plotting with',['\Omega_R = ' num2str(OmegaR), ' s^{-'
1}'],['\Delta = ' num2str(Delta), ' s^{-1}']},...
    'FontSize',10,...
    'FontName','Arial',...
    'LineStyle','--',...
    'EdgeColor',[1 1 0],...
    'LineWidth',2,...
    'BackgroundColor',[0.9 0.9 0.9],...
    'Color',[0.84 0.16 0]);

hold off;
toc
```

Σχήμα Γ'.5: Το πρόγραμμα matlab *Oscillations.m* δημιουργεί την Εικόνα 3.6, η οποία περιγράφει ταλαντώσεις διασταθμικού συστήματος σε συντονισμό ( $\Delta = 0$ ) και εκτός συντονισμού ( $\Delta \neq 0$ ).

## Γ'.6 N1N2DNrho.m

```

N1N2DNrho.m
clear all
clc

L=11;
R = linspace(0,10,L); % time in fs
Rc = 2; t1 = 1; t2 = 3; B = 1;

for i=1:L
N1(i) = t1*R(i);
if R(i) < Rc
    N2(i)=t2*R(i);
    rho(i)=0;
    DN(i)=(t2-t1)*R(i);
else
    N2(i)=t1*R(i)+(t2-t1)*Rc;
    rho(i)=(1/(B*t2*Rc))*R(i)-(1/(B*t2));
    DN(i)=(t2-t1)*Rc;
end
end

subplot(1, 2, 1);
%figure;
plot(R,N1,'b:',R,N2,'r--',R,DN,'-.','LineWidth',1.5);
legend('N_1','N_2','\Delta N')
xlabel('R','FontSize',14)
ylabel('N_1, N_2, \Delta N','FontSize',14)
set(gca,'FontSize',12)
title('N_1, N_2 \Delta N vs. R','FontSize',12)
text(200,0.65,'N_1','Color','b','FontSize',14)
text(250,1.35,'N_2','Color','r','FontSize',14)
text(300,1.95,'\Delta N','Color','g','FontSize',14)
annotation('textbox',...
[0.17 0.68 0.11 0.22],...
'String',{'t_2 = ' num2str(t2)}, ['t_1 = ' num2str(t1)}, ['R_c = '
num2str(Rc)}, ['B = ' num2str(B)]},...
'FontSize',12,...
'FontName','Arial',...
'LineStyle','--',...
'EdgeColor',[1 1 0],...
'LineWidth',2,...
'BackgroundColor',[0.9 0.9 0.9],...
'Color',[0.84 0.16 0]);

subplot(1, 2, 2);
%figure;
plot(R,rho,'g','LineWidth',1.5);
legend('\rho')
xlabel('R','FontSize',14)
ylabel('\rho','FontSize',14)
set(gca,'fontSize',12)
title('\rho vs. R','FontSize',12)
text(350,0.45,'\rho','Color',[0.5,0.5,0],'FontSize',14)
annotation('textbox',...
[0.62 0.68 0.11 0.22],...
'String',{'t_2 = ' num2str(t2)}, ['t_1 = ' num2str(t1)}, ['R_c = '
num2str(Rc)}, ['B = ' num2str(B)]},...
'FontSize',12,...
'FontName','Arial',...
'LineStyle','--',...
'EdgeColor',[1 1 0],...
'LineWidth',2,...
'BackgroundColor',[0.9 0.9 0.9],...
'Color',[0.84 0.16 0]);

```

Σχήμα Γ'.6: Το πρόγραμμα `matlab N1N2DNrho.m` δημιουργεί μια αναπαράσταση των Εξ. 5.47, 5.48, 5.49, 5.51, οι οποίες περιγράφουν τους πληθυσμούς των σταθμών, την πυκνότητα ΗΜ ακτινοβολίας και την αναστροφή πληθυσμού στη στάσιμη κατάσταση.

μή

τέλος