ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 7

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ = ΟΥΔΕΤΕΡΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ + ΑΞΙΩΜΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

Η Ουδέτερη Γεωμετρία

7.1. Η **Ουδέτερη Γεωμετρία** (πρβλ. 6.9.(β)) είναι η "Γεωμετρία", που αναπτύσσεται αποδεικτικά στη βάση των αξιωμάτων του Hilbert εκτός εκείνου "των παραλλήλων", δηλαδή στη βάση των αξιωμάτων της "σύμπτωσης", του "μεταξύ", της "συμφωνίας" και της "συνέχειας", που διατυπώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Επομένως, όλοι οι ορισμοί και όλες οι προτάσεις της προηγούμενης παραγράφου υπάγονται στην Ουδέτερη Γεωμετρία και, κατά συνέπεια, ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις για τη "Γεωμετρία" αυτή είναι εκείνες που απορρέουν από τα: 6.15, 6.16, 6.18 (και 6.19), 6.21, 6.25, 6.30 (και 6.31, 6.35), 6.37.1 (και 6.37.5), και 6.39.2.

7.2. Μέχρι τώρα δεν μας απασχόλησε καθόλου το σημαντικό πρόβλημα της ύπαρξης σημείων τομής, που (όπως είδαμε στα 2.8 και 2.9) σχετίζεται με το αν οι ευθείες έχουν ή όχι "κενά". Από τον "Απειροστικό Λογισμό" γνωρίζουμε ήδη ότι η μή ύπαρξη "κενών" στην "πραγματική ευθεία", $\mathbb{R}$, εξασφαλίζεται με κάποιο **"αξίωμα πληρότητας"**, δηλαδή με κάποιο αξίωμα, που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το $\mathbb{R}$ είναι "συνεχές" (σε αντιδιαστολή προς καθένα από τα σύνολα των ακεραίων, των ρητών ή των αρρήτων, που έχουν "κενά").

Ένα από τ' αξιώματα "πληρότητας" είναι το αξίωμα του Dedekind (πρβλ. 2.8). Ο Hilbert δεν συμπεριέλαβε το αξίωμα αυτό στο σύστημα των αξιωμάτων του, προτιμώντας το IV(2), με τη βοήθεια του οποίου **αποδεικνύεται** το "αξίωμα του Dedekind", όπως παρατήρησε ο ίδιος, (πρβλ. σελ. 33 από το βιβλίο [4] της Βιβλιογραφίας για την 6η παράγραφο). Στις σύγχρονες παρουσιάσεις της αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας στο πνεύμα του Hilbert ακολουθείται η αντίστροφη πορεία: **αντί των δυο αξιωμάτων της "συνέχειας"** του Hilbert (πρβλ. 6.39) **διατυπώνεται το "αξίωμα του Dedekind"** (που προτάθηκε το 1871). Η προτίμηση αυτή συμβάλλει στην **"οικονομία" της παρουσίασης** και θα την ακολουθήσουμε. Δεχόμαστε, λοιπόν, ότι ισχύει το επόμενο αξίωμα, που μπορεί να θεωρηθεί ως "αντίστροφο" της διαίρεσης μιας ευθείας σε δυο ημιευθείες (πρβλ. 6.23.1).

IV(3) ("Αξίωμα του Dedekind"): Έστω $x \in E$. Μια **"τομή του Dedekind"** στο $\Sigma(x)$ (πρβλ. 6.20) ορίζεται απο δυο **ξένα** μεταξύ τους και **μη κενά** υποσύνολά του Σ_1 και Σ_2 έτσι, ώστε να ισχύει $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma(x)$ και, επιπλέον, τα εσωτερικά σημεία ενός ευθυγράμμου τμήματος με άκρα που ανήκουν στο Σ_λ ν' ανήκουν, επίσης, στο ίδιο Σ_λ ($:\lambda=1,2$). **Δεχόμαστε** ότι σε κάθε "τομή του Dedekind" αντιστοιχεί ένα σημείο $D \in \Sigma(x)$, που είναι **ακρότατο** σημείο του Σ_λ, δηλαδή ανήκει στο Σ_λ και δεν βρίσκεται **"μεταξύ"** δυο σημείων του.

Από την τελευταία απαίτηση συνάγεται ότι το Σ_λ (για $\lambda=1$ ή 2), αν περιέχει κάποιο, περιέχει **ακριβώς ένα** ακρότατο σημείο. Είναι, εξάλλου, εύκολο να βεβαιωθούμε ότι: **αν ισχύει το IV(3), τότε εί-**

τε το Σ_1 είτε το Σ_2 **περιέχει ένα ακρότατο σημείο. Η απόδειξη** του ισχυρισμού αυτού γίνεται με "απαγωγή σε άτοπο": Έστω D_λ ένα ακρότατο σημείο που ανήκει στο Σ_λ για $\lambda = 1,2$. Έστω $X \in \Sigma$ έτσι, ώστε D_1-X-D_2 (πρβλ. 6.14). Αν $X \in \Sigma_1$, θεωρούμε κάποιο $Y \in \Sigma$ με Y-D_1-X (πρβλ. II(2)). Η υπόθεση $Y \in \Sigma_2$ αντιφάσκει στον ορισμό των Σ_1 και Σ_2, ενώ η υπόθεση $Y \in \Sigma_1$ αντιφάσκει στον ορισμό του ακρότατου σημείου. Ανάλογα καταλήγουμε σε **άτοπο**, υποθέτοντας $X \in \Sigma_2$.

Η "λειτουργικότητα" του αξιώματος IV(3) υπογραμμίζεται **και** από το περιεχόμενο των 7.3, 7.4 και 7.5.

7.3. Το αξίωμα IV(3) και το "αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη". Προκειμένου να συσχετίσουμε το IV(3) με το "αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη" (πρβλ. IV(1)), είναι σκόπιμο να διευκρινίσουμε ότι, αν x είναι η ευθεία που ορίζουν τα Γ και Δ, μια **"τομή του Dedekind στην ημιευθεία $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$"** αντιστοιχεί σε μια "τομή του Dedekind" στο $\Sigma(x)$ με την ακόλουθη ιδιότητα: το Σ_1 περιέχει το Γ και τα σημεία που **δεν** ανήκουν στην $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ενώ υπάρχει κάποιο σημείο που ανήκει στην $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και στο Σ_2. Αγνοώντας τα σημεία που **δεν** ανήκουν στην $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και θεωρώντας ότι τα σημεία του Σ_1 **"προηγούνται"** των σημείων του Σ_2, θεσμοθετούμε ένα είδος **"κατεύθυνσης"** στην $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ από το Γ προς το Δ. Έχοντας αυτά υπόψη θ' αποδείξουμε τον επόμενο ισχυρισμό:

7.3.1. Αξίωμα IV(3) ⇒ "Αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη".

Απόδειξη. Έστω ότι μας δόθηκαν τα ΑΒ και ΓΔ. Με το συμβολισμό από το IV(1), διαχωρίζουμε τα σημεία που ανήκουν στην $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ σε δυο υποσύνολα ως εξής: στο Σ_1 ανήκουν το Γ, τα Δ_ν για $\nu=1,2,\ldots$ και τα σημεία X με την ιδιότητα Γ-X-Δ_ν για κάποιο φυσικό αριθμό ν,

ενώ στο Σ_2 ανήκουν τα υπόλοιπα σημεία της $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, αν υπάρχουν τέτοια σημεία. **Θα υποθέσουμε $\Sigma_2 \neq \emptyset$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.**

Θ' αποδείξουμε πρώτα ότι τα σύνολα αυτά ορίζουν μια "τομή του Dedekind" στην $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (με την προηγούμενη έννοια). Απ' όσα προηγήθηκαν, τα σύνολα αυτά είναι ξένα και μη κενά. Μένει ν' αποδείξουμε ότι, αν $X,Z \in \Sigma_1$ και X-Y-Z, τότε $Y \in \Sigma_1$. Πράγματι: αν, π.χ., Γ-X-Z (πρβλ. 6.15), τότε Γ-Y-Z (πρβλ. 6.17.1), οπότε (επειδή έχουμε υποθέσει Γ-Z-Δ_ν) θα ισχύει και Γ-Y-Δ_ν, απ' όπου έπεται $Y \in \Sigma_1$. Αντικαθιστώντας το Σ_1 με το Σ_2, καταλήγουμε σε ανάλογα συμπεράσματα.

Επομένως, σύμφωνα με το IV(3), θα υπάρχει ένα ακρότατο σημείο D. Έστω $D \in \Sigma_1$. Η σχέση Γ-D-Δ_ν αντιφάσκει στον ορισμό του D. Αν $D = \Delta_\nu$, επιλέγουμε το Θ έτσι, ώστε Γ-D-Θ και "μεταφέρουμε" το ΑΒ στην $\overrightarrow{D\Theta}$ (πρβλ. III(1)), ορίζοντας το $\Delta_{\nu+1} \in \Sigma_1$ με την ιδιότητα $AB \simeq D\Delta_{\nu+1}$. Λαμβάνοντας υπόψη τα 6.29 και 6.26.2, δεν είναι δύσκολο ν' αποδείξουμε ότι $\Delta_{\nu+1} \in \Sigma_1$ (αφού $D \in \Sigma_1$), που αντιφάσκει στην έννοια του ακρότατου σημείου. Επομένως $D \notin \Sigma_1$.

Έστω, τώρα, $D \in \Sigma_2$ και Θ όπως πριν. "Μεταφέρουμε" το ΑΒ στην $\overrightarrow{D\Theta}$ και ορίζουμε το Δ^+ έτσι, ώστε $AB \simeq D\Delta^+$. Με ανάλογη διαδικασία ορίζουμε το Δ^-, που ανήκει στην $\overrightarrow{D\Gamma}$ και έχει την ιδιότητα $AB \simeq D\Delta^-$. Με συλλογισμούς στο πνεύμα της απόδειξης του 6.23.1, είναι εύκολο ν' αποδείξουμε ότι ισχύει Δ^--D-Δ^+, απ' όπου συνάγεται $\Delta^- \in \Sigma_1$ (αφού το D είναι ακρότατο σημείο και ανήκει στο Σ_2). Έστω, λοιπόν, Γ-Δ^--Δ_ν για κατάλληλο ν. Λαμβάνοντας, πάλι, υπόψη τα 6.29 και 6.26.2, μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι Γ-D-$\Delta_{\nu+1}$, που αντιφάσκει στην υπόθεση $D \in \Sigma_2$. Σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε, λοιπόν, σε άτοπο, όπως επιδιώκαμε.

7.4. Το αξίωμα IV(3) και η ύπαρξη "παραλλήλων". Δυο ευθείες λέγονται **παράλληλες**, αν δεν έχουν κοινό σημείο. **Αν ισχύουν τ' αξιώματα της "σύμπτωσης", του "μεταξύ" και της "συμφωνίας", τότε από κάθε σημείο που δεν ανήκει σε μια ευθεία περνάει μια τουλάχιστο παράλληλη προς αυτήν** (οπότε στην "Ελλειπτική Γεωμετρία", όπου κάθε δυο ευθείες έχουν κοινό σημείο, **δεν ικανοποιείται** κάποιο από τ' αξιώματα αυτά). Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού προϋποθέτει τον επόμενο Ορισμό και στηρίζεται στο Λήμμα 7.4.1.

Ορισμός. Δυο ημιευθείες $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ λέγονται **κάθετες**, αν η γωνία που σχηματίζουν είναι ορθή (πρβλ. 6.36). Αν συμβαίνει αυτό, θα λέμε και ότι οι **ευθείες** που ορίζουν τα Α,Β και Α,Γ είναι **κάθετες**.

7.4.1. Λήμμα. Αν δοθούν το σημείο Χ και η ευθεία x, υπάρχει **ακριβώς μια** ευθεία, που περνάει από το Χ και είναι **κάθετη** στην x.

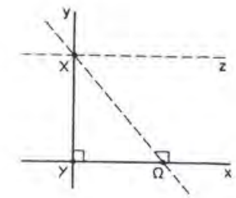
Απόδειξη. Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

(Ι) Έστω $X\notin x$. Υποθέτουμε ότι η x ορίζεται από τα σημεία Α και Β. Θέτοντας Χ=Γ και "μεταφέροντας" την $\sphericalangle BA\Gamma$ στην $\sphericalangle BA\Delta$, όπου τα Γ και Δ βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς x, αναγόμαστε στο 6.36.1 (και το εκεί σχήμα). Επαναλαμβάνοντας τους συλλογισμούς του 6.36.1, βεβαιωνόμαστε ότι η ευθεία των Χ=Γ και Δ είναι κάθετη στην x.

(ΙΙ) Έστω $X\subset x$. Ταυτίζουμε το Χ με το Ζ από το ΙΙΙ(3), θεωρούμε ως $\vec{Z\Theta}$ μια από τις δυο ημιευθείες που ορίζει το Χ στην x και "μεταφέρουμε" μια **ορθή** γωνία (σύμφωνα με το ΙΙΙ(3)) στην $\sphericalangle HZ\Theta$. Τότε, η ευθεία των Χ=Ζ και Η είναι η ζητούμενη κάθετη.

Το "μονοσήμαντο" της κάθετης στην περίπτωση (ΙΙ) είναι συνέπεια του "μονοσήμαντου" της "μεταφοράς" των γωνιών. Στην περίπτωση (Ι) το "μονοσήμαντο" της κάθετης αποδεικνύεται ως εξής:

Έστω ότι οι ευθείες που ορίζουν τα Χ,Υ και Χ,Ω με $\Omega\neq Y$ (όπως στο σχήμα) είναι κάθετες στην x. Τότε, μια εξωτερική γωνία του τριγώνου ΧΥΩ θα είναι "σύμφωνη" με μια "απέναντί της εσωτερική" (πρβλ. 6.36.2). Αυτό αντιφάσκει στο 6.37.1.



7.4.2. Πρόταση. Από ένα σημείο Χ που δεν ανήκει σε μια ευθεία x περνάει **μια τουλάχιστο** παράλληλη προς την x.

Απόδειξη. Έστω y η ευθεία που ορίζεται από τα Χ,Υ και είναι κάθετη στην x (πρβλ. το προηγούμενο σχήμα). Η ευθεία z, που περνάει από το Χ και είναι κάθετη στην y, είναι παράλληλη προς την x, όπως προκύπτει άμεσα από το 6.36.2 και το Λήμμα που ακολουθεί.

7.4.3. Λήμμα. Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δυο **"εντός εναλλάξ"** γωνίες **"σύμφωνες"**, τότε οι ευθείες αυτές είναι **παράλληλες**.

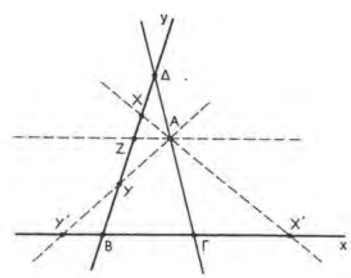
Η **απόδειξη** γίνεται με "απαγωγή σε άτοπο", αν ληφθεί υπόψη το 6.37.1.

7.4.4. Παρατήρηση. Το προηγούμενο Λήμμα είναι η 27η Πρόταση των "Στοιχείων" και η απόδειξη που υποδεικνύουμε είναι εκείνη των "Στοιχείων". Η 27η Πρόταση των "Στοιχείων" έχει την εξής **ιδιαιτερότητα:** Η αντίστροφή της (δηλαδή η 29η Πρόταση των "Στοιχείων", πρβλ. τέλος της σελ. 29) είναι το **πρώτο** αποτέλεσμα, στην απόδειξη του οποίου ο Ευκλείδης **χρησιμοποιεί** ουσιαστικά το "5ο

αίτημα". Αυτό δεν είναι τυχαίο, αφού η πρόταση αυτή **δεν μπορεί ν' αποδειχθεί στην Ουδέτερη Γεωμετρία**, δεδομένου ότι είναι ισοδύναμη με το "5ο αίτημα" (μολονότι η αντίστροφή της είναι το προηγούμενο Λήμμα, δηλαδή μια πρόταση της Ουδέτερης Γεωμετρίας!).

Αν, εκτός από τ' αξιώματα της "σύμπτωσης", του "μεταξύ" και της "συμφωνίας", λάβουμε υπόψη μας **και** το αξίωμα IV(3), αποκτούμε τη **δυνατότητα μιας πληρέστερης διερεύνησης** της "παραλληλίας", όπως συνάγεται απ' όσα ακολουθούν:

7.4.5. Έστω $x \in E$ και $A \notin x$. Θεωρούμε δυο σημεία Β,Γ που ανήκουν στην x, επιλέγουμε το Δ έτσι, ώστε Γ-Α-Δ και συμβολίζουμε με y την ευθεία των Β και Δ. **Τα σημεία της y τα διαιρούμε στις εξής τρεις κλάσεις:**



* Η K(1) έχει ως στοιχεία τα $X \in y$ με την ιδιότητα X-A-X΄, όπου X΄ είναι το κοινό σημείο της x και της ευθείας που ορίζουν τα X και A.

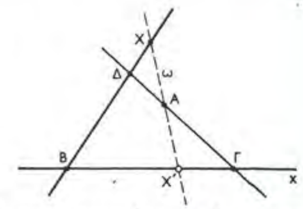
* Η K(2) έχει ως στοιχεία τα $Y \in y$ με την ιδιότητα το A να μη βρίσκεται "μεταξύ" του Y και Y΄, όπου το Y΄ είναι το κοινό σημείο της x και της ευθείας που ορίζουν τα Y και A. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $B \in K(2)$.

* Τέλος, η K(3) έχει ως στοιχεία τα $Z \in y$ με την ιδιότητα η ευθεία των Z και A να είναι παράλληλη προς την x.

Και οι τρεις αυτές κλάσεις είναι **μη κενές**, αφού $\Delta \in K(1)$ και υπάρχουν παράλληλες προς την x που περνάνε από το A (πρβλ. 7.4.2).

Ειδικότερα, οι δυο πρώτες κλάσεις έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Αν X-Δ-B, τότε $X \in K(1)$.

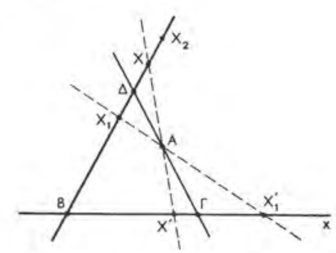


Απόδειξη. Είναι εύκολο ν' αποδειχτεί ότι η ευθεία ω, που ορίζουν τα X και A δεν περνάει από καμιά κορυφή του τριγώνου ΒΓΔ και ότι δεν έχει κοινό σημείο με την πλευρά του ΒΔ (αφού X-Δ-B). Επειδή η ω περνάει από το εσωτερικό σημείο A της ΔΓ, θα περνάει και από ένα **εσωτερικό σημείο**, X΄, **της** ΒΓ (πρβλ. II(4)). Εφαρμόζοντας το II(4) για το τρίγωνο ΒΧΧ΄ και την ευθεία των Γ και Δ, συμπεραίνουμε ότι το A είναι εσωτερικό σημείο του ΧΧ΄, απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Αν Y-B-Δ, τότε $Y \in K(2)$.

Απόδειξη. Τα Y και Δ βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς x, ενώ τα A και Δ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο. Άρα, σύμφωνα με το 6.21, τα Y και A βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς x, δηλαδή η x περιέχει ένα εσωτερικό σημείο του AY και το ζητούμενο έπεται.

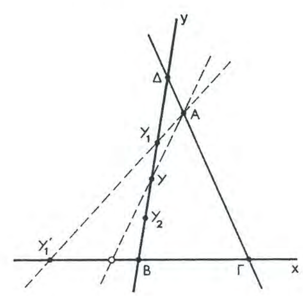
(γ) Αν $X_1, X_2 \in K(1)$ και X_1-X-X_2, τότε $X \in K(1)$.



Απόδειξη. Από την απόδειξη του (β) συνάγεται ότι τα X_1, X, X_2 βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς x, δηλαδή ότι το B δεν βρίσκεται "μεταξύ" των X_1, X_2. Μπορούμε, λοιπόν, να υποθέσουμε B-X_1-X_2, οπότε θα ισχύει B-X_1-X (πρβλ. 6.17.1). Μ' εφαρμογή του II(4) για το τρίγωνο BX_1X_1' και την ευθεία των X και A, αποδεικνύεται ότι το X΄ είναι εσωτερικό σημείο του BX_1'. Έχοντας αυτό υπόψη και εφαρμόζοντας το II(4) για το τρίγωνο BXX΄ και την ευθεία των X_1 και X_1', συμπεραίνουμε ότι το A είναι εσωτερικό σημείο του XX΄, δηλαδή ότι $X \in K(1)$.

(δ) Αν $Y_1, Y_2 \in K(2)$ και Y_1-Y-Y_2, τότε $Y \in K(2)$.

Απόδειξη. Πάλι εξαιτίας του (β), αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση που το Y και το A βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς x, οπότε ένα από τα Y_1 και Y_2, έστω το Y_1, θ' ανήκει στο ημιεπίπεδο αυτό. Τότε, έχουμε B-Y_1-Δ (πρβλ. (α) και 6.15) και το Δ δεν μπορεί να βρίσκεται "μεταξύ" των Y_1 και Y_2, αφού, αν συνέβαινε αυτό, θα ίσχυε B-Δ-Y_2 (πρβλ. Λήμμα 1 από το 6.20). Επομένως, θα ισχύει **είτε** Y_1-Y_2-Δ **είτε** Y_2-Y_1-Δ. Θ' ασχοληθούμε με τη δεύτερη περίπτωση, αφήνοντας την πρώτη στον αναγνώστη. Από τις σχέσεις Y_2-Y_1-Δ και Y_2-Y-Y_1 συνάγεται Y-Y_1-Δ, οπότε $Y \notin K(1)$ (:αν όχι θα ίσχυε $Y_1 \in K(1)$, πρβλ. (α)). Ισχύει, επίσης, $Y \notin K(3)$ για τον εξής λόγο: Είναι εύκολο να δειχθεί ότι Y_1-Y-B, ενώ, σύμφωνα με τον ορισμό της κλάσης K(2), ισχύει A-Y_1-Y_1'. Άρα, εφαρμόζοντας το II(4) για το τρίγωνο BY_1Y_1' και την ευθεία των A και Y, βεβαιωνόμαστε ότι η ευθεία αυτή έχει κοινό σημείο με το BY_1'. Από τα προηγούμενα και επειδή, προφανώς, ισχύει

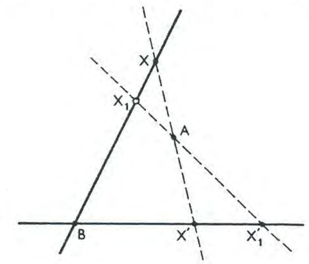


$$\Sigma(y)=K(1)\cup K(2)\cup K(3),$$

συμπεραίνουμε ότι $Y \in K(2)$.

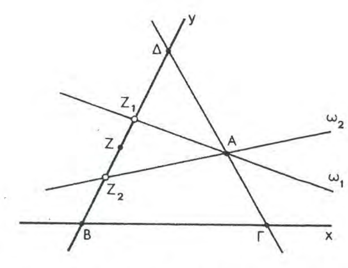
(ε) Το K(1) δεν περιέχει **"ακρότατο"** σημείο (πρβλ. IV(3)), δηλαδή **κάθε** σημείο του βρίσκεται "μεταξύ" δυο άλλων σημείων του. Το ίδιο ισχύει και για το K(2).

Απόδειξη. Θ' αποδείξουμε μόνο τον πρώτο ισχυρισμό, μια και η απόδειξη του δεύτερου είναι ανάλογη. **Έστω X ένα "ακρότατο" σημείο του K(1).** Εξαιτίας του (α), δεν μπορεί να ισχύει X-Δ-B. Επομένως, θα ισχύει είτε X=Δ είτε Δ-X-B, ενώ έχουμε X-A-X΄ (πρβλ. το σχήμα). Επιλέγουμε το X_1' έτσι, ώστε B-X΄-X_1'. Με εφαρμογή του II(4) για το τρίγωνο BXX΄ και την ευθεία των X_1' και A, ορίζουμε το X_1 ως κοινό σημείο της ευθείας αυτής και του "εσωτερικού" του BX. Προφανώς, ισχύει $X_1 \in K(1)$. Άρα **το X δεν είναι "ακρότατο" σημείο** του K(1), αφού βρίσκεται "μεταξύ" του X_1 κι ενός σημείου X_2 με X_2-Δ-B (πρβλ. (α)).



7.4.6. **Πρόταση.** Αν από ένα σημείο A που δεν ανήκει στην ευθεία x περνάνε **δυο (τουλάχιστον) παράλληλες** προς την x, **τότε** από το A περνάνε **άπειρες ως προς το πλήθος τους** παράλληλες προς την x και ανάμεσα σ' αυτές υπάρχουν **ακριβώς δυο** **"ακρότατες"**, με την έννοια ότι τα κοινά σημεία τους με την y από το 7.4.5 είναι "ακρότατα" σημεία του K(3), δηλαδή ανήκουν σ' αυτό και δεν βρίσκονται "μεταξύ" δυο σημείων του.

Απόδειξη. Τα A,B,Γ,Δ είναι όπως στο 7.6.5. Έστω ότι οι ω_1, ω_2 είναι **παράλληλες** προς την x (πρβλ. το σχήμα). Εφαρμόζοντας το II(4) για το τρίγωνο BΓΔ και την ω_1 (που περνάει από το A), ορίζουμε το $Z_1 \in K(3)$ (πρβλ. 7.4.5) ως κοινό



σημείο της ω_1 και του **"εσωτερικού"** του ΒΔ. Ανάλογα ορίζουμε το Z_2. Κάθε Z με την ιδιότητα Z_1-Z-Z_2 ανήκει στο K(3): αν, π.χ., ανήκε στο K(1), επειδή Z-Z_1-Δ (όπως αποδεικνύεται εύκολα), θα έπρεπε το Z_1 ν' ανήκει στο K(1) (πρβλ. 7.4.5.(α)). Επομένως, από το Α περνάνε **τουλάχιστο** τόσες παράλληλες προς την x, όσα είναι τα σημεία που βρίσκονται "μεταξύ" των Z_1 και Z_2, δηλαδή **άπειρες ως προς το πλήθος τους** (πρβλ. 6.19).

Τα σύνολα $\Sigma_1 = K(1)$ και $\Sigma_2 = K(2) \cup K(3)$ ορίζουν μια **"τομή του Dedekind"** στο Σ(y) (πρβλ. IV(3)). Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι ανάλογη με την προηγούμενη απόδειξη του ότι το Z ανήκει στο K(3). Επομένως, **σύμφωνα με το IV(3)** (και τις παρατηρήσεις που το ακολουθούν), υπάρχει ακριβώς ένα ακρότατο σημείο, Z_1^*, που θ' ανήκει στο Σ_2 και μάλιστα στο K(3) (πρβλ. 7.4.5.(ε)).

Εξάλλου, και τα σύνολα $\Sigma_1' = K(2)$ και $\Sigma_2' = K(1) \cup K(3)$ ορίζουν μια **"τομή του Dedekind"** στο Σ(y). Ορίζεται, λοιπόν, πάλι **σύμφωνα με** το IV(3), ένα ακρότατο σημείο, Z_2^*, που ανήκει, επίσης, στο K(3). Απ' όσα προηγήθηκαν συνάγεται ότι: **αν** $Z_1^* \neq Z_2^*$, **τότε** κάθε ευθεία, που περνάει από το Α, δεν περιέχει κανένα από τα Z_1^*, Z_2^* και είναι παράλληλη προς την x, θα τέμνει την y σ' ένα σημείο Z με Z_1^*-Z-Z_2^*. Είναι, τέλος, εύκολο να διαπιστωθεί ότι ισχύει $Z_1^* \neq Z_2^*$, αν $\omega_1 \neq \omega_2$, όπως έχουμε υποθέσει, και η Πρόταση αποδείχτηκε.

7.5. Το **αξίωμα IV(3) και η ύπαρξη σημείων τομής**. Όπως διαπιστώνεται αμέσως, οι διαδικασίες που περιγράφονται στο 2.9 μπορούν να διεκπεραιωθούν στα πλαίσια της Ουδέτερης Γεωμετρίας και, ειδικότερα, με εφαρμογή των όσων έχουμε αποδείξει μέχρι τώρα. Η διεκπεραίωση των διαδικασιών αυτών επαφίεται στον ενδιαφερόμενο

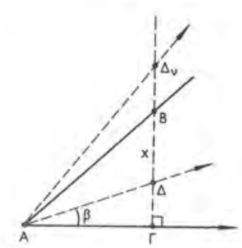
αναγνώστη.

* Κάπως μεγαλύτερη προσπάθεια απαιτείται για να επιβεβαιωθεί ότι οι προτάσεις της 5ης παραγράφου του βιβλίου αυτού μπορούν ν' αποδειχτούν με τη βοήθεια των όσων έχουμε κατακτήσει ήδη στην προηγούμενη και σ' αυτή την παράγραφο. Απαραίτητο βοήθημα για την προσπάθεια αυτή αποτελεί η επόμενη πρόταση:

7.6. **"Αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη για γωνίες"**. Αν δοθούν δυο γωνίες και ορίσουμε το ν-**πολλαπλάσιο μιας γωνίας** σε αναλογία με το ν-πολλαπλάσιο ευθυγράμμων τμημάτων (πρβλ. 6.39), τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός λ έτσι, ώστε το 2^λ-πολλαπλάσιο της μιας γωνίας να είναι γωνία **μεγαλύτερη** από την άλλη.

Απόδειξη. Θα περιγράψουμε το "πλάνο" της απόδειξης:

Θα συμβολίζουμε με α και β τις γωνίες που μας δίνονται. Πρόκειται ν' αποδείξουμε ότι $\alpha < 2^\lambda\beta$, όπου $2^\lambda\beta$ συμβολίζει το 2^λ-πολλαπλάσιο της β. Σύμφωνα με το 6.38.2, η γωνία α **"διχοτομείται"**. Αν, λοιπόν, ισχύει $\frac{1}{2}\alpha \leq \beta$ (πρβλ. 6.27.1), το ζητούμενο αποδείχτηκε για λ = 1 ή 2. Έστω $\frac{1}{2}\alpha > \beta$. Υποθέτουμε ότι έχουμε "μεταφέρει" τις γωνίες αυτές έτσι, ώστε να ισχύει $\frac{1}{2}\alpha \simeq \sphericalangle ΒΑΓ$ και $\beta \simeq \sphericalangle ΓΑΔ$. Θα συμβολίζουμε με $\vec{ΑΔ_\nu}$ την ημιευθεία με την ιδιότητα η $\sphericalangle ΓΑΔ_\nu$ να είναι το ν-πολλαπλάσιο της $\sphericalangle ΓΑΔ$. Θεωρούμε την ευθεία, x, των Β,Γ (πρβλ. το σχήμα) κάθετη στην ευθεία των Α,Γ και υποθέτουμε ότι $Δ_\nu \subset x$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

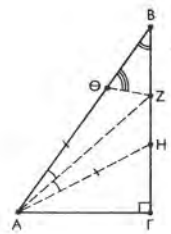


(I) Η ευθεία των Α,$Δ_\nu$ είναι παράλληλη προς την x. Τότε, το "εσωτερικό" της $\sphericalangle ΓΑΔ_\nu$ περιέχει σημεία που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία των Α,Γ με το Β. Επιπλέον, τα σημεία που ανήκουν στην $\vec{AB}$ βρίσκονται στο "εσωτερικό" της $\sphericalangle \Gamma A\Delta_\nu$. Επομένως, $\nu B \simeq \nu(\sphericalangle \Delta A\Gamma) = \sphericalangle \Delta_\nu A\Gamma > \sphericalangle BA\Gamma$.

(ΙΙ) Κάθε ημιευθεία $\vec{A\Delta_\nu}$ έχει κοινά σημεία με την x. Τότε, για κάθε $\nu > 1$ θα ισχύει $\Gamma\Delta_\nu > \nu\Gamma\Delta$ (πρβλ. το Λήμμα που ακολουθεί). Σύμφωνα με το "αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη", θα υπάρχει ν έτσι, ώστε $\nu\Gamma\Delta > \Gamma B$, οπότε θα ισχύει και $\Gamma\Delta_\nu > \Gamma B$, δηλαδή Γ-B-Δ_ν, απ' όπου και πάλι έπεται $\nu B \simeq \nu(\sphericalangle \Delta A\Gamma) = \sphericalangle \Delta_\nu A\Gamma > \sphericalangle BA\Gamma$.

Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, εκλέγοντας το λ έτσι, ώστε $\nu < 2^{\lambda-1}$, καταλήγουμε εύκολα στο ζητούμενο.

Λήμμα. Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (όπως στο σχήμα). Αν $\sphericalangle HAZ \simeq \sphericalangle ZAB$, τότε $HZ < ZB$.



Απόδειξη. "Μεταφέρουμε" το ΑΗ στην $\vec{AB}$ έτσι, ώστε $AH \simeq A\Theta$ (πρβλ. το σχήμα). Τότε, ισχύει Α-Θ-Β (πρβλ. 6.37.1 και 6.37.2). Από τα "σύμφωνα" τρίγωνα ΑΗΖ και ΑΘΖ προκύπτει $\sphericalangle AZH \simeq \sphericalangle AZ\Theta$, οπότε (λαμβάνοντας υπόψη και τα 6.37.1, 6.37.2) έχουμε:

$$\sphericalangle \Theta BZ < \sphericalangle AZH \simeq \sphericalangle AZ\Theta < \sphericalangle B\Theta Z \Rightarrow HZ \simeq \Theta Z < ZB.$$

Το αξίωμα των παραλλήλων του Hilbert και η Ευκλείδεια Γεωμετρία

7.7. Επειδή ισχύει το 7.4.2, υπάρχουν οι επόμενες δυο δυνατότητες: **(α)** από ένα σημείο, Α, που δεν ανήκει στην ευθεία x περνάει **ακριβώς μια** παράλληλη προς την x και **(β)** από το Α περνάνε **τουλάχιστο δυο** παράλληλες προς την x (οπότε ισχύει η Πρόταση 7.4.6). Το **"αξίωμα των παραλλήλων" του Hilbert** "θεσμοθετεί" την πρώτη δυνατότητα και, επειδή η ύπαρξη μιας τουλάχιστο παράλληλης εί-

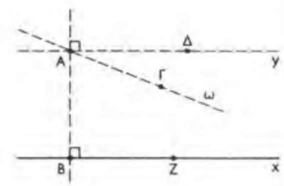
ναι εξασφαλισμένη, διατυπώνεται ως εξής:

V ("Ευκλείδειο αξίωμα"): Από ένα σημείο που δεν ανήκει σε μια ευθεία περνάει **το πολύ** μια παράλληλη προς την ευθεία αυτή.

Ορισμός. Η **Ευκλείδεια Γεωμετρία (του Επιπέδου)** είναι η "Γεωμετρία", που οικοδομείται αποδεικτικά πάνω στ' αξιώματα της "σύμπτωσης" (πρβλ. 6.10), του "μεταξύ" (πρβλ. 6.12), της "συμφωνίας" (πρβλ. 6.26, 6.27 και 6.28), της "συνέχειας" (πρβλ. 6.39, τα οποία υποκαθιστούμε στο βιβλίο αυτό με το "αξίωμα του Dedekind, πρβλ. 7.2) και πάνω στο προηγούμενο "Ευκλείδειο αξίωμα".

Μετά απ' όσα έχουν προηγηθεί και επειδή ισχύει η επόμενη Πρόταση, **είναι εύκολο ν' αναπτύξουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία**, π.χ., **παίρνοντας ως οδηγό τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη**. Γι' αυτό δεν θα επεκταθούμε περισσότερο.

7.8. Πρόταση. Στα πλαίσια της Ουδέτερης Γεωμετρίας (πρβλ. 7.1), το αξίωμα **V** είναι ισοδύναμο με το "5ο αίτημα" (πρβλ. 2.6).

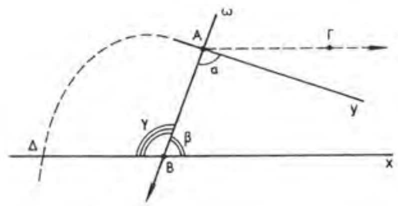


Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει το "5ο αίτημα" και ότι, εκτός της y (που κατασκευάζεται όπως στην απόδειξη του 7.4.2 και είναι παράλληλη προς την x, πρβλ. το σχήμα), περνάει από το Α **και** η ω, που είναι παράλληλη προς την x. Υποθέτουμε $\omega \neq y$, οπότε μια από τις γωνίες που η ω σχηματίζει με την ευθεία των Α και Β θα είναι μικρότερη από μια ορθή. Έστω $\sphericalangle \Gamma AB < \sphericalangle \Delta AB$, οπότε:

$$\sphericalangle ZBA + \sphericalangle BA\Gamma < \sphericalangle ZBA + \sphericalangle BA\Delta = 2 \text{ ορθές}.$$

Από αυτό και το "5ο αίτημα" συνάγεται ότι η ω δεν είναι παράλληλη προς την x, που είναι άτοπο.

Αντίστροφα, έστω ότι ικανοποιείται το αξίωμα V και ότι οι ευθείες x,y (πρβλ. το σχήμα) σχηματίζουν με την ω τις γωνίες α,β με την ιδιότητα $\alpha+\beta<2$ ορθές.



Επειδή $\beta+\gamma=2$ ορθές ισχύει $\gamma>\alpha$. Αν, λοιπόν, "μεταφέρουμε" την γ στην $\sphericalangle ΒΑΓ$, η $\vec{ΑΓ}$ δεν θα περιέχει "εσωτερικά" σημεία της α (: έχουμε τη διάταξη που υποδεικνύει το σχήμα). Σύμφωνα με το 7.4.3, η ευθεία των Α και Γ θα είναι παράλληλη προς την x και, κατά συνέπεια, η y δεν θα είναι παράλληλη προς την x. Επιπλέον, το κοινό σημείο των x και y δεν μπορεί να βρίσκεται "αριστερά" της ω (να είναι, π.χ., το Δ), αφού, τότε, η εξωτερική γωνία, α, του τριγώνου ΑΒΔ θα είναι μικρότερη από την "απέναντί της εσωτερική" γ. Αυτό αποδεικνύει την Πρόταση.

Σημείωση. Είναι ενδιαφέρον και όχι πολύ δύσκολο ν' αποδείξει κανείς ότι το **"αξίωμα των παραλλήλων"** του Hilbert είναι, επίσης, **ισοδύναμο με καθένα από** τους επόμενους ισχυρισμούς:

— Αν μια ευθεία έχει κοινό σημείο με μια από δυο παράλληλες ευθείες, τότε θα έχει κοινό σημείο και με την άλλη.

— Ισχύει η 29η Πρόταση των "Στοιχείων", δηλαδή ότι: αν δυο ευθείες είναι παράλληλες, τότε οι "εντός εναλλάξ" γωνίες, που σχηματίζουν τεμνόμενες από μια τρίτη ευθεία, είναι "σύμφωνες" (πρβλ. 7.4.3).

— Το "άθροισμα" των γωνιών ενός τριγώνου είναι 2 ορθές.

Το "αξίωμα των παραλλήλων" και η "ομοιότητα"

7.9. Η "Υπερβολική Γεωμετρία", που θα μας απασχολήσει στο 2ο Μέρος του βιβλίου, εμπεριέχει την Ουδέτερη Γεωμετρία και διαφοροποιείται από την Ευκλείδεια κατά το ότι σ' αυτήν, αντί της δυνατότητας (α) από το 7.7, "θεσμοθετείται" η (β). Προτρέχοντας κάπως και θέλοντας να "φωτίσουμε" διασταλτικά το ρόλο του "αξιώματος των παραλλήλων", θ' αποδείξουμε την επόμενη Πρόταση.

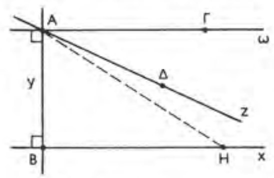
7.9.1. **Πρόταση.** Αν ισχύει η δυνατότητα (β) από το 7.7, δηλαδή **αν από ένα σημείο εκτός ευθείας περνάνε δυο (τουλάχιστο) παράλληλές της**, τότε **δυο τρίγωνα, που έχουν τις γωνίες τους αντίστοιχα "σύμφωνες"** (δηλαδή δυο **"όμοια"** τρίγωνα) **είναι "σύμφωνα"!**

Με άλλα λόγια, η προηγούμενη Πρόταση μας λέει ότι στην "Υπερβολική Γεωμετρία", σε αντίθεση με την Ευκλείδεια, δεν θα μας απασχολήσει η θεωρία της "Ομοιότητας", αφού η έννοια αυτή ταυτίζεται με την "ισότητα". Μια άμεση συνέπεια της Πρότασης αυτής είναι ότι, **αν το σύμπαν διέπεται από την "Υπερβολική Γεωμετρία", τότε δεν νοείται απόλυτα πιστή φωτογραφία, εκτός αν το αντικείμενο και η εικόνα του στη φωτογραφία έχουν ακριβώς το ίδιο "μέγεθος"** (αφού η "σμίκρυνση" στη φωτογραφία προϋποθέτει "όμοια" και "άνισα" τρίγωνα)!

Στη συνέχεια και μέχρι το τέλος της παραγράφου **θ' αποδείξουμε την προηγούμενη Πρόταση.**

7.9.2. Όπως σημειώσαμε ήδη στο 7.5, τα συμπεράσματα της 5ης παραγράφου ισχύουν στα πλαίσια της Ουδέτερης Γεωμετρίας. Ιδιαιτέρως, ισχύει η Πρόταση του 5.13, σύμφωνα με την οποία: το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν είναι **μεγαλύτερο από 2 ορθές**. Επομένως, για ν' αποδείξουμε ότι, στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει εδώ, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι **μικρότερο από 2 ορθές**, αρκεί ν' αποκλείσουμε την περίπτωση να είναι ίσο με 2 ορθές. Θ' αποδείξουμε πρώτα ότι:

7.9.3 Αν ισχύει η δυνατότητα (β) από το 7.7, τότε υπάρχει ένα (τουλάχιστο) τρίγωνο με άθροισμα γωνιών μικρότερο από 2 ορθές.



Απόδειξη. Έστω ότι το σημείο A δεν ανήκει στην ευθεία x, ότι η ευθεία y των A και B⊂x είναι κάθετη στην x και ότι η ευθεία ω, που ορίζεται από τα A και Γ, είναι κάθετη στην y, οπότε οι ευθείες ω και x θα είναι παράλληλες (πρβλ. 7.4.2). Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει και μια δεύτερη ευθεία, z, που περνάει από το A και είναι παράλληλη προς την x. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η z ορίζεται από τα A και Δ και ότι το Δ βρίσκεται στο "εσωτερικό" της $\sphericalangle$BAΓ. Συνδυάζοντας το αξίωμα III(3) με το 6.27.1, βεβαιωνόμαστε ότι υπάρχει ένα σημείο H⊂x, που βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς y με τα Γ και Δ, έτσι ώστε $\sphericalangle AHB < \sphericalangle \Gamma A\Delta$. Η z δεν περιέχει εσωτερικά σημεία της $\sphericalangle$BAH, γιατί τότε θα έπρεπε να έχει κοινό σημείο με την x (πρβλ. 6.25), που είναι άτοπο. Συνεπώς $\sphericalangle BAH < \sphericalangle BA\Delta$, απ' όπου προκύπτει:

$$\sphericalangle AHB + \sphericalangle BAH < \sphericalangle \Gamma A\Delta + \sphericalangle BA\Delta = 1 \text{ ορθή}.$$

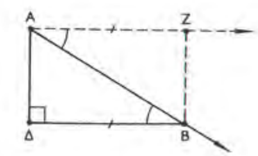
Άρα, το τρίγωνο ABH έχει άθροισμα γωνιών μικρότερο από 2 ορθές.

7.9.4. Στα πλαίσια της Ουδέτερης Γεωμετρίας, αν ένα τρίγωνο έ-

χει άθροισμα 2 ορθών, τότε κάθε τρίγωνο έχει άθροισμα 2 ορθών.

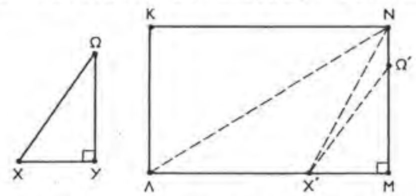
Η **απόδειξη** θα δοθεί με τ' ακόλουθα τέσσερα βήματα. Για συντομία, σε ορισμένα σημεία θα υποδεικνύουμε απλώς τις διαδικασίες, αφήνοντας τις λεπτομέρειες στον αναγνώστη.

Βήμα 1ο: Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο με **άθροισμα γωνιών 2 ορθές**. Από το 6.37.1 συνάγεται ότι το άθροισμα δυο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 2 ορθές. Επομένως, δυο από τις γωνίες του ΑΒΓ, έστω οι Β και Γ, θα είναι μικρότερες από 1 ορθή. Η ευθεία που περνάει από το Α και είναι κάθετη στην ευθεία των Β και Γ θα την τέμνει σ' ένα σημείο Δ έτσι, ώστε Β-Δ-Γ (αλλιώς, μια "εξωτερική" γωνία ενός τριγώνου, π.χ. του ΑΒΔ, θα είναι μικρότερη από 1 ορθή, ενώ μια "απέναντί της εσωτερική" θα είναι ορθή). Επειδή το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν υπερβαίνει τις 2 ορθές, το "έλλειμμά" του δεν μπορεί να είναι αρνητικό. Απ' αυτό, από την υπόθεση για το ΑΒΓ και από το 5.16 συμπεραίνουμε ότι καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχει "έλλειμμα" ίσο με μηδέν. Άρα, υπάρχει ένα **ορθογώνιο τρίγωνο**, π.χ. το ΑΒΔ, με άθροισμα γωνιών 2 ορθές.



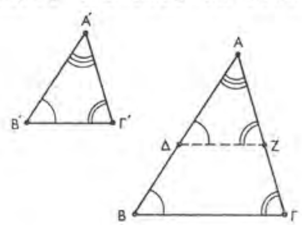
Βήμα 2ο: Θεωρούμε το προηγούμενο τρίγωνο ΑΒΔ και "μεταφέρουμε" την $\sphericalangle$ΑΒΔ στην $\sphericalangle$ΒΑΖ (όπως στο σχήμα). Αν επιλέξουμε το Ζ έτσι, ώστε ΔΒ ≃ ΑΖ, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΖ θα είναι "σύμφωνα", οπότε $\sphericalangle AZB \simeq \sphericalangle A\Delta B = 1$ ορθή και $\sphericalangle BA\Delta \simeq \sphericalangle ABZ$. Συνδυάζοντας τις "συμφωνίες" αυτές με την ισότητα $\sphericalangle AB\Delta + \sphericalangle BA\Delta = 1$ ορθή (που προκύπτει από την υπόθεση για το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ), είναι εύκολο να δούμε ότι το ΑΔΒΖ είναι ορθογώνιο.

Βήμα 3ο: "Επαναλαμβάνοντας" το ορθογώνιο αυτό έτσι, ώστε κάθε καινούριο ορθογώνιο να έχει μια κοινή πλευρά με κάποιο προηγούμενο, μπορούμε να "κατασκευάσουμε" ορθογώνια με πλευρές "μεγαλύτερες" από δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα. Αν, λοιπόν, μας δοθεί ένα τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο ΧΥΩ, υπάρχει ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ (όπως στο σχήμα) έτσι, ώστε τα τρίγωνα ΧΨΩ και Χ΄ΜΩ΄ να είναι "σύμφωνα". Το ορθογώνιο τρίγωνο ΛΜΝ έχει, προφανώς, "έλλειμμα" ίσο με μηδέν. Επιχειρηματολογώντας όπως στο 1ο Βήμα, διαπιστώνουμε ότι το "έλλειμμα" του τριγώνου ΝΜΧ΄ είναι, επίσης, ίσο με μηδέν και ότι το ίδιο συμβαίνει και για το τρίγωνο Χ΄ΜΩ΄. Τα προηγούμενα αποδεικνύουν ότι: **κάθε** ορθογώνιο τρίγωνο έχει άθροισμα γωνιών ίσο με 2 ορθές.



Βήμα 4ο: Έστω, τώρα, Α΄Β΄Γ΄ ένα τυχαίο τρίγωνο. Αν εργαστούμε όπως στο 1ο Βήμα με το Δ΄ αντί του Δ, το άθροισμα των "ελλειμμάτων" των ορθογωνίων τριγώνων Α΄Β΄Δ΄ και Α΄Γ΄Δ (που είναι, σύμφωνα με το 3ο Βήμα, ίσο με μηδέν) θα ισούται με το "έλλειμμα" του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ (πρβλ. 5.16) και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Απόδειξη της Πρότασης 7.9.1. Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι "όμοια" και "άνισα". Τότε, δυο πλευρές του ενός θα είναι "μεγαλύτερες" από τις αντίστοιχες πλευρές του άλλου. Έστω ΑΒ > Α΄Β΄ και ΑΓ > Α΄Γ΄, οπότε θα υπάρχουν τα Δ και Ζ με Α-Δ-Β και Α-Ζ-Γ έτσι, ώστε Α΄Β΄ ≃ ΑΔ και Α΄Γ΄ ≃ ΑΖ. Επειδή τα



τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ και ΑΔΖ είναι "σύμφωνα", το άθροισμα των γωνιών του (κυρτού) τετραπλεύρου ΒΓΖΔ είναι 2 ορθές. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού το άθροισμα των γωνιών καθενός από τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΔΖ είναι μικρότερο από 2 ορθές (πρβλ. 7.9.3 και 7.9.4).

Επίλογος

Η ισότητα του τίτλου της παραγράφου αυτής αποδίδει επιγραμματικά το περιεχόμενό της. Αν θέλουμε να υπογραμμίσουμε κάτι από το περιεχόμενο αυτό, θα έπρεπε να μείνουμε σε δυο σημεία:

– Στη σχέση ανάμεσα στο "αξίωμα του Dedekind" και στις παράλληλες προς μια ευθεία που περνάει από ένα σημείο εκτός αυτής. Και

– Στην επισήμανση ότι, όταν από ένα σημείο εκτός ευθείας περνάνε τουλάχιστο δυο παράλληλές της, η "ομοιότητα" και η "συμφωνία" είναι ταυτόσημες έννοιες.

Στην επόμενη παράγραφο θα συμπληρωθεί η θεωρία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Επιπέδου με την (απαραίτητη) διερεύνηση των ερωτημάτων σχετικά με το αν η θεωρία αυτή οδηγεί σε **"αντιφάσεις"** (πρβλ. 6.4.1), αν τ' αξιώματά της είναι **"ανεξάρτητα"** μεταξύ τους (πρβλ. 6.4.2) και, τέλος, σχετικά με το ερώτημα αν η θεωρία αυτή είναι **"κατηγορική"** (πρβλ. 6.4.3).

Κλείνοντας το 1ο Μέρος του βιβλίου αυτού θεωρούμε σκόπιμο να τονίσουμε γι' ακόμα μια φορά ότι η διαδρομή από τον Ευκλείδη μέχρι τον Hilbert αποδείχτηκε μια ιδιαίτερα δημιουργική γι̇α τα Μαθηματικά πορεία. Μια πορεία, που σημαδεύτηκε από διαδοχικά επιτεύγματα πολλών επιφανών και, πιθανότατα, κάποιων ανώνυμων ερευνητών, οι οποίοι είχαν ως **βασικό σημείο αναφοράς** την **κριτική πά-**

"5ο αίτημα". Ένας σημαντικός σταθμός κατά την πορεία
αν η ανακάλυψη της "Υπερβολικής Γεωμετρίας", η οποία (μα-
λλες που ακολούθησαν και υπερβαίνουν τους στόχους του βι-
ιυτού) συνετέλεσε, ώστε να διευρυνθεί η έννοια "Γεωμε-
τόσο, που σήμερα είναι δύσκολο να ορισθεί συνοπτικά και
ώς.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(που χρησιμοποιήθηκε για την παράγραφο 7)

μάδα

ιβλία [5] από τη Βιβλιογραφία για την παράγραφο 2, [1] α-
Βιβλιογραφία για την παράγραφο 5 και [1] από τη Βιβλιογρα-
α την παράγραφο 6.

η ομάδα: για συμπλήρωση και επέκταση

ός από τα βιβλία [6] από τη Βιβλιογραφία για την παράγρα-
[5] από τη Βιβλιογραφία για την παράγραφο 5 και [4], [5]
Βιβλιογραφία για την παράγραφο 6, και τα:

. Nevanlina-P. E. Kustaanheimo: Grundlagen der Geometrie,
rkhäuser, 1976.
το βιβλίο αυτό αντιμετωπίζεται η αξιωματική θεμελίωση της
ωμετρίας στο πνεύμα του Hilbert, αλλά με πολλές και ενδια-
ρουσες ιδιαιτερότητες. Μια απ' αυτές είναι η εισαγωγή με-
θόδων της "Διανυσματικής Άλγεβρας", που οδηγεί στη μελέτη
της "Αφφινικής Γεωμετρίας". Μια δεύτερη είναι ότι θίγεται
και η "Γεωμετρία Lorentz-Minkowski".]

[2] I. Vaisman: Foundations of Three-Dimensional Euclidean Geometry, Dekker, 1980.
[Περιέχει μια εμπεριστατωμένη παρουσίαση της ύλης που υπαινίσσεται ο τίτλος του βιβλίου με έντονη "αλγεβρική" χροιά και με "τοπολογικά" στοιχεία.]