$L, G : V \to V$ γραμμικές

$m_L(x)$: ελάχιστο πολυώνυμο της L

$m_G(x)$: —— // —— της G

Το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το ελάχιστου βαθμού μονικό πολυώνυμο ώστε $m(f) = 0$.

Αν f γραμμική $V \to V$

$End(V)$ — $f+g : V \to V$, $f \circ g : V \to V$ $\xrightarrow[\text{επί}]{(1-1)} \exists\ \mathbb{F}^{n,n}$ $(f, B, B) + (g, B, B)$, $(f, B, B) \circ (g, B, B)$

ο χώρος των ενδομορφισμών

$\left\{ \begin{array}{l} f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \\ A^n = A \cdot A \cdots A \end{array} \right\}$

$1, A, A^2, \dots, A^{n^2}$ — n^2+1 γρ. εξαρτ.

$\lambda_0 + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n^2} A^{n^2} = 0$

$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_{n^2} x^{n^2}$

$m_L(x) \mid f(x)$ $\forall f \in \mathbb{F}[x]$, $f(L) = 0$

Άσκηση:

Ο ΜΚΔ$(m_L(x), m_G(x)) = 1$

Δείξτε ότι:

1) $m_L(G)$ είναι ισομορφισμός

2) Αν $Ker\, G \neq \{0_V\}$ δείξτε ότι ο πυρήνας $Ker\, L = \{0\}$

ΛΥΣΗ

1) Υπάρχουν πολυώνυμα g, f:

$\boxed{g(x) m_L(x) + f(x) m_G(x) = 1}$! Επειδή ΜΚΔ $= 1$.

Εφαρμόζω την G

$g(G) m_L(G) + f(G) \cancel{m_G(G)}^{0} = \mathbb{I}$ $\Rightarrow$ $g(G) \cdot m_L(G) = \mathbb{I}$ $\Rightarrow$ $m_L(G)$ αντιστρέψιμη.

γραμμικές απεικονίσεις

?

αν έχω μια γρ. απεικ. με αριστερό αντίστροφο, υπάρχει και δεξιός! (Γραμμική Ι)

+

$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$ $\Downarrow G$ $f(G) \cdot g(G) = g(G) \cdot f(G)$

?

$g(G) \cdot f(G) = f(G) \cdot g(G)$ — πολυώνυμα της ίδιας γραμ. απεικ. αντιμετατίθενται.

Συνέχεια

Σελ. 2

8.12.23

2) Υπάρχει $\left.\begin{array}{l} v \neq 0_v \\ \ker G \neq 0 \end{array}\right\} : G\cdot v = 0$

$mL(G)$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας

$$m_L(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$\underbrace{mL(G)}_{\text{αντιστρέψιμος}} = a_0 \mathbb{I} + a_1 G + \dots + a_n G^n$$

$$mL(G)\,v = a_0 v \longrightarrow$$

$\neq 0$ ⊛

$Gv = 0$
$G^2 v = G(Gv) = 0$
$G^n v = 0$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο της L είναι μη-μηδενικό.

Έστω ότι $w \in \ker L$

$$m_L(L) = 0 \Rightarrow a_0 \mathbb{I}_n + a_1 L + \dots + a_n L^n = 0 \Rightarrow$$

$$a_0 \mathbb{I}_n = -(a_1 L + a_2 L^2 + \dots + a_n L^n) \Rightarrow$$

$$a_0 w = 0 \text{ (γιατί } w \in \ker L) \Rightarrow a_0 \neq 0 \text{ άρα } w = 0$$

$\ker L = \{0\}$.

• $ch_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n)$. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τάξης r. Δείξτε ότι το $x^{n-r} \mid ch_A(x)$.

ΛΥΣΗ

⇝ $n = \dim\ker A + \underbrace{\dim \operatorname{Im} A}_{r} \Rightarrow \dim\ker A = \underline{n-r}$.

⇝ $\dim\ker A = E_0$ ⇝ $\underbrace{\text{ιδιόχωρος της ιδιοτιμής 0}}_{\text{γιατί;}}$. ⊛ } Σημαντικό!

$\ker A = \{v \in \mathbb{F}^n, Av = 0\} = E_0 = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = 0_v\}$

⇝ $ch_A(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\dots(\lambda_n - x)$

• Για $n > r \Rightarrow n - r > 0$, το 0 είναι ιδιοτιμή

$\dim E_0 = n - r$

$$ch_A(x) = x^{n-r} g(x)$$

⊛ πως ξέρω ότι το 0 είναι ιδιοτιμή; αν $r = n$ το 0 δεν θα ήταν ιδιοτιμή αλλά έτσι το πρόβλημα θα ήταν τετριμμένο γιατί $1 = x^{n-n} \mid ch_A(x)$

8.12.2023

Γενικά $ch_A(x) = (x-\lambda)^{k} g(x)$

αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ αν $g(\lambda) \neq 0$

και $\dim E_\lambda \leq k$ γεωμετρική πολλαπλότητα

Άρα το $ch_A(x) = x^{n-r} g(x)$ → ενδεχομένως το $ch_A(x)$ να διαιρείται με μεγαλύτερη δύναμη του x.

πχ
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to r=2$$
όμως
$$ch(x) = -x^2(x-1)$$

Συνεχίζει η άσκηση και ρωτά:

⤳ Αν $r=1$, δ.ο. $ch_A(x) = -(1)^{n-1} x^{n-1}(c-x)$ $c = tr(A)$

το $x^{n-1} \mid ch_A(x)$

$\Downarrow$

οι ιδιοτιμές του A είναι $\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, c$

$$ch_A(x) = (0-x)^{n-1}(c-x)$$

Πως θα βρω το c;

!!!

Ο πίνακας A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα.

ισχύει πάντα πάνω σε ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα!

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots\, 0 & c \end{pmatrix}$$

όμοιο πίνακες → ίδιο $ch_A(x)$, ίδια det, ίδιο $tr(A)$

↳ $tr = c \Rightarrow \boxed{tr(A) = c}$

Εφαρμογή:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \\ 1 & & \\ \vdots & & 1 \\ 1 & & 1 \quad 1 \end{pmatrix} \qquad ch_J(x) = ;$$

Μέθοδος ①: $\det(J - xI_n) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & 1-x & \\ 1 & & \ddots \\ \vdots & & & 1-x \end{pmatrix}$ ... έχουμε δει αντίστοιχο

Μέθοδος ②: $\operatorname{rank} J = 1$. ⤳ άρα $ch_J(x) = (-1)^{n-1} x^{n-1}(tr(J) - x)$
από την πάνω άσκηση
$$= (-1)^{n-1} x^{n-1}(n-x)$$

8.12.2023

Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο του $J+q\mathbb{I}_n$

$\det(J+q\mathbb{I}_n - x\mathbb{I}_n) = \det(J+(q-x)\mathbb{I}_n)$, θέτω $y = x-q$

και λογαριάζω $\det(J-y\mathbb{I}_n) \overset{\text{πριν}}{=\!=} (-1)^{n-1}y^{n-1}(n-y)$

$$= (-1)^{n-1}(x-q)^{n-1}(n+q-x)$$

Άλλο παράδειγμα: $\det\begin{pmatrix} a & & b \\ 1 & \ddots & 1 \\ b & & a \end{pmatrix} = \det(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{rank}=1}}{bJ} - \underbrace{(b-a)}\mathbb{I}_n) \ \ldots$

$ch_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n)$

$ch_A(0) = \det(A)$!!!

• Δείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος και ο A είναι όμοιος με τον A^{-1} και ο A είναι $n\times n$ όπου n περιττός $\rightsquigarrow$ ο A έχει μια ιδιοτιμή $=\pm 1$

ΛΥΣΗ

$ch_A(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)$

A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$

$\Downarrow$

$ch_{A^{-1}}(x) = (\frac{1}{\lambda_1} - x)(\frac{1}{\lambda_2} - x)\cdots(\frac{1}{\lambda_n} - x)$

θυμάμαι:
A άνω τριγωνικός με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
A^{-1} άνω τριγωνικός με ιδιοτιμές $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$

$A \sim A^{-1} \Rightarrow$ έχουν το ίδιο $ch_A(x)$. $\Rightarrow$ τις ίδιες ρίζες

$\Downarrow$

$\left\{\begin{matrix} \lambda_1 & \frac{1}{\lambda_1} \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \frac{1}{\lambda_n} \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \lambda_i = \frac{1}{\lambda_i} \end{matrix}$

Αν n περιττός, δεν υπάρχουν ακέραια ζευγάρια
περισσεύει μια ιδιοτιμή που "δεν γίνεται ζευγάρι"

$\hookrightarrow \lambda_i = \frac{1}{\lambda_i} \to$ ζευγάρι με τον εαυτό της $\Rightarrow \lambda_i^2 = 1 \Rightarrow$

$\lambda_i = \pm 1$

πχ) $n=3$

$\lambda_1 \quad \frac{1}{\lambda_1}$

$\lambda_2 \quad \frac{1}{\lambda_2}$

$\lambda_3 \quad \frac{1}{\lambda_3}$

Υπάρχει μη-μηδενικό v: $Av = \lambda v \Leftrightarrow \lambda$ = ιδιοτιμή

$$A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1}v \Leftrightarrow A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$