$L: V \to V$. $\dim V < \infty$

L διαγωνοποιήσιμη $\Leftrightarrow$ έχει μια βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα.

βάση του V: $\{v_1, \dots, v_n\}$

$$Lv_i = \lambda_i v_i.$$

Ερώτηση: Υπάρχει ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα;

$L e_j = \lambda_j e_j$

$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

$(L, B, B) = A \longrightarrow (L^*, B, B) = A^* = \overline{A}^t$

Έχω υποθέσει ότι B ορθοκανονική.

- Αν ο A είναι διαγώνιος (ισοδύναμο με το ότι η B αποτελείται από ιδιοδιανύσματα) τότε και ο $\overline{A}^t$ είναι διαγώνιος:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A^* = \overline{A}^t = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα: Μια αναγκαία συνθήκη για να είναι ταυτόχρονα ως προς την ίδια βάση διαγώνιοι δύο πίνακες: $AB = BA$.

$$\underbrace{AA^* = A^*A \quad \text{ή} \quad LL^* = L^*L}_{\text{Αν δεν συμβαίνει αυτό, τότε δεν υπάρχει βάση ορθοκανονική από ιδιοδιανύσματα.}} \quad \text{(αντιμετατίθενται)}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $LL^* = L^*L$ τότε η γραμμική συνάρτηση θα λέγεται **κανονική**

πχ). • Μοναδιαίες γραμμ. απεικ. είναι κανονικές

$(LL^* = L^*L = I_n)$

• Ερμητιανές ή αυτοσυζυγείς: $L^* = L$

Γενικότερα, $L^* = g(L)$, $g = \sum_{v=0}^{n} a_v X^v$ κανονικές

SUPER SOS!

Οι ιδιοτιμές μιας ερμητιανής είναι όλες πραγματικές! $(L = L^*)$

Επίσης ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι κάθετα!

Αναλυτικά:

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω v ιδιοδιάνυσμα της L, $L^*=L$

$$\underbrace{\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle}_{\text{ιδιότητα εσ. γινομένου}} \underbrace{=}_{v \text{ ιδιοδιάν.}} \langle Lv,v\rangle \underbrace{=}_{\text{ορισμός συζυγούς}} \langle v,L^*v\rangle \underbrace{=}_{L \text{ ερμητιανή}} \langle v,Lv\rangle \underbrace{=}_{v \text{ ιδιοδιάν.}} \langle v,\lambda v\rangle \underbrace{=}_{\text{ιδιότητες εσωτερικού γινομένου}} \bar{\lambda}\langle v,v\rangle$$

Άρα $(\lambda-\bar{\lambda})\langle v,v\rangle = 0 \xRightarrow[v\neq 0]{\langle v,v\rangle\neq 0} \lambda=\bar{\lambda} \Rightarrow \underline{\lambda\in\mathbb{R}}$ ■

Ίδια απόδειξη (για καθετότητα): $\lambda\neq\mu$, v ιδιοδιάνυσμα του λ,
w —"— του μ.

$$\lambda\langle v,w\rangle = \langle \lambda v,w\rangle = \langle Lv,w\rangle = \langle v,L^*w\rangle = \langle v,Lw\rangle = \langle v,\mu w\rangle = \bar{\mu}\langle v,w\rangle = \mu\langle v,w\rangle$$

$$(\lambda-\mu)\langle v,w\rangle = 0 \xRightarrow{\lambda\neq\mu} \langle v,w\rangle = 0 \Rightarrow v\perp w$$

! SUPER SOS !

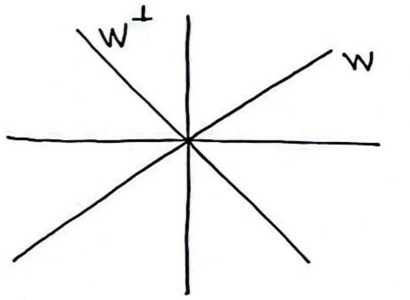
$\dim V<\infty$
$L: V\to V$
W είναι L-αναλλοίωτος $LW\subset W$

$\Rightarrow W^\perp$ είναι L^*-αναλλοίωτος.

$V = W\oplus W^\perp$

$W^\perp = \{w'\in V : \langle w,w'\rangle = 0 \ \forall\, w\in W\}$

$V \xrightarrow{L} V$
$V = W \oplus W^\perp$
W: $L|_W: W \to W$
$W^\perp$: $L^*|_W: W^\perp \to W$



! **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**:

$w\in W^\perp: \langle v,w\rangle = 0 \ \forall\, v\in W$

$L^*w\in V$

$\langle v, L^*w\rangle = \langle \underbrace{Lv}_{\in W - L\text{-αναλλοίωτος}}, \underbrace{w}_{\in W^\perp}\rangle = 0 \quad \forall\, v\in W$

Άρα $L^*w\in W^\perp$

$L: V\to V$ Ερμητιανή, $\dim V<\infty$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει βάση (ορθοκανονική!) αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα.

→ Με επαγωγή στη διάσταση

Σελ. 3 →

Επαγωγή στη διάσταση: 20.11.23

- Αν $\dim V = 1$: προφανές. (όλοι οι 1×1 πίνακες είναι διαγώνιοι)
- Υποθέτουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για όλους τους διανυσματικούς χώρους διάστασης $n-1$.

(τουλάχιστον)

Η L έχει ένα ιδιοδιάνυσμα v. (αυτό είναι σαφές αν δουλεύουμε στο $\mathbb{C}$ γιατί το $ch_A(x)$ έχει μια πραγματική ρίζα) → διότι όλες οι ιδιοτιμές μιας ερμητιανής είναι πραγματικές.

και $\frac{v}{\|v\|} = e$: ορθ/κο διάν.

$V = \langle e \rangle \oplus \langle e \rangle^{\perp}$

Ο $\langle e \rangle$ είναι L-αναλλοίωτος και $Le = \lambda e$ γιατί e ιδιοδιάνυσμα.

$L^* : \langle e \rangle^{\perp} \to \langle e \rangle^{\perp}$

$\parallel$ (ερμητιανή)

L συνάρτηση $+ \dim \langle e^{\perp} \rangle = n-1$ $\left.\right\}$ Επαγωγική $\Rightarrow$ υπόθεση $L^* : \langle e \rangle^{\perp} \to \langle e \rangle^{\perp}$ διαγωνοποιήσιμη με ορθοκανονική βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα.

$$V = W \oplus W^{\perp}$$
$$n \quad k \quad (n-k)$$

$\{e_2, \dots, e_n\}$ ορθοκανονικά του $\langle e^{\perp} \rangle$

$\langle e, e_i \rangle$, $i = 2, \dots, n$

↳ ορθογώνια με το πρώτο.

Δηλαδή, δεν υπάρχει πίνακας που να είναι ερμητιανός και να μην είναι διαγωνοποιήσιμος

Αν $A = A^* \Rightarrow$ ο A είναι διαγωνοποιήσιμος σε ορθοκανονική βάση!

Άρα αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{a} = a$

$a \in \mathbb{C}$

$A = A^* \Rightarrow A = A^t$

↳ συμμετρικοί

↝ είναι διαγωνοποιήσιμοι και υπάρχει βάση από ιδιοδιανύσματα τα οποία είναι στο $\mathbb{R}^n$ το καθένα

γιατί;

$A \in \mathbb{R}^{n,n} \to ch_A(x) \in \mathbb{R}[x] \to$ έχει μια μιγαδική ρίζα $\to$

η ρίζα είναι πραγματική (ερμητιανός) $\to$ έχει ιδιοδιάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$

$(A - \lambda I_n)x = 0$

$\mathbb{R}^{n,n}$ ↳ $\mathbb{R}$ ↳ $\mathbb{R}^n$ → $\det(A - \lambda I_n) = 0$!

Γενικότερα, για τους κανονικούς πίνακες : 20.11.2023

$$P^{-1}AP=\Delta \rightarrow P^{*}AP=\Delta$$

- Κανονική γραμ. συνάρτηση $V\to V$, $\dim V<\infty$ $(LL^*=L^*L)$

$\|Lv\| = \|L^*v\|$ ⊛ $\langle Lv,w\rangle = \langle v, L^*w\rangle$: ορισμός της L^* καλό SOS θεματάκι

$$\|Lv\|^2 \overset{\text{ορισμός}}{=} \langle Lv, Lv\rangle = \langle v, L^*Lv\rangle = \langle v, LL^*v\rangle = \langle L^*v, L^*v\rangle = \|L^*v\|^2 \quad (L^*)^*=L$$

$L: V\to V$ κανονική $\Rightarrow LL^*=L^*L$

$v\in V$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την L με ιδιοτιμή λ αν και μόνο αν είναι ιδιοδιάνυσμα για την L^* με ιδιοτιμή $\bar{\lambda}$.

ΑΠΟΔ.

$T = L-\lambda Id$: και αυτή είναι κανονική

$$TT^* = (L-\lambda Id)(L^*-\bar\lambda Id)$$
$$= \underline{LL^*} - \lambda L^* - \bar\lambda L + \lambda\bar\lambda Id$$
$$= \underline{L^*L} - \lambda L^* - \bar\lambda L + \lambda\bar\lambda Id = T^*T$$

$\lambda\langle v,w\rangle = \bar{\bar\lambda}\langle v,w\rangle$

$\langle \lambda v,w\rangle = \langle v,\bar\lambda w\rangle$

$\langle \lambda Id v,w\rangle$ $\langle v,\bar\lambda Id w\rangle$

$(\lambda Id)^* = \bar\lambda Id$

$(T-\lambda Id)^* = T^* - (\lambda Id)^* = T^* - \bar\lambda Id$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα: ⊛

$$\|Lv-\lambda v\| = \|Tv\| = \|T^*v\| = \|L^*v-\bar\lambda v\|$$

Αν $Lv-\lambda v=0$ τότε $\|L\cdot v-\lambda v\|=0 \Rightarrow$

$\|L^*v-\bar\lambda v\|=0 \Rightarrow L^*v-\bar\lambda v=0 \Rightarrow$ v ιδιοδιάνυσμα της L^* με ιδιοτιμή $\bar\lambda$. ∎

$\dim V = n<\infty$, $L: V\to V$, B ορθοκανονική βάση. Υποθέτουμε ότι (L,B,B) είναι άνω τριγωνικός $\Rightarrow$ Η L είναι κανονική αν και μόνο αν είναι διαγώνιος (L,B,B).

$A=(L,B,B)$, $A^*=(L^*,B,B)$ γιατί; B ορθοκανονική

Αν $A=$ είναι διαγώνιος, τότε και ο A^* είναι διαγώνιος, άρα $AA^*=A^*A$, άρα ο A και η L είναι κανονική.

Αντιστρόφως: Η L είναι κανονική

$B=\{e_1,\dots,e_n\}$ ορθοκαν/κή βάση

$$(L,B,B) = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

→ Συνέχεια Σελ. 5

$Le_1 = a_{11} e_1$ $\quad (Le_1 = \sum_{v=1}^{n} a_{v1} e_v)$ $\quad (L,B,B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

↳ Άρα e_1 ιδιοδιάνυσμα του L

$L^* e_1 = \overline{a_{11}} e_1$ γιατί L-κανονική.

Ξέρουμε ότι $(L^*, B, B) = \overline{A}^t = (L,B,B)^*$

$$= \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & & 0 \\ \vdots & * & \ddots & \\ \overline{a_{1n}} & & & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

άρα όλα αυτά είναι 0!

⇓

- $Le_2 = a_{22} e_2$ ιδιοδιάνυσμα

⇓

$L^* e_2 = \overline{a_{22}} e_2$

⋮

Άρα ο πίνακας είναι διαγώνιος.

V: πεπερασμένης διάστασης δ.χ.

$L: V \to V$ (οποιαδήποτε γρ. απεικόνιση) $\Rightarrow$ Υπάρχει ορθοκανονική βάση ώστε το (L,B,B) να είναι άνω τριγωνικός

↳ Για την διαγωνοποίηση πρέπει να είναι κανονική, εδώ γίνεται για οποιαδήποτε!

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> (με επαγωγή)

$\dim V = 1$ (προφανές)

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει $\forall\ L: V' \to V'$, $\dim V' = n-1$

Έστω $L: V \to V$, $\dim V = n$.

Έστω v ένα ιδιοδιάνυσμα της L^*. Θεωρούμε $e = \frac{v}{\|v\|}$ ορθοκανονικό $\langle e \rangle$

$\to \langle e \rangle^{1} \oplus \langle e \rangle^{\perp\, n-1} = V^n$

$\langle e \rangle$: L^*-αναλλοίωτος, $\langle e \rangle^\perp$: L-αναλλοίωτος, $(L^*)^* = L$

$$V = \underset{L^*}{\overset{L}{W}} \oplus \underset{(L^*)^*}{\overset{L^*}{W^\perp}}$$

↳ Άρα υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_{n-1}\} = B'$ $\langle e \rangle^\perp$

Συνέχεια

20.11.23

$$(L,B',B') = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 0 & & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \quad B' = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}.$$

$$B = \{e_1, \dots, e_{n-1}, e\}$$

$$(L,B,B) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ e \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & & * & * \\ & \ddots & & * \\ 0 & & a_{n-1,n-1} & * \\ \boxed{0 \ \ 0 \ \cdots \ 0} & & & * \end{pmatrix}$$

e, μπορεί να είναι οτιδήποτε γιατί το e είναι L^*-αναλλοίωτο όχι L-αναλλοίωτο.

πχ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & * \\ 0 & 2 & 5 & * \\ 0 & 0 & 6 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \text{τριγωνικός.}$$

$\langle e \rangle^{\perp} = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ είναι L-αναλλοίωτο.

$L : V \to V$ κανονική $(LL^* = L^*L)$

τότε $\exists$ βάση του V, ορθοκανονική, αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα.

Άρα υπάρχει ορθοκανονική βάση στην οποία ο (L,B,B) να είναι διαγώνιος.