Άσκηση Φυλλαδίου (1)

V : δ.χ. των διαφορίσιμων συναρτήσεων $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$D: V\to V$, $f \longmapsto Df = f'$ | Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιο/τα της D.

ιδιοδιάνυσμα, ιδιοτιμή

Ψάχνουμε για $\lambda\in\mathbb{R}$: $Df=\lambda f$, $f\neq 0$ $\Rightarrow f'=\lambda f \Rightarrow \underline{f=ce^{\lambda x}}$, $c\in\mathbb{R}$

Ο ιδιοχωρος της ιδιοτιμής λ είναι μονοδιάστατος :

$\langle e^{\lambda x}\rangle$, και κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή.

$V=\mathbb{C}^{n,n}$, $V\times V\to V$

$(A,B)\longmapsto tr(AB^*)$, $B^*=(\overline{B})^t$

↳ Ν.δ.ο. αυτό είναι ένα εσωτ. γινόμενο.

• Στην πραγματικότητα είναι ένα γνωστό εσωτερικό γινόμενο: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$

$tr A$, $A=(a_{ij})$, $= \sum_{i=1}^n a_{ii}$ $\Rightarrow$ $\overline{B}=(\overline{b_{ij}})$, $B^*=(\overline{b_{ij}})^t=\overline{b_{ji}} = (b^*_{ij})$ · $b^*_{vj}=\overline{b_{jv}}$

• $C=AB^*$,

$\Downarrow$

$$c_{ij}=\sum_{i=1}^n a_{iv}b^*_{vj}=\sum_{v=1}^n a_{iv}\overline{b_{jv}}$$

• $tr(AB^*)=$

$$\sum_{i=1}^n c_{ii}=\sum_{i=1}^n\sum_{v=1}^n a_{iv}\overline{b_{iv}}$$

→ το εσωτερικό γινόμενο, όπως το ορίσαμε, και συγκεκριμένα, το Ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο.
↳ κανονικό

$\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\longmapsto\sum_{i=1}^n a_i\overline{b_i}$$

$\mathbb{C}^{n,n}\to\mathbb{C}^{n^2}$

$E_{ij}=(0\ 1\ 0)\leftarrow i$, $\uparrow j$

$A\longrightarrow[\sim]_B$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

— Έγραψα την πληροφορία ως στήλη με τον ίδιο τρόπο.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

— Αν αυτά τα δω ως στοιχεία στο $\mathbb{C}^4$ το εσωτερικό τους γινόμενο θα είναι:

$$a_{11}\overline{b_{11}} + a_{12}\overline{b_{12}} + a_{21}\overline{b_{21}} + a_{22}\overline{b_{22}}$$

Ακριβώς αυτό που γράψαμε πίσω!

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} a_{iv}\overline{b_{iv}} = \sum_{i=1}^{2}(a_{i1}\overline{b_{i1}} + a_{i2}+\overline{b_{i2}}) = a_{11}\overline{b_{11}} + a_{12}\overline{b_{12}} + a_{21}\overline{b_{21}} + a_{22}\overline{b_{22}}\,!$$

⇝ Μένει να δ.ο. ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος:

- $\langle A_1 + A_2, B\rangle = tr((A_1+A_2)B^*) = tr(A_1B^* + A_2B^*) = tr(A_1B^*) + tr(A_2B^*)$
  $= \langle A_1, B\rangle + \langle A_2, B\rangle$

- $\langle \lambda A, B\rangle = tr(\lambda A, B^*) = \lambda tr(A, B^*) = \lambda\langle A, B\rangle$

- $\left\{\begin{array}{l} \langle A, B\rangle = tr(AB^*) \\ \langle B, A\rangle = tr(BA^*) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ = tr(\overline{(AB^*)^*}) = tr(\overline{(B^*)^* A^*}) = \right.$

- $tr(A^*) = \overline{tr(A)}$ $\quad A^* = (\overline{A}^t) = \overline{(A^t)}$ $\quad \left.\right\}$ $tr(A^*) = tr(\overline{A}^t) = \overline{tr(A^t)} = \overline{tr(A)}$

Πρέπει επίσης να δ.ο. $\langle A, A\rangle > 0$ και $\langle A, A\rangle = 0 \iff A = 0$.

⇝ $\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} a_{iv}\overline{a_{iv}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} |a_{iv}|^2 \geq 0 \longrightarrow z\cdot\overline{z} = |z|^2$

για να είναι 0 πρέπει ο καθένας από αυτούς να είναι 0! (αφού είναι θετικός)

- V, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ βάση. Να αποδειχθεί ότι οι τιμές $\langle v_i, v_j\rangle$ καθορίζουν το εσωτερικό γινόμενο.

$$\left.\begin{array}{l} v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \\ w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \end{array}\right\} \Rightarrow \langle v, w\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{n}\mu_j v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\overline{\mu_j}\langle v_i, v_j\rangle \quad (*)$$

Συνέχεια ⟶ Σελ. 3

8.11.23

$Q=(q_{ij})$, $q_{ij}=\langle v_j, v_i\rangle$

$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=[v]_B$, $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}=[w]_B \rightarrow$ Συμβολισμός από Γρ. ①.

$\Downarrow$

$$\langle v,w\rangle = \underset{\text{γραμμή}}{w^*}\, Q\, \underset{\text{στήλη.}}{v} = \underset{1\times n}{(\bar{\mu}_1,\dots,\bar{\mu}_n)}\ \underset{n\times n}{Q_{ij}}\ \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{Τύπος}}$: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=AB$

$C=(c_{ij})=\sum a_{i\nu}b_{\nu j}$

Αν έχω 3 πίνακες;, ή παραπάνω:

$A^1 A^2 \dots A^k$

$(a_{ij})^{(1)} (a_{ij})^{(2)} \dots (a_{ij})^{(k)}$

$$c_{ij}=\sum_{\nu_1,\nu_2,\dots} a_{i\nu_1}^{(1)} a_{\nu_1\nu_2}^{(2)} a_{\nu_2\nu_3}^{(3)}\cdots a_{\nu_{k-1}j}^{(k)}$$

Άρα αυτό είναι:

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \mu=1}}^{n} \bar{\mu}_\nu q_{\nu\mu}\lambda_\mu =$$

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \mu=1}}^{n} \bar{\mu}_\nu \langle v_\mu, v_\nu\rangle \lambda_\mu$$: είναι το ⊛

Αν Q είναι ένας $n\times n$ πίνακας

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}\\ \underset{\text{στήλη}}{x} \quad \underset{\text{στήλη}}{y} \to y^*Qx \end{array}\right\}$$ είναι εσωτερικό γινόμενο; $\boxed{\text{όχι πάντα}}$

$\langle x,y\rangle = y^*Qx$

$q_{ij}=\langle v_j,v_i\rangle$, θα πρέπει $q_{ij}=\overline{q_{ji}}$

Αν $x=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ← i θέση $y=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ← j-θέση.

↳ Για αυτό το $\langle x,y\rangle = y^*Qx = q_{ji}$

Για να είναι εσ. γινόμενο θέλω $\underset{q_{ji}\,!}{\langle x,y\rangle} = \underset{\overline{q_{ij}}\,!}{\overline{\langle y,x\rangle}}$ $\forall x,y\in\mathbb{C}^n$

Άρα αναγκαία συνθήκη για να έχω εσωτερικό γινόμενο: $Q=Q^*$

↳ Θα πρέπει επίσης, $\forall x,y\in\mathbb{C}^n$: $y^*Qx\geq 0$ → θετικά ορισμένος

$+\ y^*Qy=0 \Rightarrow y=0$

$n\times n$ ίσου

8.11.23

πχ) $Q = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \checkmark$

$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Η συνθήκη της θετικότητας χάνεται!

$$(0,0,\dots,1)\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$