V διαν. χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\dim V < \infty$

W υπόχωρος του V

↳ Υπάρχει μια διάσπαση του V: $V = W \oplus W^{\perp}$ ώστε $\forall v \in W$ και κάθε $w \in W^{\perp}$: $\langle w\, w^{\perp} \rangle = 0$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Έστω $w_1, \dots, w_n$ βάση του W.
την οποία συμπληρώνουμε σε βάση του V: ($\dim V = n+m$)

$\{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_m\}$

↓ ορθοκανονικοποιούμε

$\{e_1, \dots, e_n\} \to$ ορθοκανονική του W

⊛ $\{e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\} \to$ ορθοκανονική βάση του V.

Άρα αρκεί $W^{\perp} = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \rangle$, και έτσι είναι σαφές ότι:

$W \oplus W^{\perp} = V \Leftarrow$
- $W + W^{\perp} = V$ (γιατί κάθε διάνυσμα του V γράφεται ως γρ.συν. των βάσεων των W, $W^{\perp}$)
- $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ (γιατί τα ⊛ αποτελούν βάση)

$$\left.\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \\ w' &= \sum_{j=1}^{m} \mu_j \varepsilon_j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle w, w' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \overline{\mu_j} \underbrace{\cancel{\langle e_i, \varepsilon_j \rangle}}_{0}$$

- Υπάρχει συνάρτηση $P_W : V \to W \subset V$

$$\underset{\substack{\text{ } \\ W \ \ W^{\perp}}}{v = w + w'} \longmapsto P_W(v) = w$$

$$P_{W^{\perp}} : V \to W^{\perp}$$

$$v = w + w' \longmapsto P_{W^{\perp}}(v) = w'$$

→ Εδώ έχουμε έναν χώρο που θα μας απασχολήσει στην συνέχεια:

$\mathrm{End}(V) = \{V \xrightarrow{f} V,\ f \text{ γραμμική}\}$

↳ "ενδομορφισμοί του V"

⇝ $P_W, P_{W^{\perp}} \in \mathrm{End}(V)$

$1_V = P_W + P_{W^{\perp}}$ $\xrightarrow{\text{γιατί}}$

Γενικά: αν $f: V \to V$
$g: V \to V$

$(f+g)v = f(v) + g(v)$

$$v = 1_V(v) = \underset{w}{P_W(v)} + \underset{w'}{P_{W^{\perp}}(v)} = (P_W + P_{W^{\perp}})(v)$$

$$\left.\begin{aligned} P_W^2 &= P_W \\ P_{W^{\perp}}^2 &= P_{W^{\perp}} \end{aligned}\right\} \text{προφανή} \to P_W^2 = P_W \circ P_W \Rightarrow$$

$$P_W^2(v) = P_W(P_W(v)) \underset{\substack{v = w + w' \\ w = w + 0}}{=} P_W(w) = w = P_W(v)$$

$$v = w + w^{\perp} \xrightarrow{P_W} w = w + 0 \xrightarrow{P_{W^{\perp}}} 0$$

($w \in W$, $0 \in W^{\perp}$)

$$v = w + w^{\perp} \xrightarrow{P_{W^{\perp}}} 0 + w' \xrightarrow{P_W} 0$$

$+\ P_W \circ P_{W^{\perp}} = P_{W^{\perp}} \circ P_W = 0_{\mathrm{End}(V)}$

πίσω → η συνέχεια.

Περνώντας σε πίνακες: 6.11.2023

$$\mathrm{End}(V) \xrightarrow{B \text{ ορθ. βάση}} \mathbb{F}^{n,n}$$

$$f: V \to V \longrightarrow (f, B, B)$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ A}}{(P_W, B, B)} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \}n \\ \}m \end{matrix} \\ \underbrace{\quad}_{n} \underbrace{\quad}_{m} \end{array} \xrightarrow{\text{γιατί;}} \begin{cases} P_W(e_1) = e_1 \\ P_W(e_2) = e_2 \\ \vdots \\ P_W(e_n) = e_n \\ P_W(\varepsilon_1) = 0 \\ \vdots \\ P_W(\varepsilon_m) = 0 \end{cases}$$

[Η μετάβαση από τις γραμμικές συναρτήσεις στους πίνακες είναι ισομορφισμός δ. χώρων]

$$\underset{\substack{\parallel \\ B}}{(P_{W^\perp}, B, B)} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{matrix} \end{array} \right) \begin{matrix} \}n \\ \}m \end{matrix} \\ \underbrace{\quad}_{n} \underbrace{\quad}_{m} \end{array} \qquad \begin{cases} P_{W^\perp}(e_1) = 0 \\ \vdots \\ P_{W^\perp}(e_n) = 0 \\ P_{W^\perp}(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \\ \vdots \\ P_{W^\perp}(\varepsilon_m) = \varepsilon_m \end{cases}$$

$\leadsto$ $A + B = \mathbb{I}_{n+m}$, $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA = 0$.

Η διάσπαση του V αντανακλάται στις πράξεις του $(\mathrm{End}(V), \cdot, +)$ → για επόμενα μαθήματα.

Δυικός Χώρος V διανυσματικός χώρος

$$\boxed{V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F}) = \left\{ V \xrightarrow{f} \mathbb{F},\ f \text{ γραμμική συνάρτηση} \right\}} \leadsto \text{διανυσματικός χώρος.}$$

Γιατί είναι δ.χ.; $\left\{ \begin{array}{l} f \in V^*, g \in V^* \leadsto (f+g)(v) = f(v) + g(v) \\ \lambda \in \mathbb{F},\ f: V \to \mathbb{F} \to (\lambda f)(v) = \lambda f(v) : V \to \mathbb{F} \end{array} \right\}$

$\leadsto$ κάθε $\overset{\text{σταθερό}}{\overset{\uparrow}{a}} \in V$ ορίζει ένα στοιχείο στο δυικό.

$$\left. \begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{F} \\ v \overset{f_a}{\longmapsto} \langle v, a \rangle \in \mathbb{F} \end{array} \right\} \to \text{Η } f_a \in V^*, \text{ δηλαδή είναι γραμμική.}$$

↓ πως το δείχνω αυτό;

- $f_a(v_1 + v_2) = \langle v_1 + v_2, a \rangle = \langle v_1, a \rangle + \langle v_2, a \rangle = f_a(v_1) + f_a(v_2)$
- $f_a(\lambda v) = \langle \lambda v, a \rangle = \lambda \langle v, a \rangle = \lambda f_a(v)$.

Και τώρα ρωτάμε το εξής:

Είναι κάθε γραμμική συνάρτηση από το $V \to \mathbb{F}$ της μορφής $f(v) = \langle v, a \rangle$ για κάποιο $a \in V$;

↳ ΝΑΙ αν $\dim V < \infty$

↳ Συνέχεια σελ. 3

Πως το βλέπει κανένας αυτό;

$$a=\sum_{j=1}^{n}\overline{f(e_j)}\,e_j \quad , \text{όπου } \{e_1,\dots,e_n\}: \text{ορθοκανονική βάση του } V$$

$$\underbrace{\langle e_i,a\rangle}_{f(e_i)}=\langle e_i,\sum_{j=1}^{n}\overline{f(e_j)}e_j\rangle=\sum_{j=1}^{n}f(e_j)\underbrace{\langle e_i,e_j\rangle}_{\delta_{ij}}=f(e_i)$$

· Έχουμε δύο γραμμικές συναρτήσεις οι οποίες ταυτίζονται στην βάση, άρα είναι ίδιες (Σαφές από Γραμμική Ι):

$$v=\sum \lambda_i e_i$$
$$f(v)=\sum \lambda_i f(e_i)$$
$$g(v)=\sum \lambda_i g(e_i)$$
$$\text{Αν } \underset{1\le i\le n}{f(e_i)=g(e_i)} \Rightarrow \boxed{f=g}$$

Άρα έχουμε κατασκευάσει ένα στοιχείο a, έτσι ώστε την τυχαία γραμμική απεικόνιση να την δούμε σαν πολλαπλασιασμό με ένα στοιχείο από τον χώρο V.

Παράδειγμα (που αυτό που θέλουμε δεν είναι εφικτό)

$V=\mathbb{C}[x]$

$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ | z σταθερό, $\mathbb{C}[x]\to\mathbb{C}$, $f\longrightarrow eval_z(f)=f(z)$

(Γραμμική στο f, όχι στο z!)

$$(\lambda f+\mu g)\longrightarrow eval(\lambda f+\mu g)=\lambda f(z)+\mu g(z)=\lambda\, eval(f)+\mu\, eval(g).$$

→ Έστω ότι $\exists$ πολυώνυμο g: $eval(f)=\langle f,g\rangle \ \forall f\in\mathbb{C}[x]$

Διαλέγουμε την f: $f(x)=(x-z)h(x)=\int_0^1 (t-z)h(t)\overline{g(t)}\,dt \Rightarrow$ $\forall h\in\mathbb{C}[t]$, $h=\overline{(x-z)}g(x)$

$$0=eval(f)=(z-z)h(z)$$

$$0=\int_0^1 (t-z)\overline{(t-z)}g(t)\overline{g(t)}\,dt$$
$$=\int_0^1 |t-z|^2|g(t)|^2\,dt \Rightarrow g=0$$

Άρα $eval(f)=\langle f,g\rangle$ αν $g=0$

$eval(f)$: πρέπει να είναι μηδενική, που <u>δεν</u> είναι!

$T:V\to V$ $\dim V=n<\infty$ (πεπερασμένη)

↳ τότε $\boxed{\exists!\, T^*:V\to V : \forall v,w\in V: \langle Tv,w\rangle=\langle v,T^*w\rangle}$

∘ Κρατάμε σταθερό το w:

$v\longrightarrow \langle Tv,w\rangle\in\mathbb{C}$ είναι ένα

$v\longrightarrow Tv\longrightarrow\langle\cdot,w\rangle$

→ Συνέχεια σελ. 4

6.11.2023

Υπάρχει $a \in V$: $\langle Tv, w\rangle = \langle v, a\rangle$.

Θέτουμε $a = T^*w$

$\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$. θ.δ.ο. η συνάρτηση $w \to T^*w$ είναι γραμμική.

$\Rightarrow T^*(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda T^*(w_1) + \mu T^*(w_2)$:

$$\langle v, T^*(\lambda w_1 + \mu (w_2))\rangle \overset{\text{ορισμός}}{=} \langle Tv, \lambda w_1 + \mu w_2\rangle$$
$$= \bar{\lambda}\langle Tv_1, w_1\rangle + \bar{\mu}\langle Tv, w_2\rangle$$
$$= \langle v, \lambda T^* w_1 + \mu T^* w_2\rangle \quad \forall v \in V$$

ΛΗΜΜΑ: $\langle v, a\rangle = \langle v, b\rangle \ \forall v \in V$, τότε $a = b$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\langle v, a-b\rangle = 0 \ \forall v \in V \Rightarrow v = a - b \Rightarrow \langle a-b, a-b\rangle = 0 \Rightarrow \underline{a=b}$ ■

Συνεχίζουμε

Άρα $T^*(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda T^*(w_1) + \mu T^*(w_2) \Rightarrow T^*: V \to V$ γραμμική ■

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$: ορθοκανονική βάση

$T: V \to V$ γραμμική

$A = (a_{ij}) = (T, B, B)$

$a_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle$

ανάποδα!

Άρα, αν θέλω να λογαριάσω τον πίνακα και έχω το γινόμενο και την συνάρτηση, τα υπολογίζω.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i$$

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \quad \text{ορισμός του πίνακα } A$$

$$\Downarrow$$

$$\langle Te_j, e_k\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, e_k\rangle = a_{k,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \langle e_i, e_k\rangle = \delta_{ik}$$

● Δεύτερο συμπέρασμα:

$A = (a_{ij})$, $A^* = (\overline{a_{ij}}) = (\bar{A})^t$, Άρα αν $\begin{cases} A = (a_{ij}) = (T, B, B) \text{ τότε} \\ A^* = (T^*, B, B) \end{cases}$

- $\left.\begin{array}{l} a_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle \\ b_{ij} = \langle T^*e_j, e_i\rangle \end{array}\right\}$ $\underline{(T^*)^* = T}$

Συνέχεια σελ. ⑤

6.11.2023

$\overline{\langle T^*w, v\rangle} = \langle v, T^*w\rangle = \langle Tv, w\rangle = \overline{\langle w, Tv\rangle}$

Άρα $\left.\begin{array}{l} \langle T^*w, v\rangle = \langle w, Tv\rangle \\ \quad \| \\ \langle w, (T^*)^*v\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow (T^*)^* = T$

$\rightsquigarrow b_{ij} = \langle T^*e_j, e_i\rangle = \langle e_j, (T^*)^*e_i\rangle = \langle e_j, Te_i\rangle = \overline{\langle Te_i, e_j\rangle} = \overline{a_{ji}}$

$\Rightarrow b_{ij} = (\overline{a_{ji}})$

Παράδειγμα: $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \to \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

$\langle x, y\rangle = y^* \cdot x$ $\rightsquigarrow$ πολλ/μος πινάκων

$= \overline{y}^t \cdot x = (\overline{y_1, \dots, y_n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{C}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto] & A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$\langle Ax, y\rangle = y^* \cdot Ax = y^*(A^*)^*x = (A^*y)^* \cdot x = \langle x, A^*y\rangle$

$A^* = \overline{A}^t$

$(A^*)^* = \overline{\overline{A}^t}^t = A$

$(AB)^* = (\overline{A}\overline{B})^t = \overline{B}^t\overline{A}^t = B^*A^*$

Θυμάμαι από Γρ. Ι. ότι $(AB)^t = B^tA^t$!