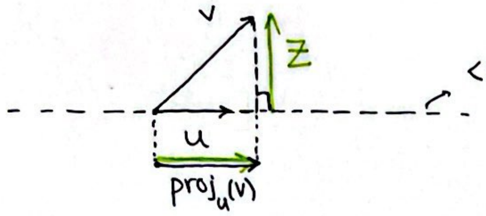
Ορθοκανονική βάση

$\underbrace{\{v_1,\dots,v_n\}}_{\gamma.\alpha.} \subset V$, V χώρος με εσωτερικό γινόμενο , $W=\langle v_1,\dots,v_n\rangle$.

Υπάρχουν ασκήσεις και παραδείγματα που θέλουμε να έχουμε μια ορθοκανονική βάση του W. [ορθοκ/κή βάση: $\{e_1,\dots,e_n\}$, όταν $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$]

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\boxed{\text{Προβολή}}$ $v\in V$ στο $\langle u\rangle \in V$ είναι: $proj_u(v)=\dfrac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\cdot u$
$\mathbb{F}$



$\rightsquigarrow proj_u(v)+z=v \Rightarrow$

$z=v-proj_u(v)$

$$\rightsquigarrow \langle \underbrace{v-proj_u(v)}_{z},\,u\rangle=\langle v,u\rangle-\left\langle \frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\cdot u,\,u\right\rangle=\langle v,u\rangle-\frac{\langle v,u\rangle}{\cancel{\langle u,u\rangle}}\cancel{\langle u,u\rangle}=0.$$

• Οπότε τώρα θα δώσουμε μια αναδρομική μέθοδο: (SOS για εξετάσεις)

ΜΕΘΟΔΟΣ GRAM-SCHMIDT

Είναι ένας αλγόριθμος όπου παίρνει τα $\underbrace{\{v_1,\dots,v_n\}}_{\gamma.\alpha.}\in V$ και παράγει τα $e_1,\dots,e_n \to$ ορθοκανονικά και $\langle e_1,\dots,e_n\rangle=\langle v_1,\dots,v_n\rangle$.

● Θέτουμε: $u_1=v_1$

$u_2=v_2-proj_{u_1}(v_2)$

$u_3=v_3-proj_{u_1}(v_3)-proj_{u_2}(v_3)$

$u_4=v_4-proj_{u_1}(v_4)-proj_{u_2}(v_4)-proj_{u_3}(v_4)$

$\vdots$

$$u_n=v_n-\sum_{j=1}^{n-1}proj_{u_j}(v_n)$$

Καταλήγω σε $u_1,\dots,u_n$ ώστε το $\langle u_i,u_j\rangle=\delta_{ij}\|u_i\|^2$

Τελευταίο βήμα: $\boxed{e_i=\dfrac{u_i}{\|u_i\|}} \to$ ορθοκανονική βάση, διανύσματα ανά 2 κάθετα με μέτρο 1!

$\rightsquigarrow \left\|\dfrac{u}{\|u\|}\right\|=\dfrac{\|u\|}{\|u\|}=1$

$\|\lambda u\|=|\lambda|\,\|u\|$
↳ είναι στον ορισμό ενός χώρου με νόρμα

$\rightsquigarrow \left\langle \dfrac{u}{\|u\|},\dfrac{u}{\|u\|}\right\rangle=\dfrac{1}{\|u\|}\cdot\dfrac{1}{\|u\|}\cdot\langle u,u\rangle=\dfrac{1}{\|u\|^2}\|u\|^2=1.$

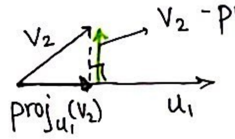
Σελ. 2 →

· Γιατί δουλεύει αυτή η μέθοδος;

Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ αν $i \neq j$.

⤳ u_1 : δεν έχει νόημα το ερώτημα

⤳ $\{u_1, u_2\}$, πράγματι $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ ⤳



$v_2 - proj_{u_1}(v_2)$: δείξαμε πριν ότι είναι κάθετο. ✓

⤳ Υποθέτουμε ότι $\{u_1, \dots, u_k\}$ ανά 2 κάθετα.

Θα δείξουμε ότι $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ ανά 2 κάθετα.

· Θέλουμε να λογαριάσουμε το $\langle u_{k+1}, u_i \rangle$ και να δείξουμε ότι είναι 0 για κάθε $i \in \{1, \dots, k\}$.

$$u_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} proj_{u_j}(v_{k+1}).$$

$$\langle v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} proj_{u_j}(v_{k+1}), u_i \rangle$$ = γραμμικότητα του εσωτ. γινομένου ως προς την πρώτη μεταβλητή.

IF άρα περνάνε έξω

$$= \langle v_{k+1}, u_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle \underbrace{\frac{\langle v_{k+1}, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle}} u_j, u_i \rangle$$

$$= \langle v_{k+1}, u_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} \langle u_j, u_i \rangle$$

Η επαγωγική υπόθεση δίνει ότι: $\langle u_j, u_i \rangle = \delta_{ij} \langle u_i, u_i \rangle$

$$= \langle v_{k+1}, u_i \rangle - \langle v_{k+1}, u_i \rangle \frac{\cancel{\langle u_i, u_i \rangle}}{\cancel{\langle u_i, u_i \rangle}} = 0$$ ■ ΤΕΛΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ [Επαγωγής]

- Άρα τα $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα
- $e_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ⤳ γ.α. (γιατί δ.ο. κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι γ.α.)

άρα $\Rightarrow \langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ — παράγουν τον ίδιο χώρο.

Παράδειγμα

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}}_{v_3}$$

⤳ $u_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

⤳ $proj_{u_1}(v_2) = \dfrac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \dfrac{2+2}{1+4+9} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \dfrac{4}{14} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Άρα $u_2 = v_2 - \dfrac{4}{14}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \dfrac{2}{7}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix}12/7\\3/7\\-6/7\end{pmatrix}$

Μια γρήγορη επαλήθευση:

$\langle u_1, u_2 \rangle = \dfrac{12}{7} + \dfrac{6}{7} - \dfrac{3 \cdot 6}{7} = 0$ ✓

⤳ $proj_{u_1}(v_3) = \dfrac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 = \dfrac{\overset{7}{\overbrace{-1+2+6}}}{14} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

⤳ $proj_{u_2}(v_3) = \dfrac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 = \dfrac{-21/7}{189/49} \cdot \begin{pmatrix}12\\3\\-6\end{pmatrix} = \dfrac{-3 \cdot 49}{189 \cdot 7}\begin{pmatrix}12\\3\\-6\end{pmatrix}$ ⇒

↳ $\dfrac{1}{49}(12^2 + 9 + 6^2) = \dfrac{189}{49}$

$u_3 = v_3 - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \dfrac{3 \cdot 49}{189 \cdot 7}\begin{pmatrix}12\\3\\-6\end{pmatrix}$

...

↓ αφού τα βγάλω τα διαιρώ και τα 3 με τα μέτρα τους.

Πόρισμα 1] Κάθε χώρος έχει ορθοκανονική βάση

2] $W < V$ τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του W που συμπληρώνεται σε ορθοκανονική βάση του V.

Η μέθοδος gram-schmidt :

$$\langle v_1 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \dots \subseteq \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

$$\langle e_1 \rangle \subseteq \langle e_1, e_2 \rangle \subseteq \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \dots$$

Δηλαδή :

W

$\underbrace{\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}_{\text{βάση του } W} \;,\; \{u_1, \dots, u_m\}}_{\text{βάση του } V}$

$e_1, \dots, e_n$ ορθοκ/κή βάση του W

$e_{n+1}, \dots, e_{n+m}$ συνεχίζει την διαδικασία GS

Μια από αυτές: ← Αυτά έχουν εφαρμογές

Βελτιστοποίηση

• Ο W έχει : $W^{\perp}$ → ορθογώνιο συμπλήρωμα

κάθε $u \in W^{\perp}$:

$\langle w, u \rangle = 0 \quad \forall w \in W$

$V = W \oplus W^{\perp}$

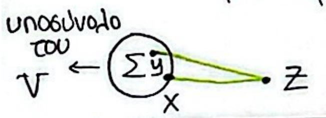
$\{e_1, \dots, e_n\}$ ορθ. βάση , $\{e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\}$

γιατί αυτοί οι 2 διαν. χώροι είναι κάθετοι μεταξύ τους;

αν πάρω στοιχείο αυτού του χώρου:

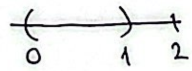
$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i}_{W} + \underbrace{\sum_{j=n+1}^{n+m} \lambda_j e_j}_{W^{\perp}} \;,\; W \cap W^{\perp} = \{0\}.$$

$(V, \|\cdot\|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα



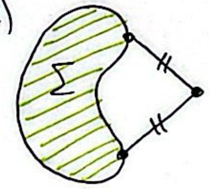
Ένα $x \in \Sigma$ λέγεται **βέλτιστη προσέγγιση** του z: $\|x - z\| \leq \|y - z\| \quad \forall y \in \Sigma$

πχ) $\Sigma = (0,1) \qquad 2 \in \mathbb{R}$



→ Εδώ δεν υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση

ή πχ)



Μπορεί να υπάρχουν δύο (δεν είναι δηλαδή μοναδική)

• V χώρος με εσωτερικό γινόμενο (άρα και νόρμα)

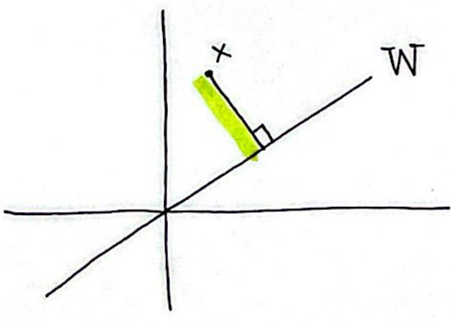
και $W \subset V$, $W \supset \{w_1, \dots, w_n\}$: ορθοκανονική βάση

Αν $x \in V$ η βέλτιστη προσέγγιση από στοιχεία του W είναι:

$$z = \langle x, w_1 \rangle w_1 + \langle x, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle x, w_n \rangle x_n$$

→ αυτό κάνει ελάχιστη την απόσταση του $x \in V$, από το W.

γεωμετρική ερμηνεία



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σελ. 4

Αποδειξη: 3.11.2023

$\langle x-z, w_j\rangle = \langle x, w_j\rangle - \langle z, w_j\rangle = \langle x, w_j\rangle - \langle x, w_j\rangle = 0$
$1\le j\le n$

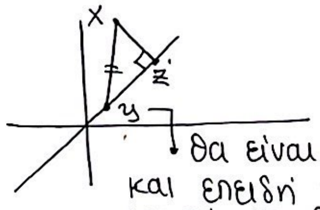
↳ στο εσωτερικό γινόμενο του $\langle z, w_j\rangle$ επιβιώνει μόνο αυτό (από το πως ορίσαμε το z πριν).

Άρα το $x-z$ είναι κάθετο σε κάθε w_j της βάσης, άρα είναι κάθετο για κάθε $w\in W$

$$w=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i \quad , \quad \langle x-z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i}\underbrace{\langle x-z, w_i\rangle}_{0}$$

Θα δείξουμε ότι το z είναι η βέλτιστη προσέγγιση:
Έστω $y\in W$, τότε $z-y\in W$, άρα $\langle x-z, z-y\rangle = 0$ → (αφού το $x-z$ είναι κάθετο για κάθε στοιχείο του W)

$$\underbrace{\|x-y\|^2}_{\text{απόσταση του x από το y}} = \|\underbrace{(x-z)+(z-y)}_{\text{κάθετα, άρα ισχύει το Π.Θ.}}\|^2 = \|x-z\|^2+\|z-y\|^2 \geq \underbrace{\|x-z\|^2}_{\text{απόσταση του x από το z.}}$$



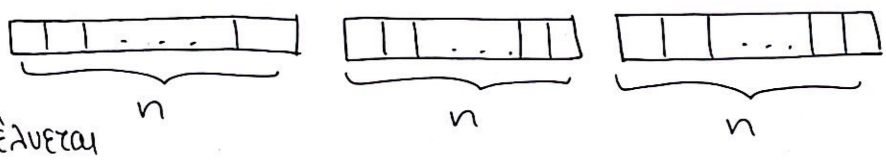
θα είναι διαγώνιος και επειδή είναι υποτείνουσα θα είναι μεγαλύτερη.

$$\|x-y\|^2 = \|x-z\|^2 \Leftrightarrow \|z-y\|^2=0 \Leftrightarrow$$
$$z-y=0 \Leftrightarrow z=y$$ ⇝ Άρα z βέλτιστη προσέγγιση. (μοναδική στους δ.χ.)

Error-Correction, error detection

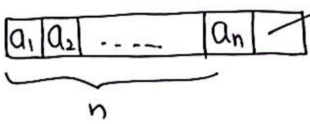
A —— B → ο A στέλνει σήματα στο B και ο B θέλει να καταλάβει αν ο A έκανε λάθος και να το διορθώσει:
πχ) Γράφω λάθος το ΑΦΜ μου σε μια ιστοσελίδα.

↳ Έχω ένα $\boxed{\text{αλφάβητο}}$ και όλα τα μηνύματα είναι σε αυτό, συνήθως δουλεύουν πάνω σε ένα $\mathbb{F}_p$ πεπερασμένο σώμα
⇝ Ο χώρος των μηνυμάτων είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{F}^n$.



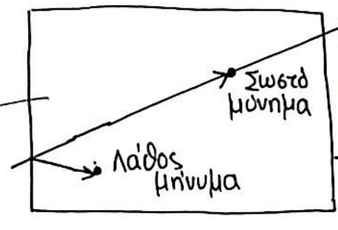
→ Η (μήνυμα) πληροφορία χωρισμένη σε n-άδες.

στέλνεται όμως η n-άδα εμπλουτισμένη με το άθροισμα των ψηφίων:



$a_1+a_2+\dots+a_n$ → έτσι, αν το άθροισμα δεν είναι σωστό, αυτό το σχήμα το αναγνωρίζει (error detection).

$$\mathbb{F}^{n+1}\supset W = \{(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})\}$$
$$a_1+\dots+a_n-a_{n-1}=0$$



Πως θα το διορθώσει;
Η πιθανότερη διόρθωση είναι η κάθετη προβολή (η βέλτιστη προσέγγιση!)