ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟΝ H^2 (Θ.23α-711)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ III

Άσκηση 1. Δειξτε οτι αν μια $f \in L^2(\mathbb{T})$ παιρνει πραγματικες τιμες σχεδον παντου στο $\mathbb{T}$, τοτε υπαρχει $g \in L^2(\mathbb{T})$ που επισης παιρνει πραγματικες τιμες σχεδον παντου στο $\mathbb{T}$ ωστε η $h := f + ig$ να ανηκει στον $\widetilde{H}^2$.

Άσκηση 2. Εστω $\{e_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ μια ορθοκανονικη βαση ενος χωρου Hilbert H.
Αν ενας φραγμενος τελεστης $A \in \mathcal{B}(H)$ έχει ανω τριγωνικο πινακα ως προς αυτην την ορθοκανονικη βαση (δηλ. αν $\langle Ae_n, e_m \rangle = 0$ οταν $m > n$), δειξτε οτι οι αριθμοι $\langle Ae_n, e_n \rangle$ ειναι ιδιοτιμες του τελεστη A.

Άσκηση 3. Αν ενας φραγμενος τελεστης $X : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ ικανοποιει την ιδιοτητα, καθε S-αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος του $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ να ειναι X-αναλλοιωτος, τοτε $SX = XS$.

[Υποδειξη: Εξεταστε τους συζυγεις τελεστες.]

Σημ. Θα δειξουμε αργοτερα οτι ισχυει και το αντιστροφο.

Άσκηση 4. Εστω $\phi \in \widetilde{H}^\infty$.
(α) Δειξτε οτι ο τελεστης $T_\phi := M_\phi|_{\widetilde{H}^2}$ ειναι ισομετρια αν-ν η ϕ ειναι εσωτερικη συναρτηση.
(β) Δειξτε οτι η $\{1, \phi, \phi^2, \dots\}$ ειναι ορθοκανονικη βαση του $\widetilde{H}^2$ αν-ν $\phi(z) = \lambda z$ οπου $\lambda \in \mathbb{T}$ σταθερα.

Άσκηση 5. Να βρεθει η παραγοντοποιηση σε γινομενο εξωτερικης και εσωτερικης συναρτησης για την $f(z) = z - \lambda$ στις περιπτωσεις (α) $|\lambda| < 1$, (β) $|\lambda| = 1$ και (γ) $|\lambda| > 1$.