ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟΝ H^2 (Θ.23α-711)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι

Άσκηση 1. Ο χωρος H^∞ αποτελειται απο ολες τις συναρτησεις $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ που ειναι ολομορφες και φραγμενες στον ανοικτο δισκο $\mathbb{D}$.

Δειξτε οτι $H^\infty \subseteq H^2$ [υποδειξη: μπορει να χρησιμευσει ο εναλλακτικος ορισμος του H^2], αλλα δεν ισχυει ισοτητα.

Δειξτε επισης οτι ο H^∞ περιεχει καθε συναρτηση που ειναι ολομορφη σε μια ανοικτη περιοχη του κλειστου δισκου $\overline{\mathbb{D}}$.

Άσκηση 2. Δειξτε οτι ο χωρος $(H^\infty, \|\cdot\|_{\mathbb{D}})$ ειναι χωρος Banach (εδω $\|\phi\|_{\mathbb{D}} := \sup\{|\phi(z)| : z \in \mathbb{D}\}$).

Άσκηση 3. Δειξτε οτι ο τελεστης $W : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : e_n \mapsto e_{n+1},\ (n \in \mathbb{Z})$
δεν εχει ιδιοτιμες: $\sigma_p(W) = \emptyset$.

Άσκηση 4. Δειξτε οτι $\sigma(W) = \sigma(W^*) = \mathbb{T}$ (η μοναδιαια περιφερεια).

Άσκηση 5. Θεωρουμε τους τελεστες

$$M_1 : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) : f \mapsto M_1 f :\ (M_1 f)(w) = w f(w),\ \text{σχ. για καθε } w = e^{it} \in \mathbb{T}$$
$$T_1 : H^2 \to H^2 : g \mapsto T_1 g :\ (T_1 g)(z) = z g(z),\ \text{για καθε } z \in \mathbb{D}\,.$$

Ο συζυγης M_1^* του M_1 δινεται απο τη σχεση $(M_1^* f)(w) = \overline{w} f(w)$, $(f \in L^2)$.
Ποια ειναι η αντιστοιχη σχεση για τον συζυγη T_1 του T_1;

Άσκηση 6. Δειξτε οτι για καθε $\lambda \in \mathbb{D}$, τα διανυσματα $\{x_\lambda, S(x_\lambda), S^2(x_\lambda), \ldots, \}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα, και η κλειστη γραμμ. τους θηκη ισουται με $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ (για $\lambda = 0$ αυτο ειναι προφανες).
Δειξτε επισης οτι για καθε $m \in \mathbb{N}$, ο υποχωρος $E_m(\lambda)) := \{x_\lambda, S(x_\lambda), \ldots, S^{m-1}(x_\lambda)\}^\perp$ ειναι S-αναλλοιωτος .