2Ο ΧΩΡΟΙ HILBERT
Μάθημα 4

Πρόταση 1 Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος Hilbert και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ορθοκανονική ακολουθία του.
$(\|e_n\|=1\ \forall n\in\mathbb{N},\ \langle e_n, e_m\rangle = 0\ \forall n\neq m)$
Έστω $F=\langle e_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ ο παραγόμενος διανυσματικός χώρος απο τήν $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Τότε:
(i) $P_F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n\ \forall x\in H$ $(P_F(x)=y_0 \Leftrightarrow x-y_0\in F^\perp)$
(ii) $x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n\ \forall x\in F$ (μοναδικά)

Απόδειξη
(i) Έστω $x\in H$. Από την ανισότητα Bessel (3,7)
$$\sum_{n=1}^{m}\langle x, e_n\rangle^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall m\in\mathbb{N}$$
Άρα, $$\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle^2 \leq \|x\|^2.$$
Επομένως $$(\langle x, e_m\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\in \ell^2 \quad \forall x\in H$$
Για κάθε $m, k\in\mathbb{N}$ ώστε $m<k$ ισχύει
$$\left\|\sum_{n=1}^{k}\langle x, e_n\rangle e_n-\sum_{n=1}^{m}\langle x, e_n\rangle e_n\right\|^2=$$
$$=\left\|\sum_{n=m+1}^{k}\langle x, e_n\rangle e_n\right\|^2\leq$$
$$\leq \sum_{n=m+1}^{k}\langle x, e_n\rangle^2 \quad (*)$$
Από την ανισότητα Bessel έχουμε ότι η ακολουθία $\left(\sum_{n=1}^{m}\langle x, e_n\rangle^2\right)_{m\in\mathbb{N}}^{\leq\|x\|^2}$ είναι Cauchy, άρα, από την $(*)$, και η ακολουθία $\left(\sum_{n=1}^{k}\langle x, e_m\rangle e_n\right)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq H$ είναι Cauchy, και επομένως υπαρχει $y\in H$ ώστε:
$$(**)\quad y=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n=\lim_k \sum_{n=1}^{k}\langle x, e_n\rangle e_n.$$
Τότε $x-y\in F^\perp$, διότι $\langle y, e_n\rangle=\langle x, e_n\rangle$ απο $(**)$
Άρα $y\overset{?}{=}P_F(x)\Leftrightarrow \|x-y\|=\rho(x;F)\Leftrightarrow x-y\in F^\perp$
Άρα, $y=P_F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ $(**)$

(ii) Από το (i) $\forall x \in F$ έχουμε $P_F(x) = x$, άρα $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$. από (i).

Μάλιστα αν $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = 0$, τότε

$$\langle x, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

λόγω του ότι:

$$0 = \langle e_m, \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \rangle = \langle x, e_m \rangle \langle e_m, e_m \rangle = \langle x, e_m \rangle \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:

ότι: $\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \rangle^{\frac{1}{2}}$

Άρα η $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι βάση χωρίς περιορισμό διότι $\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\iota_k} \lambda_k e_k \right\|$

$\forall \; \iota_k \in \{-1, 1\}$.

<u>Πρόταση</u>

Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert είναι (γραμμικά) ισομετρικός με τον ℓ^2.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος Hilbert διαχωρίσιμος και $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ορθοκανονική βάση του.

Για κάθε $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ συγκλίνει στο H