Μαθήματα 15-16

Ο χώρος $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ για $1<p<\infty$ είναι αυτοπαθής

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\tau : \ell^p \to (\ell^p)^{**}$ η κανονική εμφύτευση:

$$\tau(x)(y^*) = y^*(y) \quad \forall\ x=(x_n)\in \ell^p \text{ και } y^*\in(\ell^p)^*.$$

Η συνάρτηση τ είναι επί του $(\ell^p)^{**}$.

Πράγματι, έστω $f\in(\ell^p)^{**}$. Άρα, $f:(\ell^p)^*\to \mathbb{R}$ συνεχής, γραμμική.

Η συνάρτηση $T:\ell^q \to (\ell^p)^*$, όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$\forall\ x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^q$ $\quad T(x)=T_x\in(\ell^p)^*$, όπου

$$T_x(y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \forall\ y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$$

Η συνάρτηση T είναι ισομετρία, όπως αποδείξαμε.

$$\|T(x)\|=\|x\|_q \quad \forall\ x\in\ell^q.$$

Ανάλογα η συνάρτηση:

$$T_1:\ell^p\to(\ell^q)^* \text{ με } T_1(y)=T_y\in(\ell^q)^* \quad \forall y\in\ell^p$$

είναι ισομετρία με

$$\|T_1(y)\|=\|y\|_p \quad \forall\ y\in\ell^p.$$

Αφού $f\in(\ell^p)^{**}$, έχουμε $f\circ T:\ell^q\to\mathbb{R}$

και μάλιστα $\boxed{f\circ T\in(\ell^q)^*}$

Άρα υπάρχει $x_0=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^p$ ώστε:

$$f\circ T((n_k)_{k\in\mathbb{N}})=\sum_{n=1}^{\infty} n_k x_k \quad \forall\ (n_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^q.$$

Τότε $\tau(x_0)=f$ και τ επί

Πράγματι, έστω $y^*\in(\ell^p)^*$. Άρα υπάρχει $z=(n_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^q$ ώστε $y^*(x)=\sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k = T_z(x)$ $\forall x\in\ell^p$,

δηλαδή $z=T^{-1}(y^*)\in\ell^q$, άρα $y^*=T(z)$.

Αφού $f\in(\ell^p)^{**}$ έχουμε:

$$f\circ T(z)=f\circ T((n_k)_{k\in\mathbb{N}})=$$

$$f(y^*)=f\circ T(T^{-1}(y^*)) \quad \forall\ y^*\in(\ell^p)^*.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k n_k = y^*(x)=\tau(x_0)(y^*)$$

Επομένως $f=\tau(x_0)$ για $x_0\in\ell^p$ και

τελικά $\tau(\ell_p)=(\ell_p^*)^*$

Άρα η τ είναι επί του $(\ell^p)^{**}$.

Πλήρωση χώρου με νόρμα:

Σύμφωνα με προηγούμενο ορισμό της **κανονικής εμφύτευσης** ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ στον δεύτερο δυϊκό του χώρο X^{**} δηλαδή της συνάρτησης:

$$\tau : X \longrightarrow X^{**} = (X^*)^*$$

όπου $\tau(x) : X^* \to \mathbb{R}$ $\forall x \in X$ ώστε:

$$\tau(x)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*$$

έχουμε ότι **καθε** διανυσματικός χώρος με **νόρμα** $(X, \|\cdot\|)$ **εμφυτεύεται ισομετρικά** στον δεύτερο δυϊκό του χώρο X^{**} μέσω της κανονικής εμφύτευσης $\tau : X \to X^{**}$.

Αφού ο $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ είναι χώρος Banach και ο χώρος $X^{**} = (X^*)^* = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{R})$ είναι χώρος Banach με την νόρμα:

$$\|x^{**}\| = \sup\{|x^{**}(x^*)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}$$

για κάθε $x^{**} \in X^{**}$.

Θέτουμε $\boxed{Y = \overline{\tau(X)} \subseteq X^{**}}$.

Ο Y είναι **κλειστός**, γραμμικός υπόχωρος του $(X^{**}, \|\cdot\|)$, άρα $\underline{Y}$ **είναι χώρος** Banach με τον περιορισμό της νόρμας $\|\cdot\|$ στο Y.

Η συνάρτηση $\tau : X \to Y$ είναι **ισομετρική** εμφύτευση του X στον $(Y, \|\cdot\|)$, που είναι χώρος Banach. και $T(X) \subseteq Y$ πύκνό

Άρα ο $(Y, \|\cdot\|)$ μπορεί να θεωρηθεί ως <u>**η πλήρωση**</u> του χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$.

Θεωρήματα Cantor και Baire

Ορισμός

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq X$. Η Διάμετρος του A ορίζεται:

$$\delta\iota\alpha\mu(A) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\}.$$

Παρατηρήσεις

(1) Το A φραγμένο $\Longleftrightarrow$ $\delta\iota\alpha\mu(A) < +\infty$

(2) $\delta\iota\alpha\mu(A) = \delta\iota\alpha\mu(\overline{A})$

(άσκηση)

Θεώρημα Cantor (χαρακτηρισμός πλήρων μετρικών χώρων)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα ισοδύναμα:

(1) Ο χώρος (X,ρ) είναι **πλήρης**.

(2) Για κάθε **φθίνουσα** ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **μη κενών**, **κλειστών** υποσυνόλων του X,
ώστε: $\lim\limits_{n} \delta\iota\alpha\mu(F_n) = 0$
ισχύει $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x_0\}$

Η βασικότερη εφαρμογή του Θεωρήματος Cantor είναι το παρακάτω Θεώρημα **Κατηγορίας** του Baire, το οποίο βρίσκει εξαιρετικές βασικές εφαρμογές στη Θεωρία των χώρων Banach.
Για λόγους πληρότητας θα αποδείξουμε το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire.

Θεώρημα Κατηγορίας του Baire

Έστω (X,ρ) **πλήρης** μετρικός χώρος και $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία **ανοικτών** και **πυκνών** υποσυνόλων του X. Τότε η τομή $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ όλων των συνόλων $G_n, n\in\mathbb{N}$ είναι **πυκνό** υποσύνολο του X.

Απόδειξη Θεωρήματος Baire

Το σύνολο D είναι πυκνό αν για κάθε $x_0 \in X$ και $\varepsilon_0 > 0$ ισχύει:

$$(*) \quad S(x_0,\varepsilon_0) \cap D \neq \emptyset, \qquad D = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n .$$

Προκειμένου να αποδείξουμε την ιδιότητα $(*)$ του συνόλου D θα ορίσουμε επαγωγικά μια ακολουθία ανοικτών σφαιρών $(S(x_n,\varepsilon_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε:

$$\boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S(x_n,\varepsilon_n)} \neq \emptyset, \quad (*)}$$

και επιπλέον να ισχύει:

$$\boxed{\emptyset \neq S(x_0,\varepsilon_0) \cap D \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S(x_n,\varepsilon_n)} \neq \emptyset \quad (**)}$$

χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Cantor.

Πράγματι:
Επειδή το $G_1 \subseteq X$ ανοικτό και πυκνό υπάρχουν $x_1 \in X$ και $\varepsilon_1 > 0$ ώστε:

$$\overline{S(x_1,\varepsilon_1)} \subseteq S(x_0,\varepsilon_0) \cap G_1 \neq \emptyset$$

$(*)$

και

$$\delta\iota\alpha\mu(\overline{S(x_1,\varepsilon_1)}) \leq 1.$$

Έστω ότι ορίστηκαν τα $x_1,\dots,x_n \in X$ και $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n > 0$ ώστε:

$$\overline{S(x_k,\varepsilon_k)} \subseteq S(x_{k-1},\varepsilon_{k-1}) \cap G_k \neq \emptyset$$

και

$$\delta\iota\alpha\mu(\overline{S(x_k,\varepsilon_k)}) \leq \frac{1}{k} \quad \forall\, k = 1,\dots,n.$$

Το σύνολο G_{n+1} είναι ανοικτό και πυκνό, άρα υπάρχουν $x_{n+1} \in X$ και $\varepsilon_{n+1} > 0$ ώστε:

$$\overline{S(x_{n+1},\varepsilon_{n+1})} \subseteq S(x_n,\varepsilon_n) \cap G_{n+1} \neq \emptyset$$

και

$$\delta\iota\alpha\mu(\overline{S(x_{n+1},\varepsilon_{n+1})}) \leq \frac{1}{n+1}$$

Άρα, ορίζεται επαγωγικά μια ακολουθία ανοικτών σφαιρών ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{S(x_{n+1},\varepsilon_{n+1})} \subseteq S(x_n,\varepsilon_n) \cap G_{n+1}$$

και

$$\lim_n \delta\iota\alpha\mu(\overline{S(x_n,\varepsilon_n)}) = 0.$$

Από το Θεώρημα Cantor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S(x_n,\varepsilon_n)} \neq \emptyset$$

και επίσης ισχύει $S(x_0,\varepsilon_0) \cap D \supseteq \bigcap \overline{S(x_n,\varepsilon_n)} \neq \emptyset.$

Πόρισμα (αναδιατύπωση Θεωρήματος Baire)

Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος, $\boxed{X \neq \emptyset}$.

Αν $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: το σύνολο A_{n_0} δεν είναι πουθενά πυκνό

(A_{n_0} πουθενά πυκνό $\Leftrightarrow (\overline{A_{n_0}})^\circ = \emptyset \Leftrightarrow X \setminus \overline{A_{n_0}} \subseteq X$ πυκνό.)

Απόδειξη

Εις άτοπο!

Έστω $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $A_n \subseteq X$ πουθενά πυκνό για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $X \setminus \overline{A_n} \subseteq X$ πυκνό $\forall n \in \mathbb{N}$.

Από το Θεώρημα Baire η τομή

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{A_n}) \subseteq X$$

είναι πυκνό υποσύνολο του X.

Άρα, $X = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus \overline{A_n}} = \overline{\left(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right)} \subseteq \overline{X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \emptyset$.

Άτοπο!

Άρα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε A_{n_0} δεν είναι πουθενά πυκνό, δηλαδή $(\overline{A_{n_0}})^\circ \neq \emptyset$.

Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης

Έστω $X, Y \neq \phi$ χώροι Banach και $T: X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής που είναι $\boxed{\text{επί}}$ του Y.

Τότε ο T είναι ανοικτή συνάρτηση, δηλαδή $T(G) \subseteq Y$ ανοικτό αν $G \subseteq X$ ανοικτό.

Απόδειξη

Έστω $G \subseteq X$ ανοικτό και $G \neq \phi$.

Έστω $\boxed{y = T(x) \in T(G)}$ για $x \in G$.

Αφού $x \in G$ και $G \subseteq X$ ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\boxed{S(x, \varepsilon) \subseteq G}$

Άρα, $\boxed{T(S(x, \varepsilon)) \subseteq T(G) \quad (*)}$

Ισχυρισμός 1

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\boxed{S(0, \delta) \subseteq T(S(0, \varepsilon)) \quad (**)}$$ Baire

Απόδειξη ισχυρισμού 1

Έστω $\varepsilon > 0$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\boxed{X = \bigcup_{k=1}^{\infty} S\left(0, \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \cdot k}$$

και αφού ο T είναι επί του Y

$$\boxed{Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} T\left(\left(S\left(0, \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \cdot k\right)\right)}$$

Ο Y είναι χώρος Banach, και άρα πλήρης μετρικός χώρος επομένως σύμφωνα με την αναδιατύπωση του Θεωρήματος $\boxed{\text{Baire}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k_n \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\boxed{\left(\overline{T\left(S\left(0, \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \cdot k_n\right)}\right)^{\circ} \neq \phi}$$ ~~Baire~~

Άρα $\exists\, \delta_n' > 0$ ώστε $\boxed{S(0, \delta_n') \subseteq \overline{T\left(S\left(0, \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) k_n\right)}}$

Επομένως $\forall n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $0<\delta_n<\frac{1}{n}$ ώστε: (7)

$$\boxed{(*)\quad S(0,\delta_n)\subseteq \overline{T\left(S\left(0,\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right)}}\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

αφού ο T είναι φραγμένος γραμμικός.

Θέτουμε $\boxed{\delta=\delta_1}$

Τότε $\boxed{S(0,\delta)\subseteq T(S(0,\varepsilon))}$. (1)

[Πράγματι, έστω $\boxed{y\in S(0,\delta)}\subseteq \overline{T\left(S\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}$.

Επομένως, υπάρχει $\boxed{x_1\in S\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)}$ ώστε

$$\boxed{\|y-T(x_1)\|<\delta_2},$$

και άρα $y-T(x_1)\in S(0,\delta_2)\subseteq \overline{T\left(S\left(0,\frac{\varepsilon}{2^2}\right)\right)}$.

Επομένως, υπάρχει $\boxed{x_2\in S\left(0,\frac{\varepsilon}{2^2}\right)}$ ώστε

$$\boxed{\|y-T(x_1)-T(x_2)\|<\delta_3}$$

και άρα $y-T(x_1)-T(x_2)\in S(0,\delta_3)$.

Επαγωγικά, μέσω της $(*)$ ορίζεται μια ακολουθία $(x_n)\subseteq X$ ώστε:

$(**)$

(1) $\boxed{x_n\in S\left(0,\frac{\varepsilon}{2^n}\right)}\Leftrightarrow \|x_n\|<\frac{\varepsilon}{2^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

και (2) $\boxed{\|y-T(x_1)-\dots-T(x_n)\|<\delta_{n+1}}$.

Θέτουμε $\boxed{z_n=x_1+\dots+x_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Για $m>n$ ισχύει:

$$\|z_m-z_n\|=\|x_{n+1}+\dots+x_m\|\leq \|x_{n+1}\|+\dots+\|x_m\| \overset{(**)}{<} \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}\leq\frac{\varepsilon}{2^n}$$

Άρα, η $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ είναι βασική ακολουθία και αφού ο X είναι Banach χώρος

$\boxed{z_n\to x}$, όπου $x\in X$.

και $\boxed{T(z_n)\to T(x)}$

Επίσης,

$$\|x\| = \lim_n \|z_n\| = \lim_n \|x_1 + \dots + x_n\| \leq \lim_n (\|x_1\| + \dots + \|x_n\|)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \quad \text{από } (**)1^{\circ}$$
(***)

Άρα, $\boxed{x \in S(0,\varepsilon)}$.

Από την (**)2 έχουμε επίσης
$\|y - T(z_n)\| \xrightarrow[n]{} 0$, όπου $z_n \to x$.

Άρα, $\boxed{y = T(x)}$ για $x \in S(0,\varepsilon)$ από (***)
επομένως ισχύει ο ισχυρισμός (1)
$\boxed{S(0,\delta) \subseteq T(S(0,\varepsilon))}$.

Εστω τώρα $G \subseteq X$ ανοικτό, $G \neq \emptyset$ και
$\boxed{y = T(x)} \in T(G)$, $x \in G$.
Αφού το G ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$
ώστε $\boxed{S(x,\varepsilon) \subseteq G}$
Από τον ισχυρισμό (1) υπάρχει $\delta > 0$
ώστε $\boxed{S(0,\delta) \subseteq T(S(0,\varepsilon)).\ (*1*)}$

Άρα, αφού $y = T(x)$ και T γραμμικός τελεστής ισχύει από την (*1*) ότι
$$S(y,\delta) \subseteq T(S(x,\varepsilon)) \subseteq T(G)$$
και τελικά συνεπάγεται ότι
το $T(G) \subseteq Y$ ανοικτό.

<u>Παρατήρηση</u>

Για την απόδειξη του Θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης χρησιμοποιήσαμε ουσιαστικά την <u>πληρότητα</u> των X, Y.

Αντιπαράδειγμα

Έστω $(Y, \|\cdot\|)$ ένας απειροδιάστατος χώρος Banach. (π.χ. $c_0, \ell_1, \dots$) και $\{y_i : i \in I\}$ μία αλγεβρική βάση του με $\boxed{\|y_i\| = 1}$ $\forall\, i \in I$, που υπάρχει πάντα, όπως αναφέρεται στην Άλγεβρα.
Τότε κάθε $y \in Y$ γράφεται μοναδικά ως

$$y = \sum_{i \in I} \lambda_i y_i, \text{ όπου } \{i \in I : \lambda_i \neq 0\} \text{ πεπερασμένο.}$$

Θέτουμε

$$X = \{x : I \to \mathbb{R} : \text{το σύνολο } \{i \in I : x(i) \neq 0\} \text{ πεπερασμένο}\}$$

και $\|x\| = \sum_{i \in I} |x(i)| \quad \forall\, x \in X$

Προφανώς $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον X.

Ο χώρος $(X, \|\cdot\|)$ δεν είναι χώρος Banach.

Πράγματι, έστω $(i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$ ώστε $i_n \neq i_m$ αν $n \neq m$.
Θέτουμε $x_n : I \to \mathbb{R}$ ώστε: $x_n(i) = \frac{1}{2^k}$ αν $i = i_k, k \leq n$
και $x_n(i) = 0$ διαφορετικά.

Η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ είναι βασική στον X.
Πράγματι $\|x_n - x_m\| = \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{2^k} \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}\ m < n$.
Η ακολουθία (x_n) δεν συγκλίνει στον X
[Πράγματι αν $x_n \to x$ για $x \in X$, δηλαδή $\|x_n - x\| \to 0$, τότε $|x_n(i) - x(i)| \to 0 \ \forall\, i \in I$
και άρα, από τον ορισμό της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (*)
έχουμε $x(i_k) = \frac{1}{2^k} \neq 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$
Άτοπο! αφού $x \in X$.]

Θέτουμε $T : X \to Y$ με $T(x) = \sum_{i \in I} x(i) y_i \quad \forall\, x \in X$
Ο T είναι γραμμικός τελεστής και $\forall\, x \in X$
$\|T(x)\| \leq \sum_{i \in I} |x(i)| = \|x\|$ αφού $\|y_i\| = 1 \ \forall\, i \in I$
Άρα, ο T είναι φραγμένος τελεστής.
Επίσης ο T είναι 1-1 και επί, διότι η $(y_i)_{i \in I}$ είναι μία αλγεβρική βάση του Y
Ο T δεν είναι ανοικτός τελεστής,
διότι τότε ο X θα ήταν χώρος Banach ως ισόμορφος του Y.
ΑΤΟΠΟ!

Συνέπειες Θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης

Πόρισμα 1 Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής 1-1 και $\boxed{\text{επί}}$. Τότε ο $T^{-1}: Y \to X$ είναι φραγμένος, και άρα ο T είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη
Ο $T^{-1}: Y \to X$ προφανώς είναι γραμμικός τελεστής και είναι **συνεχής** διότι για κάθε $G \subseteq X$ ανοικτό, ισχύει $(T^{-1})^{-1}(G) = T(G) \subseteq Y$ **ανοικτό** από το Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης (και λόγω ότι $(T^{-1})^{-1} = T$ αφού ο T είναι 1-1 και επί).

Πόρισμα 2 Έστω X γραμμικός χώρος και $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ δύο νόρμες στο χώρο X. Αν οι χώροι $(X, \|\cdot\|)$ και $(X, |||\cdot|||)$ είναι Banach, τότε οι νόρμες είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει $M > 0$ ώστε:

$$\boxed{\|x\| \leq M|||x||| \quad \forall x \in X}$$

Απόδειξη
Έστω ο ταυτοτικός τελεστής $I: (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$ που προφανώς είναι 1-1, επί.
Αφού $\|x\| \leq M|||x||| \ \forall x \in X$, ο τελεστής I είναι φραγμένος.
Από το Πόρισμα 1 και ο τελεστής I^{-1} είναι φραγμένος και ο I είναι ισομορφισμός και οι νόρμες ισοδύναμες.

Παρατήρηση
Η υπόθεση της πληρότητας των χώρων X, Y στο Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης είναι απαραίτητη, όπως καταδεικνύεται με αντιπαραδείγματα.

<u>Θεώρημα</u> (κλειστού γραφήματος)

Έστω X, Y χώροι Banach και
$T: X \to Y$ γραμμικός τελεστής.
Αν το γράφημα $G = \{(x, T(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$
κλειστό, τότε ο T είναι φραγμένος.

<u>Απόδειξη</u>

Το σύνολο $G \subseteq X \times Y$ είναι κλειστό και
είναι γραμμικός χώρος προφανώς

Άρα, αφού ο $X \times Y$ είναι χώρος Banach
με τη νόρμα $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ $\forall x \in X, y \in Y$ Banach (άσκηση)
και ο $(G, \|\cdot\|)$ είναι χώρος

Οι συναρτήσεις $\pi_1 : G \to X$ και $\pi_2 : G \to Y$ $\forall x \in X, y \in Y$
με $\pi_1((x, y)) = x$ και $\pi_2((x, y)) = y$
είναι προφανώς γραμμικές και
φραγμένες, διότι $\|\pi_1(x, y)\| = \|x\| \leq \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$
$\|\pi_2(x, y)\| = \|y\| \leq \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$

και αφού η $\pi_1 : G \to X$ <u>είναι επί, και 1-1</u>
σύμφωνα με το Πόρισμα 1 του
Θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης
η συνάρτηση $\pi_1^{-1} : X \to G$ είναι φραγμένος
γραμμικός τελεστής.

Άρα η σύνθεση $\pi_2 \circ \pi_1^{-1} : X \to Y$ είναι
φραγμένος γραμμικός τελεστής και
$\pi_2 \circ \pi_1^{-1} = T$.

Συνέπεια Θεωρήματος κλειστού γραφήματος

Πρόταση

Έστω $(C[0,1], \|\cdot\|)$ χώρος Banach.
Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\|f_n - f\| \to 0 \implies f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in [0,1].$$

Τότε η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$ $\left(\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\} \cdot \forall f \in C([0,1]) \right)$

Απόδειξη

Έστω ο ταυτοτικός τελεστής

$$I : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|)$$
$$I(f) = f \quad \forall f \in C[0,1]$$

Ο χώρος $(C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$, όπου $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ είναι χώρος Banach

καθώς
$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ συνεχής}\} \subseteq \ell^\infty([0,1])$ υπόχωρος του
είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Banach $\ell^\infty([0,1])$.

Έστω η ταυτοτική συνάρτηση

$$I : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|)$$

που είναι γραμμικός τελεστής.
Το γράφημα:

$$G = \{(f, I(f)) : f \in C([0,1])\} \subseteq (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \times (C([0,1]), \|\cdot\|)$$

είναι κλειστό, διότι αν $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C([0,1])$ ώστε:
$\|f_n - f\|_\infty \to 0$, $\|I(f_n) - g\| = \boxed{\|f_n - g\| \to 0}$, τότε
$\forall x \in [0,1]$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)| \leq \quad (*)$$
$$\leq \|f_n - f\|_\infty + |f_n(x) - g(x)|.$$

Έχουμε $\|I(f_n) - g\| \to 0$ και από υπόθεση $|f_n(x) - g(x)| \to 0$
$\forall x \in [0,1]$. Άρα από την $(*)$ $f(x) = g(x)$ $\forall x \in [0,1]$.
και τελικά $\boxed{I(f) = g}$
Από το Θεώρημα κλειστού γραφήματος ο τελεστής

Θεώρημα (Αρχή ομοιομόρφου φράγματος)

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $(Y, |||\cdot|||)$ χώρος με νόρμα.
Αν $(T_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια φραγμένων, γραμμικών τελεστών από τον χώρο X στον χώρο Y, ώστε:

$$\boxed{\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < \infty \quad \forall\, x \in X},$$

τότε υπάρχει $M>0$ ώστε:

$$\boxed{\|T_i\| \leq M \quad \forall\, i \in I}$$

Απόδειξη

Θέτουμε $\boxed{A_n = \{x \in X : \sup\{|||T_i(x)||| : i\in I\} \leq n\}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Το σύνολο $A_n \subseteq X$ κλειστό $\forall\, n \in \mathbb{N}$, διότι
αν $\boxed{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A_n}$ και $\boxed{x_k \xrightarrow{k} y} \Leftrightarrow \|x_k - y\| \xrightarrow{k} 0$,
τότε, $T_i(x_k) \to T_i(y)$ $\forall i\in I \Rightarrow \boxed{|||T_i(x_k)-T_i(y)|||\to 0}$
και $\boxed{|||T_i(x_k)||| \leq n}$

Άρα, $|||T_i(x_k)||| \to |||T_i(y)|||$ και επομένως
$|||T_i(y)||| \leq n \quad \forall\, i \in I \Rightarrow \boxed{y \in A_n}$ Άρα, $A_n \subseteq X$ κλειστό

Έχουμε, από την υπόθεση ότι:

$$\boxed{X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$$

Από το Θεώρημα Baire, αφού ο X είναι χώρος Banach, υπάρχει $\boxed{n_0 \in \mathbb{N}}$ ώστε:

$$(A_{n_0})^{o} \neq \emptyset \quad \text{(αφού } A_{n_0} \text{ κλειστό)}$$

Άρα, $\boxed{S(x_0, \varepsilon) \subseteq A_{n_0}}$ για $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$

Επομένως, για κάθε $x \in S(x_0,\varepsilon)$ ισχύει:

$$|||T_i(x)||| \leq n_0 \quad \forall\, i \in I. \; (*)$$

Άρα $\forall\, x \in X$ και $\|x\| \leq \varepsilon$, ισχύει: $x + x_0 \in S(x_0,\varepsilon)$
και $\|T_i(x)\| \leq \|T_i(x+x_0)\| + \|T_i(x_0)\| \leq 2n_0$ $\forall i \in I$ $(*)$

Συνεπώς $\forall\, x \in X$, $\|x\| \leq 1$ ισχύει

$$\|T_i(x)\| \leq 2n_0 \cdot \frac{1}{\varepsilon} = M \quad \forall\, i \in I.$$

Επομένως

$$\|T_i\| \leq M \quad \forall\, i \in I.$$

Πόρισμα (Banach-Steinhauss)

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $(X, |||\cdot|||)$ χώρος με νόρμα.
Αν $T_n : X \to Y$ φραγμένοι - γραμμικοί τελεστές $\forall n \in \mathbb{N}$ και υπάρχει για κάθε $x \in X$ το όριο. $T(x)$:

$$\boxed{T_n(x) \xrightarrow[n]{} T(x), \quad \forall\, x \in X}$$

Τότε η συνάρτηση $T : X \to Y$ με

$$T(x) = \lim_n T_n(x) \quad \forall\, x \in X$$

είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής

Απόδειξη

- Η συνάρτηση T είναι καλά ορισμένη και προφανώς είναι γραμμικός τελεστής.

Η T ειναι **φραγμένος** γραμμικός τελεστής:
Έστω $x \in X$. Τότε η ακολουθία $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, αφού είναι συγκλίνουσα.
Απο την **αρχή** ομοιομόρφου φράγματος, υπάρχει $M > 0$ ώστε:

$$\boxed{\|T_n\| \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}}$$

Άρα, ισχύει $\forall\, x \in X$:

$$\|T(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq \lim_n \|T_n\|\,\|x\| \leq$$
$$\leq M\|x\|.$$

Συνεπώς ο T είναι φραγμένος τελεστής.