1. Ασκήσεις

① Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.
Αποδείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στον X, (δηλαδή υπάρχει $x \in X$ ώστε:
$$S_n = x_1 + \dots + x_n \longrightarrow x).$$

② Έστω ο χώρος με νόρμα $X = (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ όπου $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\} < \infty \ \forall f \in C([a,b])$

Θέτουμε: $T : X \to X$, όπου $f \to T(f)$ και
$$T(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{για κάθε } f \in X \text{ και } x \in [a,b]$$

Αποδείξτε ότι:
(α) Ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και
(β) $\|T\| = b - a$.

③ Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T, T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ είναι γραμμικοί φραγμένοι τελεστές για $n = 1, 2, \dots$ και $x, x_n \in X$ για $n = 1, 2, \dots$
Αν $T_n \to T \Leftrightarrow \|T_n - T\| \to 0$, και $x_n \to x$ αποδείξτε ότι $T(x_n) \to T(x)$.

④ Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $T : X \to \mathbb{R}$ γραμμικός τελεστής με $T \neq 0$.
Αποδείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο T είναι φραγμένος.
(ii) Το σύνολο $T^{-1}(\{0\}) \subseteq X$ κλειστό.
(iii) Το σύνολο $T^{-1}(\{0\}) \subseteq X$ πυκνό.
(iv) Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $T(S(0,\varepsilon)) \subsetneq \mathbb{R}$.

⑤ Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $x^* \in X^*$ με $x^* \neq 0$. Αποδείξτε ότι:
$$\|x^*\| = \frac{1}{\inf\{\|x\| : x^*(x) = 1\}}.$$

⑥ Ποιός είναι ο δυϊκός χώρος του $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$? και ποιός είναι ο δυϊκός χώρος του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ αν $1 \leq p < \infty$?

7. Έστω X, Y δύο ισομορφικοί χώροι Banach. Αποδείξτε ότι οι συζυγείς χώροι X^*, Y^* είναι ισομορφικοί.

8. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι υπάρχει ισομετρική εμφύτευση
$$T : X \longrightarrow \ell^\infty(\Gamma)$$
για κατάλληλο σύνολο Γ.

9. Όπως είναι γνωστό από την Γραμμική Άλγεβρα κάθε γραμμικός χώρος X έχει αλγεβρική βάση $B = \{x_i : i \in I\}$, δηλαδή $x = \lambda_1 x_{i_1} + \dots + \lambda_k x_{i_k}$ κατά μοναδικό τρόπο. $\forall x \in X$
Θέτουμε $\|x\| = \max\{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq k\}$ αν $x = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n x_{i_n}$
Αποδείξτε ότι:
(i) η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον X και
(ii) ο $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach αν και μόνο αν το I είναι πεπερασμένο.

10. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $A \subseteq X$ και $B \subseteq X^*$.
Θέτουμε:
$$A^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \quad \forall x \in A\} \text{ και}$$
$$^\perp B = \{x \in X : x^*(x) = 0 \quad \forall x^* \in B\}.$$
Αποδείξτε ότι:
(i) $X^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = X^*$, $^\perp\{0\} = X$, $^\perp X^* = \{0\}$.
(ii) το $A^\perp \subseteq X^*$ κλειστός υπόχωρος του X^*.
(iii) το $^\perp B \subseteq X$ κλειστός υπόχωρος του X.
(iv) $A \subseteq {}^\perp(A^\perp)$
Αν A γραμμικός υπόχωρος του X, τότε $\overline{A} = {}^\perp(A^\perp)$
(v) $B \subseteq ({}^\perp B)^\perp$ και
ισχύει η ισότητα αν N γραμμικός υπόχωρος του X^*.

11) Έστω $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, |||\cdot|||)$ χώροι με νόρμα και $X \neq \{0\}$. Αποδείξτε ότι:
Αν ο $\mathcal{L}(X, Y)$ είναι χώρος Banach, τότε και ο $(Y, |||\cdot|||)$ είναι χώρος Banach.

12) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $(X, \|\cdot\|_1)$ χώρος με νόρμα ώστε:
$$\|x\| \leq M\|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$
Αποδείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι χώρος Banach, και μάλιστα οι νόρμες ισοδύναμες.

13) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$.
Αποδείξτε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν η ακολουθία
$$(x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \text{ είναι φραγμένη } \forall x^* \in X^*.$$

14) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι:
αν $y^* \circ T \in X^*$ $\forall y^* \in Y^*$, τότε ο T είναι φραγμένος.

15) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ συγκλίνει για κάθε μηδενική ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ συγκλίνει.
(εφαρμόστε την αρχή ομοιομόρφου φράγματος)

16) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $M \subseteq X$ και $x_0 \in X$. Αν $Y = \overline{\langle M \rangle}$ είναι μικρότερος κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X που περιέχει το σύνολο M, όπου
$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, x_1, \dots, x_n \in M \right\}.$$
Τότε αποδείξτε ότι:

$x_0 \in Y$ αν και μόνο αν για κάθε $x^* \in X^*$ με $x^*(x) = 0$ $\forall x \in M$ ισχύει $x^*(x_0) = 0$.