Μαθήματα 10 και 11

Οι χώροι συνεχών συναρτήσεων και οι χώροι πεπερασμένης διάστασης

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Θέτουμε:

$$\tilde{C}(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ συνεχής και φραγμένη} \}$$

Ορίζουμε:

$$\|f\|_\infty = \sup\{ |f(x)| : x \in X \} \quad \forall f \in \tilde{C}(X).$$

Τότε ο $(\tilde{C}(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη

Προφανώς το σύνολο $\tilde{C}(X)$ με τις κατά σημείο πράξεις: $+ \ \tilde{C}(X) \times \tilde{C}(X) \to \tilde{C}(X) : (f,g) \to f+g$

$\cdot \ \mathbb{R} \times \tilde{C}(X) \to \tilde{C}(X) : (\lambda, f) \to \lambda \cdot f$,

όπου $f+g : X \to \mathbb{R}$ με $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \forall x \in X$

$\lambda \cdot f : X \to \mathbb{R}$ με $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \ \forall x \in X$,

είναι διανυσματικός χώρος (άσκηση) και μάλιστα υπόχωρος του $\ell^\infty(X)$.

Όπως αποδείξαμε ο $(\ell^\infty(X), \| \ \|_\infty)$ είναι χώρος **Banach**. Θα αποδείξουμε ότι ο $\tilde{C}(X)$ είναι **κλειστός** υπόχωρος του $\ell^\infty(X)$.

Πράγματι, έστω $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \tilde{C}(X)$ και $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Τότε $f \in \tilde{C}(X)$, δηλαδή είναι **συνεχής**. Πράγματι, έστω $y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: $|f_n(y) - f(y)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ (*)

$\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0$ και $y \in X$

Η συνάρτηση $f_{n_0} \in \tilde{C}(X)$, άρα είναι **συνεχής**.

Έστω $x \in X$. Τότε:

$\forall y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (**)

Άρα, $\forall y \in X$ ώστε $|x - y| < \delta$ ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| < \varepsilon$$

Άρα η f είναι **συνεχής** και προφανώς **φραγμένη**, διότι

$|f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|f_{n_0}(y)\|_\infty \ \forall y \in X$ από την (*).

Άρα, $\tilde{C}(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ και άρα χώρος **Banach**.

Οι χώροι πεπερασμένης διάστασης

Πρόταση 1
Έστω X γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, έστω $k \in \mathbb{N}$ και έστω μια αλγεβρική βάση $e_1, \dots, e_k \in X$.
Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ώστε:
$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k.$$
Θέτουμε:
$$\|x\|_\infty = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_k|\}.$$

Ο $(X, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα, και κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο $K \subseteq X$ είναι συμπαγές (στον αντίστοιχο μετρικό χώρο (X, ρ_∞), όπου $\rho_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty$ $\forall\, x, y \in X$).

Απόδειξη Προφανώς $(X, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα.
Έστω $K \subseteq X$ κλειστό στον αντίστοιχο μετρικό χώρο (X, ρ_∞) και φραγμένο. Το K είναι συμπαγές αν κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλαδή, υπάρχουν $n_1 < n_2 < \dots < n_\mu < \dots \in \mathbb{N}$ και $x_0 \in X$ ώστε $\|x_{n_\mu} - x_0\| \xrightarrow[\mu]{} 0$.
Έστω $\boxed{x_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i,n} e_i \in K}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Το $K \subseteq X$ φραγμένο, άρα υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε:
$$\boxed{\|x\|_\infty \le \theta} \quad \forall\, x \in K.$$
Άρα, η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη ($\|x_n\|_\infty \le \theta$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$), και ακολούθως οι ακολουθίες $(\lambda_{i,n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένες για κάθε $i = 1, \dots, k$, διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$
$$\boxed{|\lambda_{i,n}| \le \|x_n\|_\infty \le \theta} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ και } i = 1, \dots, k.$$
Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Επίσης κάθε υπακολουθία μιας υπακολουθίας μιας ακολουθίας είναι επίσης υπακολουθία της αρχικής ακολουθίας.

Άρα υπάρχουν $n_1 < n_2 < \dots < n_\mu < \dots$ φυσικοί αριθμοί και $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\lambda_{i n_\mu} \xrightarrow[\mu]{} \lambda_i \Leftrightarrow |\lambda_{i,n_\mu} - \lambda_i| \xrightarrow[\mu]{} 0 \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Θέτουμε: $\boxed{x_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i .}$

Τότε $(x_{n_\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}$ είναι μια υπακολουθία της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ και ισχυριζόμαστε ότι:

$$x_{n_\mu} \longrightarrow x_0 \Longleftrightarrow \|x_{n_\mu} - x_0\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow |\lambda_{i n_\mu} - \lambda_i| \xrightarrow[\mu]{} 0 \quad \forall i = 1, \dots k$$

[Πράγματι,

$$\|x_{n_\mu} - x_0\|_\infty = \max\{|\lambda_{i,n_\mu} - \lambda_i| : 1 \le i \le k\} \xrightarrow[\mu]{} 0$$

αφού $|\lambda_{i n_\mu} - \lambda_i| \xrightarrow[\mu]{} 0 \quad \forall \quad 1 \le i \le k$.]

Άρα, καθε φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{n_\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}$, και επομένως ο μετρικός χώρος (K, ρ_∞) είναι συμπαγής.

<u>Παρατήρηση</u>

Όπως αναφέραμε, δύο νόρμες σε ένα γραμμικό χώρο X είναι **ισοδύναμες** άν ο ταυτοτικός τελεστής $I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ είναι **ισομορφισμός**, δηλαδή υπάρχουν $m, M > 0$ πραγματικοί αριθμοί ώστε:

$$\boxed{m \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M \|x\|_1} \quad \forall \ x \in X$$

Άρα, (1) $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες,

αν και μόνο αν (2) $\|x_n - x\|_1 \to 0 \Leftrightarrow \|x_n - x\|_2 \to 0$

αν και μόνο αν (3) $A \subseteq X$ κλειστό στον $(X, \|\cdot\|_1) \Longleftrightarrow$ $A \subseteq X$ κλειστό στον $(X, \|\cdot\|_2)$

αν και μόνο αν (4) $A \subseteq X$ ανοικτό στον $(X, \|\cdot\|_1) \Longleftrightarrow$ $A \subseteq X$ ανοικτό στον $(X, \|\cdot\|_2$

Πρόταση 2

Έστω X γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Τότε όλες οι νόρμες στον X είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη

Έστω $e_1, \ldots, e_k \in X$ είναι μια αλγεβρική βάση του X. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$ ώστε $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$.

1. Σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση: ο $(X, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα, όπου

$$\|x\|_\infty = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_k|\} \quad \forall\, x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in X.$$

2. Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$

Απόδειξη: Αρκεί $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|_\infty)$ ισομορφισμός ($I(x) = x \ \forall x \in X$)

Έστω $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in X$. Τότε:

$$\boxed{\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{k} \|\lambda_i e_i\| = \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| \|e_i\|.}$$

Άρα, αν $M = \sum_{i=1}^{k} \|e_i\|$, και $\|x\|_\infty = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_k|\}$

τότε $\boxed{\|x\| \leq M \cdot \|x\|_\infty}$, $\forall\, x \in X$ (*)

Άρα, η ταυτοτική συνάρτηση

$$I : (X, \|\cdot\|_\infty) \to (X, \|\cdot\|) \quad (*)$$

είναι συνεχής.

Από την προηγούμενη Πρόταση, ο μετρικός χώρος (B_X, ρ_∞), όπου $\boxed{B_X = \{x \in X ;\ \|x\|_\infty \leq 1\} \subseteq X}$ και $\rho_\infty(x,y) = \|x - y\|_\infty$. $\forall\, x, y \in B_X$ είναι συμπαγής, ως κλειστός και φραγμένος.

Επίσης από την συνέχεια της συνάρτησης I (*) έχουμε ότι ο περιορισμός της I στο B_X

$\boxed{I|_{B_X} : (B_X, \rho_\infty) \to (B_X, \rho)}$ ($\rho(x,y) = \|x - y\|$ $\forall x,y \in B_X$)

είναι συνεχής συνάρτηση και επί.

Άρα η συνάρτηση $I|_{B_X}$ είναι ομοιομορφισμός

Επομένως οι μετρικές του B_X, $\boxed{\rho_\infty, \rho \text{ είναι ισοδύναμες.}}$
Επομένως υπάρχει $m>0$ ώστε:

$$\boxed{\{x \in B_X : \|x\| < m\} \subseteq \{x \in X : \|x\|_\infty < 1\} \ni 0}$$

Άρα $\forall\, x \in X$, $m\|x\|_\infty \leq \|x\| \ \forall\, x \in X$

Επομένως, οι νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_\infty$ είναι ισοδύναμες και γενικά όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

<u>Πρόταση 3</u> Έστω X χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης $n \in \mathbb{N}$. Τότε:

(i) Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι ισομορφικός με τον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

(ii) Κάθε γραμμικός τελεστής $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ όπου $(Y, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, είναι φραγμένος (συνεχής).

<u>Απόδειξη</u> Έστω $e_1, \dots, e_n$ μια βάση του X.

(i) Θέτουμε $T : (X, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, όπου

$$T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Η συνάρτηση T είναι προφανώς 1-1 και επί.

Θέτουμε $\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right\|_2 = \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2} = \|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|_2 \quad (*)$

Τότε $\|\cdot\|_2$ είναι μία νόρμα στον X.

Από την προηγούμενη Πρόταση, όλες οι νόρμες στον X είναι ισοδύναμες, άρα υπάρχουν m, M: $m\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right\|_2 \leq \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right\| \leq M\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right\|_2$.

Επομένως, από την $(*)$

$$m \cdot \|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|_2 \leq \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right\| \leq M \cdot \|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|_2$$

και ο X είναι ισομορφικός με τον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

(ii) Έστω $T:(X,\|\cdot\|_\infty)\to(Y,\|\cdot\|)$ γραμμικός τελεστής από τον $(X,\|\cdot\|_\infty)$ σε ένα χώρο με νόρμα $(Y,\|\cdot\|)$. Τότε για κάθε $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\in X$ έχουμε:

$$\|T(x)\|=\Big\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i T(e_i)\Big\|\le\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\,\|T(e_i)\|\le$$
$$\le\max(|\lambda_1|,\dots,|\lambda_n|)\cdot\sum_{i=1}^{n}\|T(e_i)\|=\|x\|_\infty\cdot\sum_{i=1}^{n}\|T(e_i)\|.$$

Επομένως ο T είναι φραγμένος και
$$\|T\|\le\sum_{i=1}^{n}\|T(e_i)\|.$$

<u>Πρόταση 4</u>: Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, υπόχωρος του X. Τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι $Y\neq X$, άρα $X\setminus Y\neq\emptyset$, και έστω $\boxed{x\in X\setminus Y}$. Θέτουμε:

$$Z=\{y+\lambda x:\ y\in Y \text{ και } \lambda\in\mathbb{R}\}\subseteq X \text{ και}$$
$$\|y+\lambda x\|_1=\|y\|+|\lambda| \quad \forall\, y\in Y \text{ και } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Ο Z είναι διανυσματικός υπόχωρος του X. και ο $(Z,\|\cdot\|_1)$ χώρος με νόρμα.

Ο Z είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X, άρα οι νόρμες $\|\cdot\|_Z$ και $\|\cdot\|_1$ είναι ισοδύναμες, από την Πρόταση 2.

Άρα, υπάρχουν $m, M>0$ ώστε: $\forall\, y\in Y$ και $\lambda\in\mathbb{R}$

$$m\cdot\|y+\lambda x\|\le\|y+\lambda x\|_1=\underline{\|y\|+|\lambda|\le M\cdot\|y+\lambda x\|}$$

Συνεπώς, για $\boxed{\lambda=-1}$ έχουμε:

$$\frac{1}{M}\le\underline{\frac{1}{M}(\|y\|+1)\le\|y-x\|}=\|x-y\|\quad\forall\, y\in Y$$

και ακολούθως:

$$\rho(x,Y)=\inf\{\|x-y\|:\ y\in Y\}\ge\frac{1}{M}>0$$

Επομένως $\boxed{x\notin\overline{Y}}$ (ισχύει $x\in\overline{Y}\iff\rho(x,Y)=0$).

Άρα, $X\setminus Y\subseteq X\setminus\overline{Y}\iff\overline{Y}\subseteq Y$. Επομένως, $\overline{Y}=Y$, και άρα ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Θεώρημα (Riesz)

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο χώρος X είναι πεπερασμένης διάστασης.

(ii) Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $(X, \|\cdot\|)$ είναι συμπαγές.

(iii) Η κλειστή μοναδιαία σφαίρα $S_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη

(i) $\Rightarrow$ (ii) Αν ο χώρος X είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $(X, \|\cdot\|_\infty)$ είναι συμπαγές, σύμφωνα με την Πρόταση 1.
Σύμφωνα με την Πρόταση 2, οι νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_\infty$ του X είναι ισοδύναμες, δηλαδή υπάρχουν $m, M > 0$ ώστε:

$$m \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M \|x\|_\infty \quad \forall x \in X,$$

οπότε $\|x_n - x\| \to 0 \iff \|x_n - x\|_\infty \to 0 \quad \forall (x_n) \subseteq X, \ x \in X.$

Άρα, ισχύει η συνθήκη (ii) προφανώς.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Είναι προφανές.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω ότι η σφαίρα S_X είναι συμπαγής. Ας υποθέσουμε ότι ο X είναι απειροδιάστατος.

1. Για κάθε κλειστό γραμμικό υπόχωρο Y του X με $Y \subsetneqq X$ και $0 < a < 1$ υπάρχει $x_0 \in X$ με $\|x_0\| = 1$ και $\rho(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\} > a$.

[Πράγματι, έστω $z \in X \setminus Y \neq \emptyset$. Αφού το Y είναι κλειστό, $z \notin \overline{Y} = Y$, άρα $\rho(z, Y) = \delta > 0$.
Άρα, υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε $\|z - y_0\| < \frac{\delta}{a + \varepsilon}$, όπου $0 < a + \varepsilon < 1$.

Θέτουμε $x_0 = \frac{y_0 - z}{\|y_0 - z\|}$. Τότε $\rho(x_0, Y) > a$.]

2. Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό 1, κατασκευάζεται επαγωγικά μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε:

(*) $\|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $\rho(x_{n+1}, X_n) > \frac{1}{2}$,

όπου $X_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Αφού η $S_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ είναι συμπαγής, η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, (x_{n_k}) ... ΑΤΟΠΟ! διότι $\|x_n - x_{n+1}\| > \frac{1}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}$.