7º μάθημα

Ο χώρος ℓ^p για $1\leq p<\infty$

$$\ell^p=\{(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}\ \forall\, 1\leq p<\infty$$

(1) Ο χώρος ακολουθιών ℓ^p για $1\leq p<\infty$ είναι διανυσματικός χώρος, διότι συμφωνα με την ανισότητα Minkowski και παίρνοντας όρια ως προς n, έχουμε:

$$(*)\quad \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda x_n+\mu y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq|\lambda|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+|\mu|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$.

Θέτουμε

$$\|(x_n)\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p.$$

Προφανώς, $(\ell^p,\|\ \|_p)$ είναι χώρος με νόρμα καθώς ισχύουν οι ιδιότητες της νόρμας συμφωνα και με την ανισότητα $(*)$.

(2) Ο $(\ell^p,\|\ \|_p)$ είναι χώρος Banach για κάθε $1\leq p<\infty$, καθώς ο αντίστοιχος μετρικός χώρος (ℓ^p,d_p), όπου $d_p:\ell^p\times\ell^p\to\mathbb{R}$ με

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=d_p((x_n),(y_n))=\|(x_n)-(y_n)\|_p=\|(x_n-y_n)\|_p$$

είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Πράγματι, έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\ell^p$ βασική ακολουθία και έστω $x_n=(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^p$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Τότε $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε: $\forall\ n,m\geq n_0,\ k\in\mathbb{N}$

$$(**)\quad |x_n^k-x_m^k|\leq d_p(x_n-x_m)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_n^k-x_m^k|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2}$$ και

επίσης για κάθε $\lambda\in\mathbb{N}$ ισχύει:

$$(***)\quad \left(\sum_{k=1}^{\lambda}|x_n^k-x_m^k|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall\ n,m\geq n_0,\ \lambda\in\mathbb{N}$$

Από την ανισότητα $(**)$ έχουμε ότι $\forall k\in\mathbb{N}$ η ακολουθίες $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ είναι βασικές άρα, απο την πληρότητα του $\mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$x_m^k\xrightarrow[m]{}x^k\in\mathbb{R}\quad\forall\ k\in\mathbb{N}.$$

Από την ανισότητα $(***)$ έχουμε ότι: $\forall \lambda \in \mathbb{N}$

$$\lim_m \left(\sum_{k=1}^{\lambda} |x_n^k - x_m^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \boxed{\left(\sum_{k=1}^{\lambda} |x_n^k - x^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}} \quad \forall n \geq n_0.$$

Επομένως $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0. \quad (****)$

Από την ανισότητα Minkowski,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_0}^k - x^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_0}^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon + \|x_{n_0}\|_p$$

και άρα $\boxed{x = (x^k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p}$

Από την ανισότητα $(****)$ έχουμε ότι:

$$\|x_n - x\|_p \longrightarrow 0 \iff x_n \to x \text{ στο χώρο } \ell^p.$$

Άρα ο $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach $\forall\, 1 \leq p < \infty$.

(3) Ο χώρος $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ είναι διαχωρίσιμος $\forall\, 1 \leq p < \infty$

Πράγματι, το σύνολο:

$$D = \{\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n : n \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}\},$$

όπου $e_k = (e_k^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ με $e_k^n = 0$ αν $k \neq n$ και $e_k^k = 1$

$$e_k = (0, 0, \dots 0, \underset{\uparrow\, k-\text{θέση}}{1}, 0, 0, \dots),$$

είναι πυκνό στον ℓ^p και αριθμήσιμο (προφανώς).

Το σύνολο D είναι πυκνό, διότι $\forall\, \varepsilon > 0$ και $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ ισχύει $S(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. $(S(x,\varepsilon) = \{y \in \ell^p : \|x - y\|_p < \varepsilon\})$

Πράγματι, αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p - \sum_{n=1}^{m} |x_n|^p \right\| = \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p \right\| < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Για κάθε $n = 1, \dots, m$ υπάρχει $q_n \in \mathbb{Q}$ ώστε:

$$|x_n - q_n| < \frac{\varepsilon}{(2m)^{\frac{1}{p}}} \iff |x_n - q_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2m}$$

Θέτουμε $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D$,

όπου $y_n = q_n$ για $n = 1, \dots m$ και $y_n = 0$ για $n \in \mathbb{N}$ $n > m$. Τότε

$$\|x - y\|_p = \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n - y_n|^p + \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon.$$

Άρα $y \in S(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$

Ο συζυγής χώρος $(\ell^p)^*$ είναι ισομετρικός με τον χώρο ℓ^q, όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. $\forall 1<p<\infty$

Απόδειξη

Από την ανισότητα Holder:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q < \infty \text{ αν } x=(x_n)\in \ell^q \text{ και } y=(y_n)\in \ell^p.$$

και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $\boxed{x=(x_n)\in \ell^q}$ θέτουμε:

$$\boxed{T_x : \ell^p \to \mathbb{R} \text{ με } T_x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \forall\, y=(y_n)\in \ell^p.}$$

Η συνάρτηση T_x είναι γραμμικός τελεστής $\forall x \in \ell^q$ προφανώς και ισχύει:

$$|T_x(y)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leq \|x\|_q \cdot \|y\|_p. \quad (*)$$

για κάθε $y=(y_n)\in \ell^p$. Άρα, $\boxed{\|T_x\| \leq \|x\|_q,\ \forall x \in \ell^q.}$

Άρα, T_x είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και συνεπώς $T_x \in (\ell^p)^*$ για κάθε $x\in \ell^q$.

Ορίζουμε την συνάρτηση:

$$T : \ell^q \to (\ell^p)^* \text{ με } \boxed{T(x) = T_x \in (\ell^p)^*.} \ \forall x \in \ell^q$$

Τότε $T(x)(y) = T_x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, για κάθε $x=(x_n)\in \ell^q$ και $y=(y_n)\in \ell^p$.

Η συνάρτηση T είναι γραμμικός τελεστής προφανώς.

Η συνάρτηση T είναι ισομετρία:

Από την $(*)$ έχουμε ότι $\boxed{\|T_x\| \leq \|x\|_q \ \ \forall x\in \ell^q.}$

Έστω $x=(x_n)\in \ell^q$. Για κάθε $m\in\mathbb{N}$ θέτουμε $\boxed{z^m = (z^m_n)_{n\in\mathbb{N}}}$, όπου

$$\begin{cases} z^m_n = \dfrac{|x_n|^q}{x_n}, & \text{αν } x_n \neq 0 \text{ και } n\leq m \\ z^m_n = 0, & \text{αν } x_n = 0 \text{ ή } n>m. \end{cases}$$

Τότε $z^m \in \ell^p$ και

$$\|z^m\|_p \left(\sum_{n=1}^{m} |z^m_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^{(q-1)\cdot p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^q\right)^{\frac{1}{p}} \quad (**)$$

όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Leftrightarrow pq=p+q \Leftrightarrow p(q-1)=q$)

Επομένως για $x=(x_n)\in \ell^q$ και $z^m \in \ell^p$ έχουμε:

$$|T(x)(z^m)| = \sum_{n=1}^{m} |x_n|^q \leq \|T(x)\| \cdot \|z^m\|_p =$$

$$= \|T(x)\| \cdot \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ από την } (**)$$

Επομένως

$$\|T(x)\| \geq \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς, $\boxed{\|T(x)\| \geq \|x\|_q}$ $\forall x \in \ell^q$,

και τελικά

$$\|T(x)\| = \|x\|_q \quad \forall x \in \ell^q.$$

Άρα ο T είναι ισομετρική εμφύτευση.

<u>Ισχυρισμός</u> Ο $T: \ell^q \to (\ell^p)^*$, όπου $T(x) = T_x \ \forall x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$, είναι επί και άρα ισομετρία.

Έστω $y^* \in (\ell^p)^*$. Θέτουμε $x_n = y^*(e_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Θα αποδείξουμε ότι: $y^* = T_x = T(x)$, $x \in \ell^q$.

Αρκεί $y^*(e_n) = T_x(e_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω

$$z_n = \begin{cases} \dfrac{|y^*(e_n)|^q}{y^*(e_n)} & \text{αν } y^*(e_n) \neq 0 \\ 0 & \text{αν } y^*(e_n) = 0 \end{cases} \quad (***)$$

Άρα, $|y^*(e_n)|^q = y^*(e_n) z_n \boxed{= y^*(z_n e_n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^{m} |x_n|^q = \sum_{n=1}^{m} |y^*(e_n)|^q = \left|y^*\left(\sum_{n=1}^{m} z_n e_n\right)\right| \leq$$

$$\leq \|y^*\| \cdot \left\|\sum_{n=1}^{m} z_n e_n\right\|_p = \|y^*\| \left(\sum_{n=1}^{m} |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|y^*\| \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N}.$$

Επομένως, για $m \in \mathbb{N}$ $\left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|y^*\| < \infty$

Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty$ και $\boxed{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q}$

Αφού $y^*(e_n) = x_n = T_x(e_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$\boxed{y^* = T(x) = T_x}$ (ταυτίζονται σε πυκνό).