ΧΩΡΟΙ BANACH

Ορισμός Ένας χώρος $(X, \|\cdot\|)$ με νόρμα είναι χώρος Banach αν ο αντίστοιχος μετρικός χώρος (X, ρ) όπου
$$\rho : X \times X \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \rho(x,y) = \|x-y\| \ \forall (x,y) \in X \times X$$
είναι πλήρης, δηλαδή κάθε Cauchy ακολουθία στον μετρικό χώρο (X, ρ) συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του X.

Δηλαδή: ο χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach αν και μόνο αν για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ με την ιδιότητα: $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$, ισχύει $\|x_n - x_0\| \to 0$ για κάποιο $x_0 \in X$.
(δηλαδή $x_n \to x_0 \in X$).

Πρόταση Αν $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $|||\cdot|||$ για άλλη νόρμα του X ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$, (δηλαδή, $K\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\| \ \forall x \in X$, όπου $M, K > 0$), τότε και ο $(X, |||\cdot|||)$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ Cauchy ακολουθία στον $(X, |||\cdot|||)$.
Τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:
$|||x_n - x_m||| < \varepsilon . K$ για κάθε $n, m \geq n_0 \in \mathbb{N}$.
Άρα, $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{K} |||x_n - x_m||| < \varepsilon \quad \forall \ n, m \geq n_0$.
Επομένως η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ είναι Cauchy στον χώρο $(X, \|\cdot\|)$, ο οποίος είναι Banach, άρα πλήρης μετρικός, οπότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x \iff \|x_n - x\| \to 0$
Αφού $|||x_n - x||| \leq M \|x_n - x\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
έχουμε ότι $|||x_n - x||| \to 0$ και ισοδύναμα $x_n \to x$ στον χώρο $(X, |||\cdot|||)$.
Άρα, ο χώρος $(X, |||\cdot|||)$ είναι Banach.

Παρατήρηση

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα δεν ισχύει για όλους τους μετρικούς χώρους, αλλά ισχύει για χώρους με νόρμα. Για παράδειγμα:

1. Έστω ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, \rho)$ με την συνήθη μετρική $\rho(x,y)=|x-y|$ $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$, ο οποίος, όπως γνωρίζουμε, είναι πλήρης μετρικός χώρος.
2. Ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, \sigma)$ με την μετρική $\sigma(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$ $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$, που είναι ισοδύναμη με την συνήθη μετρική δεν είναι πλήρης.

Πράγματι, οι μετρικές ρ, σ στον $\mathbb{R}$ είναι ισοδύναμες:
Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (-1,1)$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$
Η f είναι προφανώς 1-1 και επί, και είναι συνεχής.
Επίσης, η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: (-1,1) \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$ είναι συνεχής.
Αφού η f είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$,
$\forall\, \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$

$$|x-y| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x)-f(y)| = \sigma(x,y) < \varepsilon \qquad (*)$$

Αφού η f^{-1} είναι συνεχής στο $(-1,1)$ υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$

$$\sigma(x,y) = |f(x)-f(y)| < \delta_2 \Longrightarrow |x-y| < \varepsilon \qquad (**)$$

Άρα, ισχύει από τις συνεπαγωγές $(*)$ κ $(**)$, ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε:

$$S_\rho(x, \delta_1) \subseteq S_\sigma(x, \varepsilon) \quad \text{και}$$

$$S_\sigma(x, \delta_2) \subseteq S_\rho(x, \varepsilon)$$

Άρα, οι μετρικές ρ, σ ισοδύναμες.

4 Ο $(\mathbb{R},\sigma)$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Έστω η ακολουθία $(n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$.

Η ακολουθία $(n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ **βασική** ως προς την μετρική σ:

Πράγματι, η ακολουθία $(n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ είναι **βασική** στον χώρο $(\mathbb{R},\sigma)$, διότι η ακολουθία $\frac{n}{n+1} \to 1$ ως προς τη συνήθη μετρική ρ, άρα η $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **βασική** ως προς τη ρ, επομένως

$\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\sigma(n,m) = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| < \varepsilon \quad \forall\, n,m \geq n_0 .$$

Άρα, η ακολουθία $(n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ είναι **βασική** στο χώρο $(\mathbb{R},\sigma)$.

Η ακολουθία $(n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ δεν συγκλίνει στον χώρο $(\mathbb{R},\sigma)$, αφού είναι ισοδύναμος με το $(\mathbb{R},\rho)$.

Άρα, ο $(\mathbb{R},\sigma)$ δεν είναι πλήρης μετρικός ενώ είναι ισοδύναμος με τον πλήρη μετρικό χώρο $(\mathbb{R},\rho)$.

Πρόταση

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος νόρμα.

(α) Αν $(Y, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach, τότε: ο χώρος $\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y : T$ γραμμικός, φραγμένος$\}$ είναι Banach.

(β) Οι δυϊκοί χώροι X^*, X^{**}, ... είναι χώροι Banach.

Απόδειξη

Όπως αποδείξαμε ο χώρος $\mathcal{L}(X,Y)$ είναι διανυσματικός χώρος και χώρος με νόρμα.

Έστω $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ βασική ακολουθία.

Ισχύει: $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \;\forall x \in X$.

Άρα και η ακολουθία $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ είναι βασική για κάθε $x \in X$.

Ο χώρος $(Y, \|\cdot\|)$ είναι Banach, άρα

$$T_n(x) \to T(x) \in Y \text{ για κάθε } x \in X.$$

Θέτουμε $T : X \to Y$ την συνάρτηση αυτή.

Αφού οι τελεστές T_n είναι γραμμικοί, προφανώς και ο T είναι γραμμικός τελεστής.

Ο T είναι <u>φραγμένος</u>. Πράγματι, η ακολουθία $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$, ως βασική, είναι φραγμένη, έστω $\|T_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$. Αφού $T_n(x) \to T(x)$ υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $\|T_{n_x}(x) - T(x)\| < 1$.

Άρα, για κάθε $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$ ισχύει:

$$\|T(x)\| \leq \|T_{n_x}(x) - T(x)\| + \|T_{n_x}(x)\| < 1 + M.$$

Άρα, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ είναι φραγμένος τελεστής.

Ισχύει $\|T_n - T\| \to 0$.

Πράγματι: Αφού $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ βασική, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Για κάθε $x \in X$, $\|x\| \leq 1$ υπάρχει $m_x \in \mathbb{N}$ (ορισμός sup) ώστε: $m_x \geq n_0$ και

$$\|T(x) - T_{m_x}(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (*)$$

Επομένως για κάθε $x \in X$, $\|x\| \leq 1$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

$$\|T(x) - T_n(x)\| \leq \|T(x) - T_{m_x}(x)\| + \|T_{m_x}(x) - T_n(x)\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \|T_{m_x} - T_n\| \|x\| \leq$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3} + \|T_{m_x} - T_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Άρα, ισχύει $\|T(x) - T_n(x)\| \leq \frac{2\varepsilon}{3}$ $\forall x \in X$, $\|x\| \leq 1$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Επομένως, $\|T - T_n\| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$,
και τελικά $\|T_n - T\| \to 0 \Leftrightarrow T_n \to T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(β) Αν X είναι χώρος με νόρμα, τότε ο $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ είναι χώρος Banach, διότι ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι χώρος Banach, από το (α).
Ο $X^{**} = (X^*)^*$ είναι χώρος Banach, διότι $X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{R})$. κ.ο.τ.κ.
...

<u>Πρόταση</u>
Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T: X \to Y$, $S: Y \to Z$ γραμμικοί φραγμένοι τελεστές. Τότε η σύνθεση $S \circ T: X \to Z$ είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής και μάλιστα $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

<u>Απόδειξη</u> Προφανώς ο $S \circ T$ είναι γραμμικός.
Για $x \in X$ ισχύει:

$$\|S \circ T(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\| \|T(x)\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|.$$

Άρα, $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ και $S \circ T$ είναι φραγμένος τελεστής

$\emptyset$