Ομάδες Ι

Μια πρώτη συλλογή ασκήσεων στην Θεωρία Ομάδων

Σκοπός των ασκήσεων αυτών είναι ο (πραγματικά) ενδιαφερόμενος φοιτητής να κάνει μια ανασκόπιση/επανάληψη βασικών εννοιών στη Θεωρία Ομάδων, οι οποίες (υποτίθεται ότι) έχουν διδαχθεί σε ένα εισαγωγικό μάθημα Βασικής Άλγεβρας.

1. Έστω $G = \{\,(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, όπου $a \neq 0\,\}$ και $H = \{\,(1,\, b)$, όπου $b \in \mathbb{R}\,\}$. Στο G ορίζουμε μία πράξη ως εξής:
   $(a_1,\, b_1) \circ (a_2,\, b_2) \,=\, (a_1 a_2,\, a_1 b_2 + b_1)$. Δείξτε ότι:

   $i)$ Το ζεύγος $(G,\, \circ\,)$ είναι ομάδα.

   $ii)$ Η H είναι κανονική υποομάδα της G.

   $iii)$ Η H είναι αβελιανή.

   $iv)$ Εξετάστε αν η G έχει στοιχεία τάξης 3.

2. Στο σύνολο $G = \mathbb{Z}^3$ ορίζουμε μία πράξη ως εξής:
   $(x_1,\, x_2,\, x_3) \circ (y_1,\, y_2,\, y_3) \,=\, (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, x_3 + y_3 + x_2 y_1)$. Δείξτε ότι:

   $i)$ Το ζεύγος $(G,\, \circ\,)$ είναι ομάδα.

   $ii)$ Αν $H = \{\,(x_1,\, 0,\, x_3) \in G\,\}$, τότε το H είναι κανονική υποομάδα της G και μάλιστα αβελιανή.

3. Έστω $(G,\, \cdot)$ μια ομάδα, H ένα σύνολο και $\vartheta : G \longrightarrow H$ μια απεικόνιση 1-1 και επί. Στο σύνολο Η ορίζουμε μια πράξη ως εξής: $h_1 * h_2 \,=\, \vartheta(a_1 \cdot a_2)$, όπου $a_1,\, a_2 \in G$ έτσι ώστε $\vartheta(a_1) \,=\, h_1$ και $\vartheta(a_2) \,=\, h_2$. Δείξτε ότι το σύνολο $(H,\, *)$ είναι ομάδα και ότι η απεικόνιση ϑ ισομορφισμός ομάδων.

4. Δίνεται το σύνολο $G = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{b} \end{pmatrix} \mid \bar{0},\, \bar{1},\, \bar{a},\, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m,\ (b,\, m) \,=\, 1 \right\}$. Δείξτε ότι:

   $i)$ Το σύνολο G είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων και $\mid G \mid = m \cdot \varphi(m)$, όπου φ είναι η συνάρτηση του $Euler$.

   $ii)$ Το σύνολο $H = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \mid \bar{a} \in \mathbb{Z}_m \right\}$ είναι κανονική υποομάδα της G.

   $iii)$ $G/H \simeq U(\mathbb{Z}_m)$.

5. Έστω $A,\, B,\, C$ μη κενά υποσύνολα μιας ομάδας G. Δείξτε ότι:
   $i)$ $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$.
   $ii)$ $A(B \cup C) \,=\, AB \cup AC$.

   Στην περίπτωση όπου το A είναι μονοσύνολο, δείξτε ότι ισχύει ισότητα και στην πρώτη περίπτωση.

   Δώστε ένα παράδειγμα όπου στην πρώτη περίπτωση έχουμε γνήσιο εγκλεισμό.

6. Έστω H, K υποομάδες μιας ομάδας G. Δείξτε ότι το γινόμενο HK είναι υποομάδα αν και μόνο αν $HK = KH$.

7. Έστω G πεπερασμένη ομάδα με τάξη άρτιο αριθμό. Δείξτε ότι περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο με τάξη ίση με 2.

8. Έστω A, B, K υποομάδες μιας ομάδας G. Υποθέτουμε ότι $A \leq B$, $A \cap K = B \cap K$ και $AK = BK$, δείξτε ότι $A = B$.

9. Έστω $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ ένας ομομορφισμός ομάδων και $a \in G_1$ πεπερασμένης τάξης. Δείξτε ότι η τάξη της εικόνας $\varphi(a)$ διαιρεί την τάξη του στοιχείου a.

   Έστω A μια πεπερασμένη υποομάδα της G_1, δείξτε ότι η τάξη της εικόνας $\varphi(A)$ διαιρεί την τάξη της A.

10. Δίνονται οι ομάδες $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \nu \in \mathbb{Z} \right\}$ και $H = \{1, i, -1, -i\}$ με τις γνωστές πράξεις και $\vartheta : G \longrightarrow H$ με $\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vartheta} i^{\nu}$, δείξτε ότι ϑ είναι επιμορφισμός ομάδων. Να βρεθεί ο $Ker\vartheta$.

11. Έστω ότι η κυκλική ομάδα $G = \langle a \rangle$ έχει τάξη ίση με n. Δείξτε ότι $G = \langle a^k \rangle$ αν και μόνο αν $\mu.\kappa.\delta(k, n) = 1$.

12. Έστω G μια κυκλική ομάδα παραγόμενη απ' το g.

    α) Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ με $f(z) = g^z$ είναι ένας μορφισμός ομάδων.

    β) Υποθέτουμε ότι η G έχει τάξη n. Δείξτε ότι η $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow G$ με $f(z) = g^z$ είναι ισομορφισμός.

13. Έστω G αβελιανή ομάδα και $k \in \mathbb{Z}$, δείξτε ότι:

    $i)$ Η απεικόνιση $\vartheta_k : G \longrightarrow G$ με $\vartheta_k(x) = x^k$ είναι ομομορφισμός. Να περιγράψετε τον πυρήνα της.

    $ii)$ Αν η G είναι πεπερασμένη αβελιανή τότε η ϑ_k είναι αυτομορφισμός αν και μόνο αν $(k, m) = 1$, όπου m είναι η τάξη της ομάδας.

14. Το **κέντρο** $\zeta(G)$ μιας ομάδας G αποτελείται από όλα τα στοιχεία z της ομάδας G, που έχουν την ιδιότητα $zg = gz$ για κάθε $g \in G$. Δείξτε ότι $\zeta(G) \lhd G$.

15. Έστω G ομάδα και $\zeta(G)$ το κέντρο της. Δείξτε ότι η ομάδα πηλίκο $G/\zeta(G)$ δεν είναι κυκλική (εκτός αν η G είναι αβελιανή).

16. Δίνεται η ομάδα $G = \{ A \mid A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu},$ με $\mid A \mid\neq 0 \}$ και $S = \{ A \in G,$ με $\mid A \mid = 1 \}$. Δείξτε ότι:

    $i)$ Η S είναι κανονική υποομάδα της G.

    $ii)$ Το πηλίκο G/S είναι αβελιανή ομάδα.

    $iii)$ Να βρεθούν τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης της ομάδας G/S.

17. $i)$ Έστω G ομάδα και $g \in G$ με τάξη του g ίση με n. Δείξτε ότι η τάξη του στοιχείου g^k είναι ίση με $\frac{n}{(n,k)}$.

    $ii)$ Δείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ ο μικρότερος θετικός ακέραιος k με την ιδιότητα $(k \cdot a) mod\, n \equiv o\, mod\, n$ είναι ο $\frac{n}{(n,a)}$.

18. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα τάξης m. Έστω $g \in G$. Υποθέτουμε ότι για κάθε πρώτο διαιρέτη p του m είναι $g^{\frac{m}{p}} \neq e$. Δείξτε ότι η G είναι κυκλική παραγόμενη από το g.

19. Έστω G κυκλική ομάδα τάξης m και H υποομάδα της G τάξης n. Αν $G = \langle a \rangle$ και $H = \langle a^{\lambda} \rangle$ τότε $\kappa \mid \lambda$, όπου $\kappa = m/n$.

20. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα. Δείξτε ότι κάθε στοιχείο της G εμφανίζεται ακριβώς μιας φορά σε κάθε στήλη και σε κάθε γραμμή του πολλαπλασιαστικού πίνακα της G (πίνακας-$Cayley$).

21. α) Δείξτε ότι η $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x,y) = x - 2y$ είναι ομομορφισμός προσθετικών ομάδων και να βρεθεί η $f(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = Imf$.

    β) Έστω G μια ομάδα και $g \in G$. Δείξτε ότι η $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ με $f(k) = g^{2k}$ είναι ομομορφισμός. Ποιά είναι η Imf αν η τάξη του g είναι 6 ή 7;

22. Έστω $\mathbb{C}^*$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των μιγαδικών και
    $H = \{ x+yi \in \mathbb{C}^*$ με $\mid x+yi \mid = 1 \}$. Δείξτε ότι $H \leq \mathbb{C}^*$ και
    $\mathbb{C}^*/H \approx (\{ r \in \mathbb{R}^*$ με $r > 0 \}, \cdot)$.

23. Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένη υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας των μιγαδικών είναι κυκλική. (Υπόδειξη: Ποίο είναι το μέτρο ενός στοιχείου πεπερασμένης τάξης;)

24. Έστω G κυκλική ομάδα τάξης p^n, όπου p-πρώτος και H, K υποομάδες της G. Δείξτε ότι είτε $H \subseteq K$ είτε $K \subseteq H$. Ισχύει το αντίστροφο?

25. Έστω $A, B \leq G$ και $x, y \in G$. Δείξτε ότι το σύνολο $xA \cap yB$ είναι είτε το κενό είτε ένα αριστερό σύμπλοκο της $A \cap B$ στη G.

26. Έστω G ομάδα, H υποομάδα της με $\mid G : H \mid = n$ και $g \in G$. Δείξτε ότι υπάρχει m με $1 < m \leq n$ έτσι ώστε $g^m \in H$.

27. Έστω A, B υποομάδες της ομάδας G. Αν ισχύει $(\mid A \mid, \mid B \mid) = 1$, δείξτε ότι $A \cap B = 1$. Αν ισχύει $(\mid G : A \mid, \mid G : B \mid) = 1$, δείξτε ότι $\mid G : A \cap B \mid =$
$\mid G : A \mid \cdot \mid G : B \mid$.

28. Έστω G ομάδα, επιλέγουμε ένα στοιχείο $k \in G$ και ορίζουμε την απεικόνιση $\tau_k : G \longrightarrow G$ με $\tau_k(g) = k^{-1}gk$. Δείξτε ότι η τ_k είναι αυτομορφισμός της G.

29. Έστω G μη αβελιανή ομάδα. Δείξτε ότι η ομάδα αυτομορφισμών της G $\;(AutG)$ δεν είναι κυκλική.

30. $i)$ Έστω ότι η $AutG$ μιας ομάδας G είναι πεπερασμένη κυκλική. Δείξτε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή και η τάξη της $AutG$ είναι άρτιος αριθμός.

    $ii)$ Έστω C_n η κυκλική ομάδα τάξης n. Δείξτε ότι ομάδα αυτομορφισμών $Aut\,C_n$ είναι αβελιανή με τάξη $\varphi(n)$.

    $iii)$ Δείξτε ότι $AutV \simeq S_3 \simeq AutS_3$, όπου V είναι η ομάδα του $Klein$.

31. Έστω $\mathbb{Q}$ η προσθετική ομάδα των ρητών αριθμών.

    $i)$ Δείξτε ότι δεν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $S \subseteq \mathbb{Q}$ έτσι ώστε το S να παράγει την $\mathbb{Q}$.

    $ii)$ Βρείτε ένα σύστημα γεννητόρων της $\mathbb{Q}$.

    $iii)$ Αν $\mathbb{Q}_n = < \frac{1}{n!} >$, δείξτε ότι $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_n$.

    $iv)$ Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένα γεννώμενη υποομάδα της $\mathbb{Q}$ είναι κυκλική.

    $v)$ Έστω $0 \neq H,\ 0 \neq K$ υποομάδες της $\mathbb{Q}$, δείξτε ότι $H \cap K \neq 0$.

    $vi)$ Δείξτε ότι για κάθε γνήσια μη τετριμένη υποομάδα H της $\mathbb{Q}$ το πηλίκο $\mathbb{Q}/H$ δεν είναι ούτε πεπερασμένο, ούτε κυκλικό.

    $vii)$ Έστω $\phi : \mathbb{Q} \longrightarrow N$ ομομορφισμός ομάδων, όπου N πεπερασμένη. Δείξτε ότι η ϕ είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός.

    $viii)$ Δείξτε ότι κάθε στοιχείο της ομάδας $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι πεπερασμένης τάξης. Είναι η ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ πεπερασμένη?

32. Έστω G ομάδα με τάξη $\mid G \mid = 2p$, όπου p πρώτος. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b \in G$ με τάξη του a ίσον 2 και τάξη του b ίσον p,
($o(a) = 2,\ o(b) = p$).

33. $i)$ Έστω $\pi, \tau \in S_n$ δύο κύκλοι ξένοι μεταξύ τους με μήκη k, m αντίστοιχα και k, m σχετικά πρώτοι.
α) Δείξτε ότι η υποομάδα K που παράγεται από τις μεταθέσεις π και τ είναι κυλική.
β) Η απεικόνιση $\phi : K, \longrightarrow Z_n$ με $(\pi^x \tau^y)\phi = x \, mod n$ είναι επιμορφισμός ομάδων. Ποίος είναι ο πυρήνας της;

$ii)$ Έστω G ομάδα και $a, b \in G$ με $a \cdot b = b \cdot a$. Αν $a^m = b^n = 1$ με $(m, n) = 1$, τότε η υποομάδα που παράγεται από τα a, b είναι κυκλική. Να βρεθεί ένα $c \in G\ :< c > = < a, b >$.

34. $i)$ Δείξτε ότι κάθε αβελιανή ομάδα με τάξη ίση με $p \cdot q$, όπου p, q είναι διαφορετικοί πρώτοι είναι κυκλική.

$ii)$ Δείξτε ότι η πολλαπλασιαστική ομάδα του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{18}$ είναι κυκλική.

35. Θεωρούμε την ομάδα U_{26} των αντιστρέψιμων στοιχείων της $\mathbb{Z}_{26}$.

α) Να βρεθεί η $|U_{26}|$.
β) Δείξτε ότι η U_{26} είναι κυκλική και να βρεθούν όλοι οι γεννήτορες.

36. Δείξτε ότι μία ομάδα είναι άπειρη κυκλική αν και μόνο αν είναι ισόμορφη με κάθε μη τετριμμένη υποομάδα της.

37. Έστω G αβελιανή ομάδα με τάξη 15.

$i)$ Να βρεθούν όλες οι υποομάδες της και όλα τα σύμπλοκα ως προς μία γνήσια υποομάδα της.

$ii)$ Έστω $a, b \in G$ με $a^6 = b^8 = 1$. Δείξτε ότι $b = 1$ και είτε $a = 1$, είτε η τάξη του a είναι 3.

38. Να οριστούν οι αριστερές και δεξιές κλάσεις (δηλαδή τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα) της S_3 στην S_4.

39. $i)$ Έστω $n > 2$. Δείξτε ότι η (υπο)ομάδα των αρτίων μεταθέσεων (εναλλάσουσα ομάδα) A_n παράγεται από όλους τους κύκλους μήκους 3.

$ii)$ Δείξτε ότι η A_4 δεν έχει υποομάδα με 6 στοιχεία.

40. $i)$ Έστω $\pi \in S_n$, δείξτε ότι είτε $< A_n, \pi > = S_n$, είτε $\pi \in A_n$.

$ii)$ Γενικά αν G ομάδα και $H \leq G$ με $\mid G : H \mid = p$, p πρώτος, τότε για κάθε $g \in G$ είτε $< H, g > = G$, είτε $< H, g > =$ H.

41. Δείξτε ότι η A_4 είναι η μόνη υποομάδα της S_4 με τάξη 12.

42. Θεωρούμε τις μεταθέσεις $\alpha = (1,2,3)$, $\beta = (2,3,4,5,6)$ και $\gamma = (1,4,6,3)$ της συμμετρικής ομάδας S_6. Υπολογίστε τις μεταθέσεις α^{-1}, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\gamma^2$, $\gamma^{-1}\beta$ και $(\alpha\gamma\beta)^{-1}$. Επίσης βρείτε το πρόσημο ($sign$) της κάθε μιας απ' αυτές (δηλαδή ποιές είναι άρτιες και ποιές περιττές).

43. Έστω $g \in S_n$. Δείξτε ότι αν $g(i) \neq i$ τότε $g^2(i) \neq g(i)$.

44. Έστω $g = (123)(234)(345)(567)(678)(789)$ στην S_q.
α) Γράψτε την g σε γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο μεταξύ τους.
β) Ποιά σημεία μένουν σταθερά κάτω απ'την g.
γ) Γράψτε την g^{-1} σε γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο μεταξύ των.
δ) Είναι η g άρτια?

45. Έστω $\pi = (1\,2\,3\,4\,5)$, $\tau = (2,\,5)\cdot(3\,4) \in S_5$. Δείξτε ότι:
$i)$ $\tau\cdot\pi\cdot\tau = \pi^{-1}$.
ii) $< \pi > \lhd < \pi, \tau >$.
iii) $D_5 \simeq < \pi, \tau >$.

46. Δείξτε ότι τα στοιχεία $(1\,3\,4\,5)$ και $(3\,4\,2\,6)$ της S_7 είναι συζυγή και βρείτε $\pi \in S_7$ έτσι ώστε $\pi^{-1}(1\,3\,4\,5)\pi = (3\,4\,2\,6)$.

47. Με ποίο από τα στοιχεία $\tau_1 = (1\,2\,3)(4\,5\,6)(7\,8)$, $\tau_2 = (6\,7\,8)(8\,9)(1\,2\,3\,4)$, $\tau_3 = (1\,2\,3\,4)(5\,6)(7\,8\,9)$ της S_{20} είναι συζυγής η μετάθεση $\pi = (1\,4\,5)(2\,3)(6\,7\,8\,9)$?

48. Πόσα στοιχεία έχει η κλάση συζυγίας στην S_7 που περιέχει την μετάθεση $\pi = (1\,2)(3\,4\,5)$?

49. Να βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή τάξη ενός στοιχείου της ομάδας S_{13}.

50. $i)$ Δείξτε ότι η διεδρική ομάδα D_3 είναι ισόμορφη με την S_3.
$ii)$ Ποίος είναι ο δείκτης της D_4 στην S_4;
$iii)$ Να βρεθούν τα σύμπλοκα της D_4 στην S_4.

51. Έστω $n > 2$, $n \in N$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Z}_n = \{1, 2, \cdots, n-1\}$ των ακεραίων $modulo\ n$ και έστω $\alpha \in S$ τέτοιο ώστε $(\alpha,\, n) = 1$.
α) Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός επί $\alpha \, mod\, n$ ορίζει μια μετάθεση p_α των $1, 2, \cdots, n-1$ $mod\, n$. Για $\alpha = 2$ και $n = q$ γράψτε την αντίστοιχη μετάθεση σαν γινόμενο ξένων ανά δύο κύκλων. Μπορείτε απ' αυτή τη γραφή να βρείτε τον μικρότερο $m \in \mathbb{N}$ τέτοιον

ώστε $\alpha^m = 1 mod\, m$?
β) Υποθέτουμε ότι η p_α γράφεται σε γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο μεταξύ των. Δείξτε ότι αυτοί οι κύκλοι κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες: Η μια περιλαμβάνει κύκλους όλοι των οποίων τα σημεία είναι αντιστρέψιμα $mod\, n$ και η άλλη κατηγορία περιλαμβάνει κύκλους που τα σημεία τους δεν είναι αντιστρέψιμα $mod\, n$.

52. Έστω $\alpha = (1, 2)$ και $\beta = (1, 2, 3, \cdots, n) \in S_n$.
α) Υπολογίστε το $\beta\alpha\beta^{-1}$.
β) Υπολογίστε το $\beta^k\alpha\beta^{-1k}$, $k \in \mathbb{N}$.
γ) Δείξτε ότι κάθε στοιχείο της S_n μπορεί να γραφτεί σαν ένα γινόμενο στοιχείων απ' το σύνολο $\{\alpha, \beta, \beta^{-1}\}$, δηλαδή η S_n παράγεται απ' τα α και β.

53. Έστω G ομάδα με τάξη 26. Να βρεθούν όλες οι κανονικές υποομάδες της.

54. Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Τότε η πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{Z}_p^*$ είναι κυκλική.
Σημείωση: Υπάρχει η εικασία του *Artin* που δεν έχει αποδειχθεί μέχρι σήμερα: Υπάρχουν άπειροι πρώτοι για τους οποίους το 2 παράγει την ομάδα $\mathbb{Z}_p^*$.
Να οριστούν όλοι οι πρώτοι $p < 1000$ για τους οποίους το 2 είναι γεννήτορας της $\mathbb{Z}_p^*$.

55. Έστω $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ ομομορφισμός ομάδων και $A \leq G_1$. Δείξτε ότι $(A\phi)\phi^{-1} = A \cdot Ker\phi$, (με τον άλλο συμβολισμό $\phi^{-1}(\phi A) = A \cdot Ker\phi$).

56. $i)$ Έστω $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ ομομορφισμός ομάδων, στην G_1 ορίζουμε την σχέση: $a \sim b \overset{o\rho}{\iff} (a)\phi = (b)\phi$. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.
$ii)$ Έστω G ομάδα στην G ορίζουμε δύο σχέσεις ως εξής:
α) $a \simeq b \overset{o\rho}{\iff}$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $b = g^{-1}ag$.
β) $a \approx b \overset{o\rho}{\iff}$ υπάρχουν $g_1, g_2 \in G$ τέτοια ώστε $a = g_1g_2$ και $b = g_2g_1$.
Δείξτε ότι οι $\simeq$ και $\approx$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας και μάλιστα η **ίδια** σχέση ισοδυναμίας.
$iii)$ Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $G \leq S_X$.
α) Να δειχθεί ότι η σχέση $a \sim b \overset{o\rho}{\iff}$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $b = (a)g$, είναι σχέση ισοδυναμίας.
β) Το σύνολο $H_a = \{g \mid g \in G$ τέτοιο ώστε $(a)g = g\}$, όπου $a \in X$, είναι υποομάδα της G.

57. Έστω G αβελιανή ομάδα και $x, y \in G$ με $x^n = y^n$, όπου n φυσικός αριθμός και x απείρου τάξεως. Δείξτε ότι $y = x \cdot w$, όπου $w \in G$ με $o(w) \mid n$.

58. Υποθέτουμε ότι για τα στοιχεία x, u, v της ομάδας G ισχύουν οι σχέσεις: $x = u{\cdot}v = v{\cdot}u$ και $u^p = 1$, $v^q = 1$, όπου p, q είναι θετικοί ακέραιοι σχετικά πρώτοι. Δείξτε ότι υπάρχουν σχετικά πρώτοι ακέραιοι αριθμοί n, m έτσι ώστε $u = x^n$ και $v = x^m$.

59. Έστω G ομάδα με $G =< a, b, c >$ και $a^2 = b,\ b^2 = c,\ c^2 = a$. Δείξτε ότι:

$i)$ Η G είναι αβελιανή.

$ii)$ $G =< a >=< b >=< c >$.

$iii)$ Να βρεθεί η τάξη της G, αν η G δεν είναι τετριμμένη.

60. Έστω a φυσικός αριθμός πρώτος προς τον 9 και G κυκλική ομάδα με τάξη $n = a^{11} - a^7 - a^5 + a$. Δείξτε ότι υπάρχει υποομάδα της G με τάξη 45.

61. Έστω G ομάδα με τάξη 210 και K κανονική υποομάδα της G με τάξη 7.

$i)$ Δείξτε ότι $x^{30} \in K$ για κάθε $x \in G$.

$ii)$ Αν $x \in G$ με $x^7 \in K$, τότε $x \in K$.

$iii)$ Δείξτε ότι για το στοιχείο $g \in G$ ισχύει η ισοδυναμία $g \in K \iff g^{37} \in K$.

$iv)$ Αν $M \lhd G$ με $| M |= 6$, Δείξτε ότι $KM \lhd G$. Ποίος είναι ο δείκτης της KM στην G; Γιατί η G/KM είναι κυκλική?

62. $i)$ Έστω G ομάδα με $| G |= 121$. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^7 = g$ έχει λύση στην G για κάθε $g \in G$.

$ii)$ Να βρεθούν οι λύσεις των εξισώσεων $7x \equiv 28 \, mod \, 11$, $x^7 \equiv 28 \, mod \, 11$.

63. Έστω G ομάδα και a απείρου τάξεως. Υποθέτουμε ότι $< a > \lhd G$. Δείξτε ότι $g^2 \cdot a = a \cdot g^2$ για κάθε $g \in G$.
Αν υποθέσουμε ότι το a είναι πεπερασμένης τάξεως r, δείξτε ότι υπάρχει $\rho \in Z$ με $(\rho, r) = 1$ έτσι ώστε $g^\rho \cdot a = a \cdot g^\rho$ για κάθε $g \in G$.

64. Έστω η κυκλική ομάδα $G =< a >$ με τάξη 120.

$i)$ Δείξτε ότι $< a^{54} >=< a^6 >$.

$ii)$ Να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ακέραιος ν έτσι ώστε $< a^{26} >=< a^\nu >$.

65. Μια ομάδα G έχει ακριβώς τρείς υποομάδες. Δείξτε ότι η G είναι κυκλική με τάξη ίση με το τετράγωνο ενός πρώτου αριθμού.

66. Έστω G ομάδα και M κανονική υποομάδα της έτσι ώστε το πηλίκο G/M να είναι άπειρη κυκλική. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει κανονική υποομάδα N_n της G με $| G : N_n |= n$.

67. Έστω G ομάδα με την ιδιότητα: Για κάποιο $n > 1$ ισχύει $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ για όλα τα $a, b \in G$. Δείξτε ότι τα σύνολα $G^{(n)} = \{ x^n \mid x \in G \}$ και $G^{(n-1)} = \{ x^{n-1} \mid x \in G \}$ είναι κανονικές υποομάδες της G.

68. $i)$ Έστω G_n το σύνολο των μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση $\chi^\nu = 1$. Δείξτε ότι το G_n είναι κυκλική ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών. Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί ζ_n με την ιδιότητα $G_n =< \zeta_n >$.

    $ii)$ Έστω p πρώτος αριθμός και C_{p^∞} το σύνολο των μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν μία από τις εξισώσεις $x^{p^n} = 1$, $n = 1, 2, \dots$. Δείξτε ότι το C_{p^∞} είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό. Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένα γεννώμενη υποομάδα της C_{p^∞} είναι πεπερασμένη κυκλική.

69. $i)$ Έστω G πεπερασμένη ομάδα και $a \in G$, δώστε ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε η εξίσωση $x^k = a$ να έχει λύση στην G.

    $ii)$ Έστω G ομάδα με τάξη 100. Δείξτε ότι για κάθε $g \in G$ υπάρχει μοναδικό $x \in G$ τέτοιο ώστε $x^{11} = g$.

    $iii)$ Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των εξισώσεων $x^{25} = 1$ και $x^3 = 1$ στην ομάδα G, όπου G κυκλική με τάξη 100.

70. Έστω $f : G \longrightarrow G$ ενδομορφισμός ομάδων με $f^2 = f$. Δείξτε ότι:

    $i)$ Αν ο f δεν είναι ο ταυτοτικός, τότε ο f δεν είναι επί.

    $ii)$ $G = Ker\, f \cdot Im\, f$ και $ker\, f \cap Im\, f = 1$.