Βασική Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση (2023–24)

Ασκήσεις

(Παραδίδετε προαιρετικά οκτώ από τις Ασκήσεις. Προθεσμία: 23-5-2024.)

1.4. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx \mid x \in A\}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(tA) = |t|\,\lambda^*(A)$.

(β) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι

$$\lambda^*(f(A)) \leq C\lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\lambda(A') = 0$.
Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $A \subseteq [-M, M]$ για κάποιο $M > 0$.

1.5. (α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \lambda^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda^*(E \cap I) > \alpha\,\ell(I).$$

Υπόδειξη: Υποθέστε το αντίθετο και, για τυχόν $\varepsilon > 0$, θεωρήστε ακολουθία διαστημάτων I_k με $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \lambda^*(E) + \varepsilon$.

(β)Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $\delta > 0$ ώστε $\lambda(A \cap I) \geqslant \delta\,\ell(I)$ για κάθε ανοιχτό διάστημα. Δείξτε ότι $\lambda(A^c) = 0$.

1.6. Έστω $\delta > 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$, ισχύει

$$\lambda^*(E) = \inf\left\{\sum_n \ell(I_n) \mid E \subseteq \bigcup_n I_n,\ \text{και } \forall n \in \mathbb{N}\ I_n \text{ ανοικτό διάστημα με } \ell(I_n) < \delta\right\}.$$

1.13. Έστω A υπεραριθμήσιμο σύνολο και έστω $\mathcal{X}$ η οικογένεια των υποσυνόλων X του A που ικανοποιούν το εξής: είτε το X ή το $A \setminus X$ είναι αριθμήσιμο. Δείξτε ότι η $\mathcal{X}$ είναι σ-άλγεβρα.

1.21. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.
Υπόδειξη: Θεωρήστε την κλάση $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \text{ το } f^{-1}(A) \text{ είναι σύνολο Borel}\}$.

1.26. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(\limsup A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

2.3. (α) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : A \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω A, B μετρήσιμα σύνολα με $\lambda(B) = 0$ και έστω $f : A \cup B \to [-\infty, +\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(γ) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

2.4. (α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A : f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

2.7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη: Η κλάση $\{E \subseteq \mathbb{R} \mid \text{ το } f^{-1}(E) \text{ είναι μετρήσιμο}\}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοιχτά σύνολα.

2.10. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_k, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

2.11. Έστω E μη μετρήσιμο υποσύνολο του $(0,1)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\chi_E(x)$. Δείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά για κάθε $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ το σύνολο $\{x : f(x) = \alpha\}$ είναι μετρήσιμο.

Μπορείτε να βρείτε μη μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x : g(x) = \alpha\}$ να είναι μετρήσιμο;

2.15. (α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leq \alpha$ για κάθε $x \notin Z$.

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin Z$.