4/11/21 11ο μάθημα

$F(x) = P(X \leq x)$ σ.υ. $\uparrow$, δ. συνεχής $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$

X διακριτή $f(x) = P(X = x)$ σ.π. $f \geq 0$, $\sum_x f(x) = 1$

X συνεχής $f(x) = F'(x)$ πυκνότητα $f \geq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$

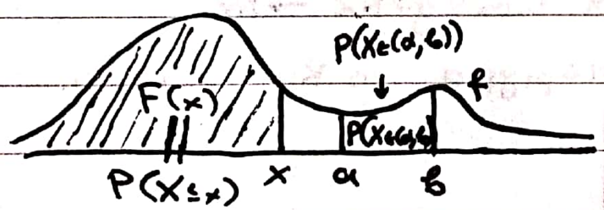
Συνεχή περίπτωση $P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$, A B

διακρ. $P(X \in A) = \sum_{x \in A} f(x)$ (1)

$A = (-\infty, x]$

$X \in A \Leftrightarrow X \in (-\infty, x] \Leftrightarrow X \leq x$

$P(X \in A) = P(X \leq x) = F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$



$P(X \in (\alpha, \beta)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$

Μας ενδιαφέρει η σ.υ. της $Y = g(X)$ όταν γνωρίζουμε την σ.υ. της X, έστω F ή, ισοδύναμα, η σ.π. ή η πυκνότητα της Y (όπου υπάρ)

$P(X=x) = \boxed{f(x)=\frac{1}{6}}$, $\underbrace{x=1,2,3,\dots,6}_{(0 \text{ αλλού})}$ $\quad \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{6} = 6\frac{1}{6} = 1$

$Y = g(X) \overset{\text{πχ}}{=} X(7-X) \qquad g(x) = x(7-x) \qquad g^{-1}(y) \overset{\text{ορ.}}{=} \{x : g(x) = y\}$

$g(1)=6,\ g(2)=10,\ g(3)=12,\ g(4)=12,\ g(5)=10,\ g(6)=6$

$Y \in \{6,10,12\} = R_Y$ διότι η $X \in \{1,2,\dots,6\} = R_X$

R_X = στήριγμα της τ.μ. X = το σύνολο που παίρνει τιμές $= \{x : f(x) > 0\}$

$g : R_X \to R_Y = \{6,10,12\}$

Υπολ. της σ.π. της Y, έστω f_Y

Για $y \in R_Y$, $f_Y(y) \overset{\text{ορ.}}{=} P(Y=y) = P(X(7-X)=y)$

$y=6 \quad P(Y=6) = P(X(7-X)=6) = P(X \in \{1,6\})$

$= P(\{X=1\} \cup \{X=6\})$

$= P(X=1) + P(X=6) = f(1) + f(6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$f_Y(6) = \frac{1}{3}$

$P(Y=10) = f_Y(10) = P(X=2) + P(X=5) = \frac{1}{3}$

$f_Y(12) = P(X=3) + P(X=4) = \frac{1}{3}$

$f_Y(y) = \frac{1}{3}$, $y \in \{6,10,12\}$

$P(g(X)=6) = P(X \in g^{-1}(6)) = \sum_{x \in g^{-1}(6)} f(x) = \sum_{x : g(x)=6} f(x)$

Αν X έχει σ.π. f και στήριγμα το R_X και $g : R_X \to R_Y$ και θέτουμε $Y = g(X)$, τότε η Y έχει στήριγμα το R_Y και σ.π.

$$\boxed{f_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} f(x) = \sum_{x : g(x)=y} f(x),\ y \in R_Y}$$

$Y = g(X)$

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$ $*$

<u>Αν $g\uparrow$ και συνεχής, $\exists$ η αντίστροφη g^{-1}</u>

$* = P(X \le g^{-1}(y)) = F(g^{-1}(y))$

$g(x) \le y \Leftrightarrow X \le g^{-1}(y)$

$F_Y(y) = F(g^{-1}(y))$

πυκν. $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F(g^{-1}(y)) = F'(g^{-1}(y))\,(g^{-1}(y))'$

$= f(g^{-1}(y))\,(g^{-1}(y))'$

είναι $\boxed{f_Y(y) = f(g^{-1}(y))\,(g^{-1}(y))'}$

<u>παράδειγμα</u>: 1) Έστω ότι η τ.μ. X έχει σ.κ. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-x^2}, & x \ge 0 \end{cases}$

Να βρεθεί η σ.κ και μετά η πυκνότητα της $Y = g(X) = \log X$.

<u>Λύση</u>

Πυκνότητα της X: $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ -e^{-x^2}(-x^2)' = 2x e^{-x^2}, & x>0 \end{cases}$

$f(x) = 2x e^{-x^2}, x<0$ (0 αλλού)

$f>0 \Leftrightarrow x>0$ $\quad R_X = \{x : f(x) > 0\} = (0, +\infty)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} 2x e^{-x^2}\,dx = -e^{-x^2}\Big|_0^{\infty} = -0 + e^0 = 1$

$R_X = (0,\infty)$ $\quad R_Y = \mathbb{R}$ $\quad \log : (0,\infty) \to (-\infty, \infty)$

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\log X \le y) = P(X \le e^y) = F(e^y)$

$F(e^y) = \begin{cases} 0, & e^y \le 0 \\ 1 - e^{-(e^y)^2}, & e^y \ge 0 \end{cases} = 1 - e^{-(e^{2y})}, \ y \in \mathbb{R}$

$f_Y(y) = (1 - e^{-e^{2y}})' = -e^{-e^{2y}}(-e^{2y})'$

$= 2e^{2y} e^{-e^{-2y}}$ $\quad y \in \mathbb{R}$

πυκν. πιθ. της Y.

ασκ. 2) Να βρεθούν η σ.κ. και η πυκνότητα της $Y = g(X) = \frac{1}{X}$ (γν. φθίνουσα)

$g : R_X = (0,\infty) \to R_Y = (0,\infty)$

Βρίσκω πρώτα την σ.κ. της Y.

Για $y>0$ έχουμε:

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\frac{1}{X} \le y) = P(X \ge \frac{1}{y}) = 1 - P(X < \frac{1}{y}) = 1 - F(\frac{1}{y}-)$

$\overset{F\ \text{συν}}{=} 1 - F(\frac{1}{y})$

$f(x) = 2x e^{-x^2}, x>0$

$y>0$: $F_Y(y) = 1 - F(\frac{1}{y})$, $y>0$

$f_Y(y) = (1 - F(\frac{1}{y}))' = -F'(\frac{1}{y}) \cdot (\frac{1}{y})' = -f(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}$

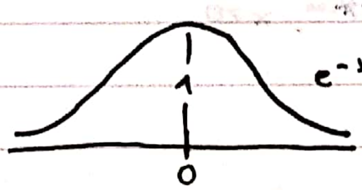
$= \frac{1}{y^2} f(\frac{1}{y}) = \frac{1}{y^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{y} \cdot e^{-(1/y)^2} = \frac{2}{y^3} e^{-1/y^2}$ $(y>0)$

Για $y \le 0$ $P(\frac{1}{X} \le y) = P(X<0) = 0$ $F_Y(y) = 0$ για $y \le 0$

$f_Y(y) = 0$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{y^3} e^{-1/y^2}, & y>0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

ασκ. 3) Έστω ότι η πυκνότητα της X είναι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in R$



$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$ Euler - Gauss

Ποια είναι η πυκνότητα της $Y = X^2$;

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \Phi(x)$

$R_X = \mathbb{R}$

$y<0$ $F_Y(y) = P(X^2 \le y) = 0$ διότι $X^2 \ge 0$

$y=0$ $F_Y(0) = P(X^2 \le 0) = P(X=0) = F(0) - F(0-)$ γιατί η X συνεχής (έχει πυκνότ.)

$\boxed{\text{Για } y \le 0,\ F_Y(y) = 0}$

Για $y>0$, $F_Y(y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$

$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a-)$

$$F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}-)$$

$$\overset{F\ \text{συν.}}{=} F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \qquad (y>0)$$

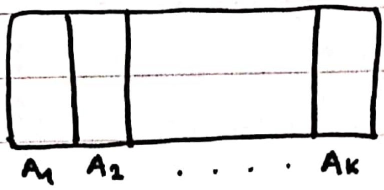
$$f_Y(y) = \left(F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})\right)' = f(\sqrt{y})(\sqrt{y})' - f(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} f(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right] = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}\right]$$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} e^{-y/2}, \ y>0}$$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\qquad P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_k) > 0$



$$\sum_{i=1}^{k} P(A_i) = 1$$

Κέρδος: $X(\omega) = \begin{cases} x_1, & \text{αν } \omega \in A_1 \\ x_2, & \text{αν } \omega \in A_2 \\ \vdots & \\ x_k, & \text{αν } \omega \in A_k \end{cases}$

$A_1 = \{1,2\} \to 1 \qquad 2/6 \qquad f(1) = \frac{1}{3}$

$A_2 = \{3,4,5\} \to 2 \qquad 3/6 \qquad f(2) = 1/2$

$A_3 = \{6\} \to 3 \qquad 1/6 \qquad f(3) = 1/6$

Κέρδος συνολικά: $V_N(A_1)x_1 + V_N(A_2)x_2 + \dots + V_N(A_k)x_k$

Μέσο κέρδος ανά παιχνίδι = συνολ/N

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot V_N(A_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{V_N(A_i)}{N}$$

$E(X)$ = ένας αριθμός που μου λέει που περίπου παίρνει τιμές η X.

$$\text{Μ. κέρδος} \overset{\text{ορ.}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{V_N(A_i)}{N} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot \lim_{N} \frac{V_N(A_i)}{N} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i P(A_i)$$

expectation

Ορισμός: (α) Αν η X διακριτή με σ.π. $f(x)$ ορίζουμε $E(x) = \sum_{x: f(x)>0} x f(x)$ εφ' όσον η σειρά συγκλίνει απολύτως. $\left[\sum_x |x| f(x) < \infty\right]$

(β) Αν η X συνεχής με πυκνότητα f, ορίζω $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ εφ' όσον $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < 0$. Η $E(x)$ όταν υπάρχει είναι αριθμός!

$f(1) = 1/3$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(3) = 1/6$

$$E(x) = \mu = \sum_{x=1}^{3} x f(x) = 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{2+6+3}{6}$$
$$= \frac{11}{6} \simeq 1{,}8$$

$f(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \dots, 6$

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{6} x \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+\dots+6) = \frac{6\cdot 7}{2\cdot 6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases} \qquad f(x) = F'(x) = 1, \ x \in (0,1)$$

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 1\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Γνωρίζω την σ.κ. της X, και θέλω να υπολογίσω την $E(Y)$, $Y = g(x)$.

(α' τρόπος) Βρίσκω πρώτα την σ.π. ή την πυκνότητα της Y, έστω $f_Y(y)$, και έπειτα υπολογίζω την $E(y) = \begin{cases} \sum_y y f_Y(y), & \text{διακριτή η } Y \\ \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy, & \text{συνεχής } Y \end{cases}$

(β' τρόπος) $E(Y) = E[g(x)] = \begin{cases} \sum_x g(x) f(x) & f \text{ η σ.π.} \\ \text{ή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx \end{cases}$

(ΤΥΠΟΣ ΑΦΗΡΗΜΕΝΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ)

$\mu = 1/2 \qquad g(x) = x^2 \qquad Y = X^2$

$E(Y) = E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dx = \frac{1}{3} \qquad E(X^2) > \mu^2 = \frac{1}{4}$

$E(c) = c$ προφανώς $X(\omega) = c$

$E(aX+c) = aE(X) + c$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ax+c) f(x) dx = a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}_{E(x)} + c \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}^{1}$$

$E[ag(X)+c] = aE[g(X)] + c$

$E[g_1(x) + g_2(x)] = E[g_1(x)] + E[g_2(x)]$

$E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$

Διασπορά τ.μ. (variance)

X ονομάζεται η ποσότητα

$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] \geq 0$ όπου $\mu = E(x)$

$E(X-\mu) = E(x) - \mu = \mu - \mu = 0$

$Y = (X-\mu)^2$ = τετρ. απόκλιση της X από το μ. $Y \geq 0$

• Παρατήρηση: Αν $X \leq Y \Rightarrow E(x) \leq E(Y)$

$g_1(x) \leq g_2(x) \Rightarrow E[g_1(x)] \leq E[g_2(x)]$

$x^2 \leq 1 + x^3$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f(x)$$