7/10/21 4ο Μάθημα

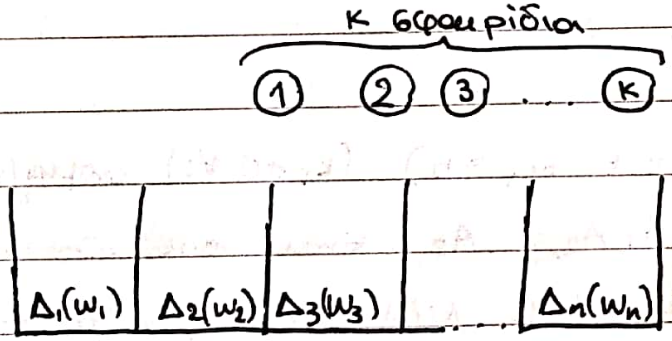
απλές διατάξεις n ανά k : $(n)_k$

επαναλ. διατάξεις -//- : n^k

απλός συνδυασμός -//- : $\binom{n}{k}$

επαναλ συνδυασμός -//- : $\left[{n \atop k}\right] = \binom{n+k-1}{k}$

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ έχει n αντικείμενα

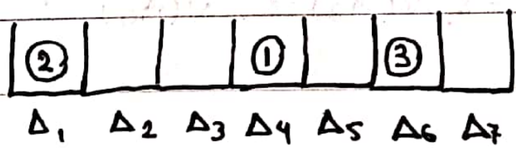


- όμοια σφαιρ. ≡ συνδυασμοί
- διαφορ. σφαιρ. ≡ διατάξεις
- μικρά δοχεία (χωρητικότ. ένα) μιλάμε για απλ.
- μεγάλα δοχ. (άπειρη χωρητ.) μιλάμε για επαν.

k n

Διακεκρ. σφαιρίδια, μικρά δοχεία

$n=7$, $k=3$



$\rightarrow (\omega_4, \omega_1, \omega_6)$

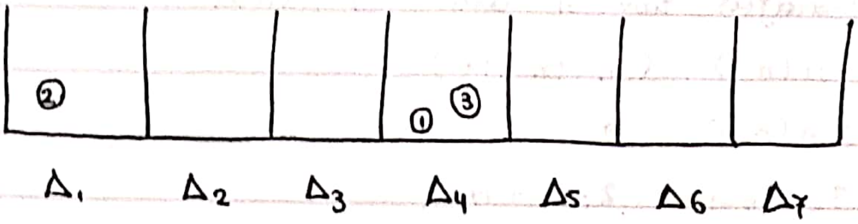
απλές διατ.: $(7)_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

απλ. συνδ.: $\frac{(7)_3}{3!} = \frac{210}{6} = 35$

$\rightarrow$ π.χ. $\{\omega_1, \omega_4, \omega_6\}$

$k=3$ διακ. σφ. ① ② ③

$n=7$
$k=3$



$n^k = 7^3 = 343$

$\longleftrightarrow (1,0,0,2,0,0,0)$

$\downarrow$

$(x_1, x_2, \dots, x_7)$ με $x_i \geq 0$ ακέραιοι και $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 3$

Ορισμός: Επαναλ. συνδ. των n ανά k ονομάζεται κάθε διατεταγμ. n-άδα $(x_1, \dots, x_n)$ όταν $x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $\boxed{x_1 + x_2 + \dots + x_n = k}$

Θεώρημα: Το πλήθος των επαναλ. συνδυασμών των n ανά k συμβολίζεται με $\left[{n \atop k}\right]$ και: $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-1}$

Στο παράδειγμά μας $n=7$, $k=3$ είναι $\left[{7 \atop 3}\right] = \binom{7+3-1}{3} = \binom{9}{3} = \frac{(9)_3}{3!} = 84$

$|\circ\circ|\ |\ |\circ|\ |\ |\ |$ $\longleftrightarrow$ $\underline{10011101111}$

$(n+1)+k = n+k+1$

ή $|\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\circ\circ\circ|$ $\longleftrightarrow$ $1\underbrace{1111111000}1$ $\qquad \binom{9}{3}$ λέξεις

Ορσ: Διαίρεση των n ανά $k_1, k_2, \dots, k_s$ (όπου $k_1 + \dots + k_s = n$) ($k_i \geq 0\ \forall i$) ονομάζεται η διατεταγμένη s-άδα $(A_1, \dots, A_s)$ όπου τα $A_1, A_2, \dots, A_s$ είναι υποσύνολα του $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ (με n στοιχεία, $N(\Omega) = n$) έτσι ώστε $N(A_1) = k_1, \dots, N(A_k) = k_s$ με την προϋπόθεση ότι $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ και $A_1 \cup \dots \cup A_s = \Omega$

π.χ. Διαίρεση των $n=5$ ανά $2,2,1$

$\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ $\quad s=3$ $\quad N(A_1)=2, N(A_2)=2, N(A_3)=1$

$A_1 = \{1,3\}$, $A_2 = \{5,4\}$, $A_3 = \{2\}$

(Θ) Σύνολο: Το πλήθος διαμερίσεων των n ανά $k_1,\dots,k_s$ (με $k_1+\dots+k_s=n$) ισούται με:

$$\boxed{\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_s} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_s!}}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k \quad n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$A \subseteq \Omega$ $\quad N(A)=k=k_1$

A' $\quad N(A')=n-k=k_2$ $\quad \Omega = A \cup A'$

$s=2$ $\quad (A,A')$

<u>Αποδ(Θ)</u> Πρώτα κατασκευάζω το A_1 με $\binom{n}{k_1}$ τρόπους. Έπειτα το A_2 με $\binom{n-k_1}{k_2}$ τρόπους. Το A_3 με $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ τρόπους ... Το A_s με $\binom{n-k_1-k_2-\dots-k_{s-1}}{k_s}$ τρόπους

$$\#\text{διαμ} = \binom{n}{k_1}\cdot\binom{n-k_1}{k_2}\cdot\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\dots-k_{s-1}}{k_s} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,\cancel{(n-k_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\,\cancel{(n-k_1-k_2)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-k_1-k_2)!}}{k_3!\,\cancel{(n-k_1-k_2-k_3)!}}\cdots\frac{\cancel{(n-k_1-\dots-k_{s-1})!}}{k_s!\,(\underbrace{n-k_1-\dots-k_s}_{=0})!}$$

και $0!=1$

Μεταθέσεις s ειδών στοιχείων όπου το πρώτο στοιχείο εμφ. k_1 φορές, το 2ο k_2 φορές, ..., το s-στο k_s φορές ($k_1+\dots+k_s=n$).

(Θ) Το πλήθος μεταθέσεων s ειδών στοιχείων όπου το i στοιχείο εμφ. k_i φορές στη μετάθεση ($i=1,2,\dots,s$) με $k_1+\dots+k_n=s$ είναι $\frac{n!}{k_1!\dots k_s!}$

<u>ΘΑΛΑΣΣΑ</u>

$A=3$ (k_1) $\quad \frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!} = 420$ $\quad A_1=\{2,4,7\}$ A

$\Sigma=2$ (k_2) $\quad A_2=\{5,6\}$ Σ

$\Theta=1$ (k_3) $\quad A_3=\{1\}$ Θ

$\Lambda=1$ (k_4) $\quad A_4=\{3\}$ Λ

Άσκηση Chevalier de Meré

Τι είναι πιο πιθανό, να φέρω τουλ. μία φορά 6 αν ρίξω 4 φορές το ζάρι, ή τουλ. μια φορά 6άρες αν ρίξω 24 φορές 2 ζάρια;

(1) Όταν ρίχνω 4 φορές ένα ζάρι

$\Omega = \{(i_1, i_2, i_3, i_4) : i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, 2, .., 6\}\}$

Επαναλ. διατ. των 6 ανά 4

$N(\Omega) = 6^4$

$P(A)$ $A = \{$να φέρω τουλ. 1 φορά 6$\}$

$A \subseteq \Omega$ $A = \{(6,6,6,6), (6,1,1,1), (6,2,5,1) \dots\}$

$N(A) = ?$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5^4}{6^4}$

$A' = \{$κανένα 6 στις 4 δοκιμές$\}$

$= \{(i_1, \dots, i_4) : i_1, \dots, i_4 \in \{1, 2, \dots, 5\}\}$

$N(A') = 5^4$ $N(A) = 6^4 - 5^4$

$P(A) = P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.518$

(2) $\Omega = \{((i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{24}, j_{24})), i_k, j_k \in \{1, 2, \dots, 6\}, k = 1, 2, \dots, 24\}$

$N(\Omega) = 6^{48} = 36^{24}$

$A' = \{$να μην φέρω $(6,6)$ στις 24 δοκιμές$\}$

$= \{((i_1, j_1), \dots, (i_{24}, j_{24})) : (i_k, j_k) \neq (6,6), k = 1, 2, \dots, 24$

$P(A') = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$

$P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.491$