Αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων και βασικοί υπολογισμοί Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

25 Μαρτίου 2010

***Άσκηση* 1 (Ross, Exer. 2.Theor6):** Έστω E, F και G τρία ενδεχόμενα σε πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο S. Να εκφράσετε τα παρακάτω ενδεχόμενα με βάση τα E, F, G και S, χρησιμοποιώντας συνολοθεωρητικές πράξεις (ένωση, τομή, συμπλήρωμα):

1. να συμβεί μόνο το E,
2. να συμβούν τα E και G αλλά όχι το F,
3. να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα E, F και G,
4. να συμβούν τουλάχιστον δυο από τα E, F και G,
5. να συμβούν και τα τρία από τα E, F και G,
6. να μην συμβεί ούτε το E, ούτε το F ούτε το G,
7. να συμβεί το πολύ ένα από τα E, F και G,
8. να συμβούν το πολύ δυο από τα E, F και G,
9. να συμβούν ακριβώς δυο από τα E, F και G,
10. να συμβούν το πολύ τρία από τα E, F και G.

***Άσκηση* 2 (Ross, Exer. 2.Theor7):** Να ανάγετε τα ακόλουθα ενδεχόμενα σε πιο απλή μορφή:

1. $(E \cup F)(E \cup F^c)$,
2. $(E \cup F)(E^c \cup F)(E \cup F^c)$,
3. $(E \cup F)(F \cup G)$.

***Άσκηση* 3 (Ross, Exer. 2.Theor11,Theor16):** Αν $P(E) = 0.9$ και $P(F) = 0.8$, αποδείξτε ότι $P(EF) \geq 0.7$. Γενικά για δυο ενδεχόμενα E και F αποδείξτε ότι $P(EF) \geq P(E)+P(F)-1$. Γενικεύστε και αποδείξτε την ανισότητα Bonferroni που ισχυρίζεται ότι για οποιαδήποτε n ενδεχόμενα $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ισχύει

$$P(E_1E_2 \cdots E_n) \geq P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) - (n-1).$$

***Άσκηση* 4 (Ross, Exer. 2.11):** Το 28% των αμερικάνων καπνίζει τσιγάρο, το 7% καπνίζει πούρο και το 5% καπνίζει και τσιγάρο και πούρο.

1. Ποιο ποσοστό των αμερικάνων δεν καπνίζει τσιγάρο ούτε πούρο;
2. Ποιο ποσοστό των αμερικάνων καπνίζει πούρο αλλά όχι τσιγάρο;

***Άσκηση* 5 (Ross, Exer. 2.19):** Δυο συμμετρικά ζάρια (δηλαδή κανονικά εξάεδρα που εμφανίζουν ισοπίθανα κάθε έδρα τους σε κάθε ρίψη) έχουν δυο κόκκινες έδρες, δυο μαύρες έδρες, μια κίτρινη έδρα και μια λευκή έδρα. Τα δυο ζάρια ρίπτονται ταυτόχρονα. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουν και τα δυο το ίδιο χρώμα;

***Άσκηση* 6 (Ross, Exer. 2.21):** Μια γειτονιά έχει 20 οικογένειες, από τις οποίες οι 4 έχουν από ένα παιδί, οι 8 έχουν από δυο παιδιά, οι 5 έχουν από τρία παιδιά, 2 έχουν από τέσσερα παιδιά και 1 έχει πέντε παιδιά.

1. Επιλέγουμε στην τύχη μια οικογένεια. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει i παιδιά, $i = 1, 2, 3, 4, 5$;
2. Επιλέγουμε στην τύχη ένα παιδί. Ποιά είναι η πιθανότητα η οικογένειά του να έχει i παιδιά, $i = 1, 2, 3, 4, 5$;

Είναι συμβατά τα δυο αποτελέσματα; Συμφωνούν με τη διαίσθησή σας;

***Άσκηση* 7 (Ross, Exer. 2.24):** Δυο συνηθισμένα ζάρια ρίπτονται ταυτόχρονα μια φορά.

1. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι i, $i = 2, 3, \ldots, 12$;
2. Ποια είναι η πιθανότητα η απόλυτη διαφορά των ζαριών να είναι i, $i = 0, 1, 2, \ldots, 5$;
3. Ποια είναι η πιθανότητα η μικρότερη ζαριά να είναι i, $i = 1, 2, \ldots, 6$;

***Άσκηση* 8 (Tijms, Prob. 7.8):** Ένα βέλος ρίχνεται εντελώς τυχαία στο εσωτερικού ορθογώνιου στόχου (τυχαία επιλογή σημείου στο εσωτερικό ορθογώνιου παραλληλογράμμου). Το ορθογώνιο έχει διαστάσεις $20cm \times 50cm$. Ποια είναι η πιθανότητα το βέλος να πέσει σε απόσταση το πολύ $5cm$ από κάποια κορυφή του ορθογωνίου;

***Άσκηση* 9 (Tijms, Prob. 7.12):** Σε ένα τουρνουά τένις μεταξύ των παικτών A, B και C, κάθε παίκτης παίζει μια φορά με καθέναν από τους άλλους δυο παίκτες (συνολικά γίνονται 3 αγώνες). Οι δυνάμεις των παικτών δίνονται ως εξής: $P(\text{ο } A \text{ να νικήσει τον } B) = 0.5$, $P(\text{ο } A \text{ να νικήσει τον } C) = 0.7$ και $P(\text{ο } B \text{ να νικήσει τον } C) = 0.4$. Υποθέτοντας ανεξαρτησία στα αποτελέσματα των αγώνων, να υπολογίσετε την πιθανότητα ο A να τερματίσει πρώτος ή μεταξύ των πρώτων (δηλαδή να σημειώσει τουλάχιστον τόσες νίκες όσες οποιοσδήποτε άλλος παίκτης).

***Άσκηση* 10 (Tijms, Prob. 7.19):** Ένας ακέραιος επιλέγεται τυχαία από τους $1, 2, \ldots, 1000$. Ποιά η πιθανότητα να διαιρείται με το 3 ή το 5; Ποιά η πιθανότητα να διαιρείται με τουλάχιστον έναν από τους 3, 5, 7;

Απαντήσεις

Άσκηση 1 (Ross, Exer. 2.Theor6): Είναι:

1. EF^cG^c,
2. EF^cG,
3. $E \cup F \cup G$,
4. $EF \cup EG \cup FG$,
5. EFG,
6. $E^cF^cG^c$,
7. $E^cF^cG^c \cup EF^cG^c \cup E^cFG^c \cup E^cF^cG$,
8. $(EFG)^c$,
9. $EFG^c \cup EF^cG \cup E^cFG$,
10. S.

Άσκηση 2 (Ross, Exer. 2.Theor7): Είναι:

1. E,
2. EF,
3. $EG \cup F$.

Άσκηση 3 (Ross, Exer. 2.Theor11,Theor16): Εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού για δυο ενδεχόμενα $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$ και χρησιμοποιούμε ότι $P(E \cup F) \leq 1$. Για τη γενίκευση χρησιμοποιούμε επαγωγή.

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 2.11): Έστω A το ενδεχόμενο ότι ένα τυχαία επιλεχθέν άτομο είναι καπνιστής τσιγάρου και B το ενδεχόμενο ότι είναι καπνιστής πούρου. Τότε έχουμε:

1. $1 - P(A \cup B) = 1 - (0.07 + 0.28 - 0.05) = 0.7$. Επομένως, το 70% δεν καπνίζει ούτε τσιγάρο ούτε πούρο.
2. $P(A^cB) = P(B) - P(AB) = 0.07 - 0.05 = 0.02$. Επομένως, το 2% καπνίζει πούρο αλλά όχι τσιγάρο.

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 2.19): Η πιθανότητα είναι $\frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$.

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 2.21): Είναι:

1. $p_1 = \frac{4}{20}$, $p_2 = \frac{8}{20}$, $p_3 = \frac{5}{20}$, $p_4 = \frac{2}{20}$, $p_5 = \frac{1}{20}$.
2. $q_1 = \frac{4}{48}$, $q_2 = \frac{16}{48}$, $q_3 = \frac{15}{48}$, $q_4 = \frac{8}{48}$, $q_5 = \frac{5}{48}$.

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 2.24): 1. Η πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι i είναι:

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
πιθανότητα άθροισμα i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. Η πιθανότητα η απόλυτη διαφορά των ζαριών να είναι i είναι:

i	0	1	2	3	4	5
πιθανότητα απόλυτη διαφορά i	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

3. Η πιθανότητα η μικρότερη ζαριά να είναι i είναι:

i	1	2	3	4	5	6
πιθανότητα μικρότερη ζαριά i	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Άσκηση 8 (Tijms, Prob. 7.8): Η πιθανότητα είναι $\frac{25\pi}{20\times 50}$.

Άσκηση 9 (Tijms, Prob. 7.12): Παίρνουμε για δειγματικό χώρο $S = \{(i,j,k) : i,j,k = 0,1\}$, όπου $i = 1$ (αντίστοιχα $i = 0$) αν ο παίκτης A κερδίζει τον (αντίστοιχα χάνει από τον) B, $j = 1$ (αντίστοιχα $j = 0$) αν ο παίκτης A κερδίζει τον (αντίστοιχα χάνει από τον) C και $k = 1$ (αντίστοιχα $k = 0$) αν ο παίκτης B κερδίζει τον (αντίστοιχα χάνει από τον) C. Οι πιθανότητες $p_{i,j,k}$ των δειγματικών σημείων μπορούν εύκολα να βρεθούν για τα 8 δειγματικά σημεία. Είναι $p_{0,0,0} = 0.5 \times 0.3 \times 0.6 = 0.09$, $p_{1,0,0} = 0.5 \times 0.3 \times 0.6 = 0.09$, $p_{0,1,0} = 0.5 \times 0.7 \times 0.6 = 0.21$, $p_{0,0,1} = 0.5 \times 0.3 \times 0.4 = 0.06$, $p_{1,1,0} = 0.5 \times 0.7 \times 0.6 = 0.21$, $p_{1,0,1} = 0.5 \times 0.3 \times 0.4 = 0.06$, $p_{0,1,1} = 0.5 \times 0.7 \times 0.4 = 0.14$ και $p_{1,1,1} = 0.5 \times 0.7 \times 0.4 = 0.14$. Έστω E το ενδεχόμενο ο παίκτης A να είναι πρώτος ή μεταξύ των πρώτων, δηλαδή να κερδίσει τουλάχιστον τόσα παιχνίδια όσο οποιοσδήποτε άλλος παίκτης. Τότε έχουμε ότι $E = \{(0,1,0),(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(E) = 0.21 + 0.21 + 0.06 + 0.14 = 0.62$.

Άσκηση 10 (Tijms, Prob. 7.19): Έστω $A = \{3,6,9,12,\ldots,999\}$, $B = \{5,10,15,20,\ldots,1000\}$ και $C = \{7,14,21,28,\ldots,994\}$, τα υποσύνολα των πολλαπλασίων του 3, του 5 και του 7 αντίστοιχα του συνόλου $\{1,2,3,\ldots,1000\}$. Η πρώτη πιθανότητα είναι $P(A\cup B) = \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} = 0.467$. Η δεύτερη πιθανότητα είναι $P(A\cup B\cup C) = \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} + \frac{142}{1000} - \frac{66}{1000} - \frac{47}{1000} - \frac{28}{1000} + \frac{9}{1000} = 0.543$.

Πηγές

1. Ross, S. (2002) *A First Course in Probability, 6th Edition.* Prentice-Hall.
2. Tijms, H. (2007) *Understanding Probability: Chance Rules in Everyday Life.* Cambridge University Press.

Στοιχεία συνδυαστικής για υπολογισμούς πιθανοτήτων
Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

27 Μαρτίου 2010

***Άσκηση* 1 (Ross, Exer. 2.16):** Το πόκερ με ζάρια παίζεται ρίχνοντας ταυτόχρονα 5 ζάρια. Βρείτε τις πιθανότητες:

1. P(όλες οι ρίψεις διαφορετικές),
2. P(υπάρχει ένα ζευγάρι ίδιων ρίψεων και τρεις διαφορετικές ρίψεις),
3. P(υπάρχουν δυο ζευγάρια ίδιων ρίψεων και μια διαφορετική),
4. P(υπάρχει μια τριάδα ίδιων ρίψεων και δυο διαφορετικές),
5. P(υπάρχει μια τριάδα ίδιων ρίψεων και ένα ζευγάρι ίδιων ρίψεων (φουλ)),
6. P(υπάρχει μια τετράδα ίδιων ρίψεων και μια διαφορετική (καρέ)),
7. P(όλες οι ρίψεις όμοιες).

***Άσκηση* 2 (Ross, Exer. 2.28):** Μια κάλπη περιέχει 5 κόκκινα, 6 μπλε και 8 πράσινα σφαιρίδια. Αν επιλεγούν τυχαία 3 σφαιρίδια, υπολογίστε τις παρακάτω πιθανότητες:

1. P(όλα τα σφαιρίδια είναι του ίδιου χρώματος), αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται δεν μπαίνει ξανά στην κάλπη (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση),
2. P(όλα τα σφαιρίδια είναι διαφορετικών χρωμάτων), αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται δεν μπαίνει ξανά στην κάλπη (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση),
3. P(όλα τα σφαιρίδια είναι του ίδιου χρώματος), αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται ξαναμπαίνει στην κάλπη πριν επιλεγεί το επόμενο (δειγματοληψία με επανάθεση),
4. P(όλα τα σφαιρίδια είναι διαφορετικών χρωμάτων), αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται ξαναμπαίνει στην κάλπη πριν επιλεγεί το επόμενο (δειγματοληψία με επανάθεση).

***Άσκηση* 3 (Ross, Exer. 2.32):** Τα άτομα μιας ομάδας που αποτελείται από b αγόρια και g κορίτσια παρατάσσονται στην τύχη σε μια γραμμή (δηλαδή οποιαδήποτε μετάθεση τους είναι εξίσου πιθανή). Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

1. P(το άτομο στην i-οστη θέση να είναι κορίτσι), $1 \leq i \leq b+g$,
2. P(δεν υπάρχουν στη γραμμή διαδοχικά κορίτσια).

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 2.35): 30 ψυχίατροι και 24 ψυχολόγοι λαμβάνουν μέρος σε ένα συνέδριο. Από αυτά τα 54 άτομα επιλέγονται 3 στην τύχη για να πάρουν μέρος σε μια συζήτηση στρογγυλής τραπέζης σχετικά με το θέμα του συνεδρίου. Ποια είναι η πιθανότητα ότι επιλέχθηκε τουλάχιστον ένας ψυχολόγος;

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 2.38): Σε ένα συρτάρι υπάρχουν n κάλτσες, εκ των οποίων ακριβώς 3 είναι κόκκινες. Ποιά είναι η τιμή του n, αν γνωρίζουμε ότι όταν επιλεγούν 2, η πιθανότητα να είναι και οι 2 κόκκινες είναι $\frac{1}{2}$;

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 2.43a): Μεταξύ N ανθρώπων περιλαμβάνονται και τα άτομα A και B. Αν μπουν τα N άτομα κατά τύχη σε σειρά (δηλαδή όλες οι $N!$ μεταθέσεις τους είναι ισοπίθανες), ποια είναι η πιθανότητα οι A, B να βρεθούν δίπλα ο ένας στον άλλο;

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 2.44): Τα άτομα A, B, C, D και E μπαίνουν στην τύχη σε μια γραμμή (δηλαδή οποιαδήποτε από τις 5! μεταθέσεις τους είναι εξίσου πιθανή). Να βρεθούν οι πιθανότητες:

1. P(να υπάρχει ακριβώς ένα άτομο μεταξύ των A και B),
2. P(να υπάρχουν ακριβώς δυο άτομα μεταξύ των A και B),
3. P(να υπάρχουν ακριβώς τρία άτομα μεταξύ των A και B).

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 2.53): Θεωρούμε 4 παντρεμένα ζευγάρια. Αν τα 8 αυτά άτομα παραταχθούν τυχαία σε σειρά (δηλαδή οποιαδήποτε από τις 8! μεταθέσεις τους είναι εξίσου πιθανή) να βρεθεί η πιθανότητα όπως κανένας άντρας να μη βρίσκεται δίπλα στη γυναίκα του.

Άσκηση 9 (Tijms, Example 7.13): Θεωρούμε 15 οικογένειες που συμμετέχουν σε μια εκδρομή και πρόκειται να διαλέξουν ένα από τέσσερα προτεινόμενα ξενοδοχεία για να διανυκτερεύσουν. Κάθε ξενοδοχείο έχει αρκετό χώρο ώστε να φιλοξενήσει και τις 15 αν χρειαστεί. Κάθε οικογένεια διαλέγει ξενοδοχείο εντελώς τυχαία (με πιθανότητα 1/4 το καθένα) και ανεξάρτητα από τις άλλες οικογένειες. Ποια είναι η πιθανότητα να μη χρησιμοποιηθούν και τα 4 ξενοδοχεία (δηλαδή να υπάρχει τουλάχιστον ένα ξενοδοχείο που δεν το επέλεξε καμιά οικογένεια);

Άσκηση 10 (Tijms, Prob. 7.21): Από μια συνηθισμένη τράπουλα με 52 φύλλα που χωρίζονται σε 4 'χρώματα' ($\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ και $\spadesuit$) από 13 φύλλα το καθένα $(A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K)$ επιλέγονται τυχαία 13 φύλλα (χέρι μπριτζ). Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα 'χρώμα' που δεν εμφανίζεται καθόλου.

Απαντήσεις

Άσκηση 1 (Ross, Exer. 2.16): Είναι:

1. $P(\text{όλες οι ρίψεις διαφορετικές}) = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6^5} = \frac{\binom{6}{5}\frac{5!}{1!1!1!1!1!}}{6^5} = 0.0926$,
2. $P(\text{υπάρχει ένα ζευγάρι ίδιων ρίψεων και τρεις διαφορετικές}) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{3}\frac{5!}{2!1!1!1!}}{6^5} = 0.4630$,
3. $P(\text{υπάρχουν δυο ζευγάρια ίδιων ρίψεων και μια διαφορετική}) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}\frac{5!}{2!2!1!}}{6^5} = 0.2315$,
4. $P(\text{υπάρχει μια τριάδα ίδιων ρίψεων και δυο διαφορετικές}) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}\frac{5!}{3!1!1!}}{6^5} = 0.1543$,
5. $P(\text{υπάρχει μια τριάδα ίδιων ρίψεων και ένα ζευγάρι ίδιων ρίψεων (φουλ)}) = \frac{6\cdot5\cdot\binom{5}{3}}{6^5} = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}\frac{5!}{3!2!}}{6^5} = 0.0386$,
6. $P(\text{υπάρχει μια τετράδα ίδιων ρίψεων και μια διαφορετική (καρέ)}) = \frac{6\cdot5\cdot\binom{5}{4}}{6^5} = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}\frac{5!}{4!1!}}{6^5} = 0.0193$,
7. $P(\text{όλες οι ρίψεις όμοιες}) = \frac{6}{6^5} = \frac{\binom{6}{1}\frac{5!}{5!}}{6^5} = 0.0008$.

Άσκηση 2 (Ross, Exer. 2.28): Είναι:

1. $P(\text{όλα τα σφαιρίδια είναι του ίδιου χρώματος}) = \frac{\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{8}{3}}{\binom{19}{3}}$, αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται δεν μπαίνει ξανά στην κάλπη (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση),
2. $P(\text{όλα τα σφαιρίδια είναι διαφορετικών χρωμάτων}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{8}{1}}{\binom{19}{3}}$, αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται δεν μπαίνει ξανά στην κάλπη (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση),
3. $P(\text{όλα τα σφαιρίδια είναι του ίδιου χρώματος}) = \frac{5^3+6^3+8^3}{19^3}$, αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται ξαναμπαίνει στην κάλπη πριν επιλεγεί το επόμενο (δειγματοληψία με επανάθεση),
4. $P(\text{όλα τα σφαιρίδια είναι διαφορετικών χρωμάτων}) = \frac{3!\cdot5\cdot6\cdot8}{19^3}$, αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται ξαναμπαίνει στην κάλπη πριν επιλεγεί το επόμενο (δειγματοληψία με επανάθεση).

Άσκηση 3 (Ross, Exer. 2.32): Είναι:

1. $P(\text{το άτομο στην } i\text{-οστη θέση να είναι κορίτσι}) = \frac{g(b+g-1)!}{(b+g)!} = \frac{g}{b+g}$, $1 \le i \le b+g$,
2. $P(\text{δεν υπάρχουν στη γραμμή διαδοχικά κορίτσια}) = \frac{b!\binom{b+1}{g}g!}{(b+g)!}$, $1 \le g \le b+1$. Αν $g > b+1$ η πιθανότητα είναι προφανώς 0, αφού είναι αδύνατον να μην υπάρχουν διαδοχικά κορίτσια.

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 2.35): Η πιθανότητα ότι επιλέχθηκε τουλάχιστον ένας ψυχολόγος είναι

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\binom{24}{k}\binom{30}{3-k}}{\binom{54}{3}} = 1 - \frac{\binom{30}{3}}{\binom{54}{3}} \simeq 0.8363.$$

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 2.38): Έχουμε την εξίσωση

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{n-3}{0}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n(n-1) = 12 \Leftrightarrow n = 4.$$

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 2.43a): Η πιθανότητα να βρεθούν οι A και B δίπλα ο ένας στον άλλο είναι

$$\frac{2(N-1)!}{N!} = \frac{2}{N}.$$

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 2.44): Έχουμε

1. $P($να υπάρχει ακριβώς ένα άτομο μεταξύ των A και $B) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}$,
2. $P($να υπάρχουν ακριβώς δυο άτομα μεταξύ των A και $B) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{5}$,
3. $P($να υπάρχουν ακριβώς τρία άτομα μεταξύ των A και $B) = \frac{2 \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$.

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 2.53): Ορίζουμε το ενδεχόμενο A_i όπως τα άτομα του i ζευγαριού να κάθονται δίπλα-δίπλα, $i = 1, 2, 3, 4$. Εφαρμόζουμε αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A_1^c A_2^c A_3^c A_4^c) = 1 - 4\frac{2 \cdot 7!}{8!} + 6\frac{2^2 \cdot 6!}{8!} - 4\frac{2^3 \cdot 5!}{8!} + \frac{2^4 \cdot 4!}{8!}.$$

Άσκηση 9 (Tijms, Example 7.13): Ορίζουμε το ενδεχόμενο A_i όπως το ξενοδοχείο i να μην επιλεγεί από καμιά οικογένεια, $i = 1, 2, 3, 4$. Εφαρμόζουμε αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k+1} \binom{4}{k} \frac{(4-k)^{15}}{4^{15}} = 0.0533.$$

Άσκηση 10 (Tijms, Prob. 7.21): Ορίζουμε τα ενδεχόμενα $A_\clubsuit$, $A_\diamondsuit$, $A_\heartsuit$, $A_\spadesuit$ να μην εμφανίζονται τα 'χρώματα' $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ και $\spadesuit$ αντίστοιχα. Εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A_\clubsuit \cup A_\diamondsuit \cup A_\heartsuit \cup A_\spadesuit) = 4\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} - 6\frac{\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}} + 4\frac{\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}} = 0.051.$$

Πηγές

1. Ross, S. (2002) *A First Course in Probability, 6th Edition.* Prentice-Hall.
2. Tijms, H. (2007) *Understanding Probability: Chance Rules in Everyday Life.* Cambridge University Press.

Δεσμευμένη πιθανότητα και ανεξαρτησία
Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

29 Μαρτίου 2010

***Άσκηση* 1 (Ross, Exer. 3.9):** Θεωρούμε 3 κάλπες. Η κάλπη A περιέχει 2 λευκά και 4 κόκκινα σφαιρίδια, η κάλπη B περιέχει 8 λευκά και 4 κόκκινα σφαιρίδια και η κάλπη C περιέχει 1 λευκό και 3 κόκκινα σφαιρίδια. Επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο από κάθε κάλπη. Ποια είναι η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε από την κάλπη A να είναι λευκό, δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι ακριβώς δυο από τα τρία επιλεχθέντα σφαιρίδια ήταν λευκά.

***Άσκηση* 2 (Ross, Exer. 3.13):** Σε μια γειτονιά, το 36% των οικογενειών έχουν σκύλο και το 22% των οικογενειών που έχουν σκύλο έχει επιπλέον και γάτα. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το 30% των οικογενειών της γειτονιάς έχει γάτα.

1. Ποιά είναι η πιθανότητα μια οικογένεια της γειτονιάς να έχει και σκύλο και γάτα;
2. Ποιά είναι η δεσμευμένη πιθανότητα μια οικογένεια της γειτονιάς να έχει σκύλο δεδομένου ότι έχει γάτα;

***Άσκηση* 3 (Ross, Exer. 3.21):** Θεωρούμε δυο κάλπες Ι και ΙΙ. Η κάλπη Ι περιέχει 2 λευκά και 4 κόκκινα σφαιρίδια, ενώ η κάλπη ΙΙ περιέχει 1 λευκό και 1 κόκκινο σφαιρίδιο. Επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα σφαιρίδια της κάλπης Ι και το τοποθετούμε στην κάλπη ΙΙ. Κατόπιν επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα σφαιρίδια της κάλπης ΙΙ.

1. Ποια είναι η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε από την κάλπη ΙΙ να είναι λευκό;
2. Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα το σφαιρίδιο που μεταφέρθηκε από την κάλπη Ι στην κάλπη ΙΙ να ήταν λευκό, δεδομένου ότι από την κάλπη ΙΙ επιλέχθηκε λευκό σφαιρίδιο;

***Άσκηση* 4 (Ross, Exer. 3.29):** Η αγγλική και η αμερικάνικη ορθογραφία της λέξης 'ρίγκορ' (αυστηρότητα) είναι 'rigour' και 'rigor' αντίστοιχα. Σε ένα ξενοδοχείο μένουν 40 άγγλοι και 60 αμερικάνοι. Από αυτούς επιλέγεται τυχαία ένας και του ζητείται να γράψει τη λέξη 'ρίγκορ'. Κατόπιν από τα γράμματα της λέξης που γράφει επιλέγεται ένα στην τύχη. Ποιά είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ο άνθρωπος που επιλέχθηκε να είναι άγγλος, δεδομένου ότι το γράμμα που επιλέχθηκε στην τύχη ήταν φωνήεν;

***Άσκηση* 5 (Ross, Exer. 3.34):** Θεωρούμε 2 κάλπες A και B. Η κάλπη A έχει 5 λευκά και 7 μαύρα σφαιρίδια, ενώ η κάλπη B έχει 3 λευκά και 12 μαύρα σφαιρίδια. Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα. Αν το αποτέλεσμα είναι κορώνα τότε επιλέγεται ένα σφαιρίδιο από την κάλπη A ενώ αν είναι γράμματα τότε επιλέγεται ένα σφαιρίδιο από την κάλπη B. Ποιά η δεσμευμένη πιθανότητα το νόμισμα να έφερε γράμματα, δεδομένου ότι το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε είναι λευκό;

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 3.73): Οι παίκτες A και B παίζουν μια σειρά παιχνιδιών. Σε κάθε παιχνίδι, η πιθανότητα να κερδίσει ο A είναι p και η πιθανότητα να κερδίσει ο B είναι $1-p$. Το παιχνίδι σταματά την πρώτη φορά που κάποιος από τους δυο παίκτες έχει πάρει προβάδισμα 2 νικών και ο παίκτης αυτός ανακηρύσσεται νικητής του αγώνα.

1. Βρείτε την πιθανότητα ο αγώνας να διαρκέσει 4 παιχνίδια.

2. Βρείτε την πιθανότητα ο A να είναι ο νικητής του αγώνα.

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 3.81): Έστω το σύνολο $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Επιλέγουμε εντελώς τυχαία και ανεξάρτητα δυο υποσύνολα A και B του S (δηλαδή όλα τα 2^n υποσύνολα του S, συμπεριλαμβανομένου του $\emptyset$ και του S είναι εξίσου πιθανά).

1. Βρείτε την πιθανότητα $P(A \subseteq B)$.

2. Βρείτε την πιθανότητα $P(AB = \emptyset)$.

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 3.Theor15): Θεωρούμε ένα επαναλαμβανόμενο πείραμα τύχης το οποίο σε κάθε επανάληψή του έχει πιθανότητα επιτυχίας p και πιθανότητα αποτυχίας $1-p$ (ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli). Έστω P_n η πιθανότητα σε n επαναλήψεις του πειράματος να έχει σημειωθεί άρτιος αριθμός επιτυχιών (δηλαδή $0, 2, 4, \ldots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ επιτυχίες). Αποδείξτε ότι

1. $P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1-p)P_{n-1}, \quad n \geq 1,$

2. $P_n = \frac{1+(1-2p)^n}{2}$.

Άσκηση 9 (Tijms, Prob. 8.2): Ένα δίκαιο νόμισμα ρίπτεται 3 φορές. Γνωρίζουμε ότι μια τουλάχιστον από τις ρίψεις ήταν κορώνα. Ποια είναι τότε η πιθανότητα τουλάχιστον μια απο τις άλλες ρίψεις να ήταν επίσης κορώνα;

Άσκηση 10 (Tijms, Prob. 8.14): Οι εμπειρογνώμονες πιστεύουν ότι ένα ναυάγιο βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη θαλάσσια περιοχή με πιθανότητα $p = 0.4$. Αν το ναυάγιο βρίσκεται στη συγκεκριμένη περιοχή, τότε η αναζήτηση στην περιοχή θα το εντοπίσει με πιθανότητα $d = 0.9$. Ποια είναι η πιθανότητα το ναυάγιο να βρίσκεται στη συγκεκριμένη περιοχή αν μετά την αναζήτηση το ναυάγιο δεν εντοπίστηκε στην περιοχή αυτή;

Απαντήσεις

Άσκηση 1 (Ross, Exer. 3.9): Έστω τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned}
W_A &= \text{το σφαιρίδιο που επιλέγεται από την κάλπη } A \text{ να είναι λευκό,}\\
W_B &= \text{το σφαιρίδιο που επιλέγεται από την κάλπη } B \text{ να είναι λευκό,}\\
W_C &= \text{το σφαιρίδιο που επιλέγεται από την κάλπη } C \text{ να είναι λευκό,}\\
W_2 &= \text{2 από τα επιλεχθέντα σφαιρίδια να είναι λευκά.}
\end{aligned}$$

Ζητάμε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(W_A|W_2)$. Παρατηρούμε ότι $W_2 = W_AW_BW_C^c \cup W_AW_B^cW_C \cup W_A^cW_BW_C$ και έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
P(W_A|W_2) &= \frac{P(W_AW_2)}{P(W_2)}\\
&= \frac{P(W_AW_BW_C^c) + P(W_AW_B^cW_C)}{P(W_AW_BW_C^c) + P(W_AW_B^cW_C) + P(W_A^cW_BW_C)}\\
&= \frac{\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{4}}\\
&= \frac{7}{11}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 2 (Ross, Exer. 3.13): Επιλέγουμε μια οικογένεια της γειτονιάς. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned}
D &= \text{η οικογένεια έχει σκύλο,}\\
C &= \text{η οικογένεια έχει γάτα.}
\end{aligned}$$

Από τα δεδομένα του προβήματος έχουμε $P(D) = 0.36$, $P(C|D) = 0.22$ και $P(C) = 0.30$. Η πιθανότητα η επιλεχθείσα οικογένεια να έχει σκύλο και γάτα είναι

$$P(DC) = P(D)P(C|D) = 0.36 \cdot 0.22 = 0.0792.$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα να έχει σκύλο δεδομένου ότι έχει γάτα είναι

$$P(D|C) = \frac{P(DC)}{P(C)} = \frac{P(D)P(C|D)}{P(C)} = \frac{0.36 \cdot 0.22}{0.30} = \frac{0.0792}{0.30} = 0.264.$$

Άσκηση 3 (Ross, Exer. 3.21): Έστω τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned}
I_W &= \text{επιλέγεται λευκό σφαιρίδιο από την κάλπη I και μεταφέρεται στην κάλπη II,}\\
II_W &= \text{επιλέγεται λευκό σφαιρίδιο από την κάλπη II.}
\end{aligned}$$

Η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε από την κάλπη II να είναι λευκό είναι

$$P(II_W) = P(I_W)P(II_W|I_W) + P(I_W^c)P(II_W|I_W^c) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα το σφαιρίδιο που μεταφέρθηκε από την κάλπη I στην κάλπη II να ήταν λευκό, δεδομένου ότι από την κάλπη II επιλέχθηκε λευκό σφαιρίδιο είναι

$$P(I_W|II_W) = \frac{P(I_WII_W)}{P(II_W)} = \frac{P(I_W)P(II_W|I_W)}{P(II_W)} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}.$$

***Άσκηση* 4 (Ross, Exer. 3.29):** Έστω τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} E &= \text{ο άνθρωπος που επιλέχθηκε να είναι άγγλος,} \\ A &= \text{ο άνθρωπος που επιλέχθηκε να είναι αμερικάνος,} \\ V &= \text{το γράμμα που επιλέχθηκε να είναι φωνήεν.} \end{aligned}$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε $P(E) = 0.4$, $P(A) = 0.6$, $P(V|E) = 3/6 = 0.5$ και $P(V|A) = 2/5 = 0.4$. Η δεσμευμένη πιθανότητα ο άνθρωπος που επιλέχθηκε να είναι άγγλος, δεδομένου ότι το γράμμα που επιλέχθηκε ήταν φωνήεν είναι

$$P(E|V) = \frac{P(EV)}{P(V)} = \frac{P(E)P(V|E)}{P(E)P(V|E) + P(A)P(V|A)} = \frac{0.4 \cdot 0.5}{0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.4} = \frac{5}{11}.$$

***Άσκηση* 5 (Ross, Exer. 3.34):** Έστω τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} T &= \text{το νόμισμα έφερε γράμματα,} \\ H &= \text{το νόμισμα έφερε κορώνα,} \\ W &= \text{το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε είναι λευκό.} \end{aligned}$$

Τότε η δεσμευμένη πιθανότητα το νόμισμα να έφερε γράμματα, δεδομένου ότι το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε είναι λευκό είναι

$$P(T|W) = \frac{P(TW)}{P(W)} = \frac{P(T)P(W|T)}{P(T)P(W|T) + P(H)P(W|H)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{15}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{12}{37}.$$

***Άσκηση* 6 (Ross, Exer. 3.73):** Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι

$$\{AA, BB, ABAA, ABBB, BAAA, BABB, \ldots\},$$

όπου κάθε σημείο του δειγματικού χώρου παριστάνεται με μια λεξη αποτελούμενη από A και B, που δείχνει τη διαδοχή νικητών στα παιχνίδια μέχρι να τελειώσει ο αγώνας. Το ενδεχόμενο ο αγώνας να διαρκέσει 4 παιχίδια είναι το $\{ABAA, ABBB, BAAA, BABB\}$. Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι τότε $2p^3(1-p) + 2p(1-p)^3 = 2p(1-p)(p^2 + (1-p)^2)$. Για να βρούμε την πιθανότητα να είναι ο A ο νικητής του αγώνα, δεσμεύουμε στο αποτέλεσμα των πρώτων δυο παιχνιδιών. Έστω τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A - A &= \text{ο } A \text{ είναι ο νικητής των δυο πρώτων παιχνιδιών,} \\ A - B &= \text{ο } A \text{ είναι ο νικητής του πρώτου παιχνιδιού και ο } B \text{ του δεύτερου παιχνιδιού,} \\ B - A &= \text{ο } B \text{ είναι ο νικητής του πρώτου παιχνιδιού και ο } A \text{ του δεύτερου παιχνιδιού,} \\ B - B &= \text{ο } B \text{ είναι ο νικητής των δυο πρώτων παιχνιδιών,} \\ A &= \text{ο } A \text{ είναι ο νικητής του αγώνα.} \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας και έχουμε

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A-A)P(A|A-A) + P(A-B)P(A|A-B) + P(B-A)P(A|B-A) + P(B-B)P(A|B-B) \\ &= p^2 \cdot 1 + 2p(1-p)P(A) + (1-p)^2 \cdot 0. \end{aligned}$$

Λύνοντας για το $P(A)$ παίρνουμε

$$P(A) = \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)}.$$

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 3.81) Για να βρούμε την πιθανότητα $P(A \subseteq B)$, χρησιμοποιούμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας, δεσμεύοντας στον αριθμό των στοιχείων $|A|$ του συνόλου A. Έχουμε

$$\begin{aligned} P(A \subseteq B) &= \sum_{k=0}^{n} P(|A| = k) P(A \subseteq B \mid |A| = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \cdot \frac{2^{n-k}}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(1+\frac{1}{2})^n}{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε $P(AB = \emptyset) = P(A \subseteq B^c) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, αφού το B^c είναι εξίσου πιθανό να είναι οποιοδήποτε από τα υποσύνολα.

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 3.Theor15): Η σχέση $P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1 - p)P_{n-1}$ αποδεικνύεται δεσμεύοντας στο αποτέλεσμα της πρώτης δοκιμής του πειράματος. Αν είναι επιτυχία, με πιθανότητα p, τότε για να έχουμε άρτιο αριθμό επιτυχιών στις n δοκιμές θα πρέπει να έχουμε περιττό αριθμό επιτυχιών στις $n - 1$ δοκιμές $2, 3, 4, \ldots, n$, ενδεχόμενο που συμβαίνει με πιθανότητα $1 - P_{n-1}$. Αν είναι αποτυχία, με πιθανότητα $1 - p$, τότε για να έχουμε άρτιο αριθμό επιτυχιών στις n δοκιμές θα πρέπει να έχουμε άρτιο αριθμό επιτυχιών στις $n - 1$ δοκιμές $2, 3, 4, \ldots, n$, ενδεχόμενο που συμβαίνει με πιθανότητα P_{n-1}. Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε αμέσως το ζητούμενο.

Η σχέση $P_n = p(1-P_{n-1})+(1-p)P_{n-1}$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $P_n = p+(1-2p)P_{n-1}$, που φανερώνει ότι η P_n είναι μεικτή πρόοδος. Λύνοντας την εξίσωση $x = p+(1-2p)x$ βρίσκουμε το σταθερό σημείο της, $x = \frac{1}{2}$. Αφαιρώντας κατά μέλη την εξίσωση $x = p+(1-2p)x$ από την $P_n = p+(1-2p)P_{n-1}$, έχουμε $P_n - x = (1 - 2p)(P_{n-1} - x)$, δηλαδή η $P_n - x = P_n - \frac{1}{2}$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $1 - 2p$. Επομένως έχουμε

$$P_n - \frac{1}{2} = (1-2p)^n (P_0 - \frac{1}{2}) = (1-2p)^n (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1-2p)^n,$$

και παίρνουμε τελικά ότι

$$P_n = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}.$$

Άσκηση 9 (Tijms, Prob. 8.2): Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 8 ισοπίθανα δειγματικά σημεία, τα $HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT$. Έστω A το ενδεχόμενο δυό η περισσοτέρων κορώνων (H) σε τρεις ρίψεις και B το ενδεχόμενο μια τουλάχιστον κορώνας στις τρεις ρίψεις. Τότε έχουμε

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{4/8}{7/8} = \frac{4}{7}.$$

Άσκηση 10 (Tijms, Prob. 8.14): Έστω A το ενδεχόμενο το ναυάγιο να βρίσκεται πράγματι στη συγκεκριμένη θαλάσσια περιοχή και B το ενδεχόμενο το ναυάγιο να μην εντοπιστεί μετά την αναζήτηση στην περιοχή. Τότε τα δεδομένα του προβλήματος δείχνουν ότι $P(A) = p$ και $P(B|A) = 1 - d$ και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} = \frac{p(1-d)}{p(1-d) + (1-p)1} = \frac{1}{16} = 0.0625.$$

Πηγές

1. Ross, S. (2002) *A First Course in Probability, 6th Edition.* Prentice-Hall.

2. Tijms, H. (2007) *Understanding Probability: Chance Rules in Everyday Life.* Cambridge University Press.

Διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές
Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

2 Μαΐου 2010

Άσκηση 1 (Ross, Exer. 4.38): Αν $E[X] = 1$ και $Var[X] = 5$ να βρείτε

1. $E[(2+X)^2]$,
2. $Var[4+3X]$.

Άσκηση 2 (Ross, Exer. 4.64): Σε μια πόλη 400000 κατοίκων, ο αριθμός των αυτοκτονιών σε ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο 4. Οι αριθμοί των αυτοκτονιών στους διάφορους μήνες θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

1. Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα μήνα να συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες.
2. Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα χρόνο να υπάρχουν τουλάχιστον 2 μήνες με 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες στον καθένα.
3. Ας υποθέσουμε ότι μόλις αρχίζει ο Μάιος του 2010. Ποιά είναι η πιθανότητα ο πρώτος μήνας στον οποίο θα συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες να είναι ο Δεκέμβριος του 2010;

Άσκηση 3 (Ross, Exer. 4.Theor10): Έστω X μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p ανά δοκιμή. Να βρείτε τη μέση τιμή

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right].$$

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 4.Theor19): Αν η X είναι τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο λ, να αποδείξετε ότι

$$E[X^n] = \lambda E[(X+1)^{n-1}].$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα υπολογίστε τις $E[X]$, $E[X^2]$ και $E[X^3]$.

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 5.1): Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Ποιά είναι η τιμή του c;
2. Προσδιορίστε τη συνάρτηση κατανομής της X.

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 5.4): Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X, που παριστάνει το χρόνο ζωής μιας ηλεκτρονικής συσκευής (μετρημένο σε ώρες), δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & \text{αν } x > 10 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Προσδιορίστε την $P(X > 20)$.
2. Προσδιορίστε τη συνάρτηση κατανομής της X.
3. Βρείτε την πιθανότητα ότι από 6 τέτοιες συσκευές που περιέχονται στην ίδια παρτίδα, τουλάχιστον 3 να υπερβούν τις 15 ώρες λειτουργίας. Θεωρήστε ότι οι χρόνοι ζωής διαφορετικών συσκευών είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 5.7): Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αν $E[X] = \frac{3}{5}$, βρείτε τα a και b.

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 5.25): Κάθε κομμάτι που παράγεται σε μια αλυσίδα παραγωγής είναι αποδεκτής ποιότητας με πιθανότητα 95%, ανεξάρτητα από τα άλλα κομμάτια. Θεωρούμε μια παρτίδα από 150 κομμάτια. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το πολύ 10 από τα κομμάτια να είναι απαράδεκτης ποιότητας.

Άσκηση 9 (Ross, Exer. 5.40): Αν η X έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$, να βρείτε τη συνάρτηση κατανομής, τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή και τη διασπορά της $Y = e^X$.

Άσκηση 10 (Ross, Exer. 5.Theor12): Η διάμεσος μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής με συνάρτηση κατανομής F είναι ένας αριθμός m τέτοιος ώστε $F(m) = \frac{1}{2}$. Δηλαδή, η τυχαία μεταβλητή είναι εξίσου πιθανό να έχει τιμές μεγαλύτερες της διαμέσου της όσο και να έχει τιμές μικρότερες. Να βρείτε τη διάμεσο της X, όταν η X ακολουθεί τις παρακάτω κατανομές:

1. την ομοιόμορφη στο (a, b),
2. την κανονική με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,
3. την εκθετική με παράμετρο λ.

Απαντήσεις

***Άσκηση* 1 (Ross, Exer. 4.38):** Έχουμε:

$$\begin{aligned} E[(2+X)^2] &= Var[2+X] + (E[2+X])^2 = Var[X] + 9 = 14, \\ Var[4+3X] &= 9Var[X] = 45. \end{aligned}$$

***Άσκηση* 2 (Ross, Exer. 4.64):** Αφού ο αριθμός των αυτοκτονιών σε ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο 4 θα έχουμε

$$p = P(\text{σε 1 μήνα να συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες}) = 1 - \sum_{i=0}^{7} e^{-4}\frac{4^i}{i!}.$$

Ο αριθμός των μηνών σε ένα χρόνο που συμβαίνουν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες στον καθένα ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με 12 δοκιμές (όσοι οι μήνες) και πιθανότητα επιτυχίας p, την πιθανότητα σε 1 μήνα να συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες. Συνεπώς έχουμε

$$P(\text{σε 1 χρόνο τουλάχιστον 2 μήνες με 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες}) = 1 - (1-p)^{12} - 12p(1-p)^{11}.$$

Ο αριθμός των μηνών μέχρι να εμφανιστεί ο πρώτος μήνας στον οποίο θα συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p, την πιθανότητα σε 1 μήνα να συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες. Δεδομένου ότι μόλις αρχίζει ο Μάιος, η πιθανότητα ο πρώτος μήνας στον οποίο θα συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες να είναι ο Δεκέμβριος είναι

$$P(\text{ο πρώτος μήνας στον οποίο θα συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες είναι ο 8ος από τώρα}) = (1-p)^7 p.$$

***Άσκηση* 3 (Ross, Exer. 4.Theor10):** Έχουμε

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{X+1}\right] &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \frac{1}{(n+1)p}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1} p^{i+1}(1-p)^{n-i} \\ &= \frac{1}{(n+1)p}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} p^{j}(1-p)^{n+1-j} \\ &= \frac{1}{(n+1)p}[(p+(1-p))^{n+1} - (1-p)^{n+1}] \\ &= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}. \end{aligned}$$

***Άσκηση* 4 (Ross, Exer. 4.Theor19):** Έχουμε

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \sum_{i=0}^{\infty} i^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i^{n-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{(i-1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^{n-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j+1}}{j!} \\ &= \lambda E[(X+1)^{n-1}]. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή έχουμε:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \lambda E[(X+1)^0] = \lambda E[1] = \lambda \\
E[X^2] &= \lambda E[(X+1)^1] = \lambda(E[X]+1) = \lambda^2 + \lambda \\
E[X^3] &= \lambda E[(X+1)^2] = \lambda(E[X^2] + 2E[X] + 1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}$$

***Άσκηση* 5 (Ross, Exer. 5.1):** Για τον προσδιορισμό της σταθεράς c έχουμε

$$c\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}.$$

Για τη συνάρτηση κατανομής έχουμε ότι $F(x) = 0$ για $x \leq 0$ και $F(x) = 1$ για $x \geq 1$. Επιπλέον

$$F(x) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{x}(1-u^2)du = \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right), \quad x \in (-1,1).$$

***Άσκηση* 6 (Ross, Exer. 5.4):** Έχουμε

$$P(X > 20) = \int_{20}^{\infty}\frac{10}{x^2}dx = \left[\frac{-10}{x}\right]_{x=20}^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

Για τη συνάρτηση κατανομής έχουμε ότι $F(x) = 0$ για $x \leq 10$ και

$$F(x) = \int_{10}^{x}\frac{10}{u^2}du = 1 - \frac{10}{x}, \quad x > 10.$$

Η πιθανότητα μια συσκευή να υπερβεί τις 15 ώρες λειτουργίας είναι $1 - F(15) = \frac{2}{3}$. Αν έχουμε μια παρτίδα 6 τέτοιων συσκευών, ο αριθμός αυτών που θα υπερβούν τις 15 ώρες λειτουργίας ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 6$ και $p = \frac{2}{3}$. Συνεπώς η πιθανότητα ότι από 6 τέτοιες συσκευές που περιέχονται στην ίδια παρτίδα, τουλάχιστον 3 να υπερβούν τις 15 ώρες λειτουργίας είναι

$$\sum_{i=3}^{6}\binom{6}{i}\left(\frac{2}{3}\right)^i\left(\frac{1}{3}\right)^{6-i}.$$

***Άσκηση* 7 (Ross, Exer. 5.7):** Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (a+bx^2)dx = 1 &\quad\Rightarrow\quad a + \frac{1}{3}b = 1 \\
\int_0^1 x(a+bx^2)dx = \frac{3}{5} &\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $a = \frac{3}{5}$ και $b = \frac{6}{5}$.

***Άσκηση* 8 (Ross, Exer. 5.25):** Έστω X ο αριθμός των απαράδεκτων κομματιών μεταξύ των 150. Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με μέση τιμή $150 \cdot 0.05 = 7.5$ και διασπορά $150 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 7.125$. Χρησιμοποιώντας την κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής (κεντρικό οριακό θεώρημα των DeMoivre-Laplace) έχουμε

$$\begin{aligned}
P(X \leq 10) &= P(X \leq 10.5) \\
&= P\left(\frac{X - 7.5}{\sqrt{7.125}} \leq \frac{10.5 - 7.5}{\sqrt{7.125}}\right) \\
&\simeq P(Z \leq 1.1239), \quad Z \sim N(0,1) \\
&= 0.8695.
\end{aligned}$$

Άσκηση 9 (Ross, Exer. 5.40): Έχουμε για τη συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$ της Y:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } y \leq 1 \\ \log y & \text{αν } 1 < y < e \\ 1 & \text{αν } e \leq y. \end{cases}$$

Για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$ της Y έχουμε:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{αν } 1 < y < e \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η μέση τιμή είναι

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_1^e dy = e - 1.$$

Εναλλακτικά, μπορεί να βρεθεί από τον τύπο

$$E[e^X] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x) dy = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

Η διασπορά βρίσκεται από τον τύπο $Var[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2$, όπου

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_1^e y dy = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Τελικά

$$Var[Y] = \frac{4e - e^2 - 3}{2}.$$

Άσκηση 10 (Ross, Exer. 5.Theor12): Έχουμε

1. $m = \frac{a+b}{2}$.
2. $m = \mu$.
3. $1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2}$ οπότε $m = \frac{1}{\lambda} \log 2$.

Πηγή

1. Ross, S. (2002) *A First Course in Probability, 6th Edition.* Prentice-Hall.

Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές
Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

2 Μαΐου 2010

***Άσκηση* 1 (Ross, Exer. 6.1):** Δυο τίμια ζάρια ρίπτονται. Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X και Y, όταν

1. X είναι η μεγαλύτερη από τις ρίψεις και Y το άθροισμα των ρίψεων,
2. X είναι η ρίψη του πρώτη ζαριού και Y η μεγαλύτερη από τις ρίψεις,
3. X είναι η μικρότερη και Y η μεγαλύτερη από τις ρίψεις.

***Άσκηση* 2 (Ross, Exer. 6.8):** Η (X, Y) είναι συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} c(y^2 - x^2)e^{-y} & \text{αν } y > 0 \text{ και } -y < x < y \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Βρείτε τη σταθερά c.
2. Βρείτε τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των X και Y αντίστοιχα.
3. Υπολογίστε την $E[X]$.
4. Βρείτε τις δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$ και $f_{Y|X}(y|x)$.

***Άσκηση* 3 (Ross, Exer. 6.9):** Η (X, Y) είναι συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) & \text{αν } 0 < x < 1 \text{ και } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Επιβεβαιώστε ότι η $f(x, y)$ είναι πράγματι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.
2. Υπολογίστε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$ της X.
3. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > Y)$.
4. Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y > \frac{1}{2}|X < \frac{1}{2})$.
5. Υπολογίστε την $E[X]$.
6. Υπολογίστε την $E[Y]$.
7. Βρείτε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y|X}(y|x)$ της Y δοθέντος ότι $X = x$.

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 6.10): Η (X, Y) είναι συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{αν } x \geq 0 \text{ και } y \geq 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X < Y)$.

2. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X < a)$.

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 6.22): Η (X, Y) είναι συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{αν } 0 < x < 1 \text{ και } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

2. Υπολογίστε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ της X.

3. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X + Y < 1)$.

4. Βρείτε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y|X}(y|x)$ της Y δοθέντος ότι $X = x$.

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 6.23): Η (X, Y) είναι συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x) & \text{αν } 0 < x < 1 \text{ και } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

2. Υπολογίστε την $E[X]$.

3. Υπολογίστε την $E[Y]$.

4. Υπολογίστε την $Var[X]$.

5. Υπολογίστε την $Var[Y]$.

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 6.40): Δυο τίμια ζάρια ρίπτονται. Έστω X και Y, αντίστοιχα, η μεγαλύτερη και η μικρότερη από τις ζαριές. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p_{Y|X}(y|x)$ της Y δοθέντος ότι $X = x$, για $x = 1, 2, \ldots, 6$. Είναι οι X και Y ανεξάρτητες; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 6.42): Η (X, Y) είναι συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \text{αν } x > 0 \text{ και } y > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Βρείτε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$ της X, δοθέντος ότι $Y = y$, καθώς και τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y|X}(y|x)$ της Y, δοθέντος ότι $X = x$.

2. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Z = XY$.

Άσκηση 9 (Ross, Exer. 6.Theor14): Έστω X και Y ανεξάρτητες γεωμετρικές τυχαίες μεταβλητές με την ίδια παράμετρο p, δηλαδή $P(X = i) = P(Y = i) = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots$.

1. Υπολογίστε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δοθέντος ότι $X + Y = n$, δηλαδή τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(X = i | X + Y = n)$.

2. Τί είδους κατανομή ακολουθεί η X δεδομένου ότι $X+Y = n$; Εξηγήστε το αποτέλεσμα διαισθητικά.

Άσκηση 10 (Ross, Exer. 6.Theor15): Έστω X και Y ανεξάρτητες διωνυμικές τυχαίες μεταβλητές με τις ίδιες παραμέτρους n και p, δηλαδή $P(X = i) = P(Y = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

1. Υπολογίστε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δοθέντος ότι $X + Y = m$, δηλαδή τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(X = i | X + Y = m)$.

2. Τί είδους κατανομή ακολουθεί η X δεδομένου ότι $X+Y = m$; Εξηγήστε το αποτέλεσμα διαισθητικά.

Απαντήσεις

Άσκηση 1 (Ross, Exer. 6.1):

Άσκηση 2 (Ross, Exer. 6.8):

Άσκηση 3 (Ross, Exer. 6.9):

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 6.10):

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 6.22):

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 6.23):

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 6.40):

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 6.42):

Άσκηση 9 (Ross, Exer. 6.Theor14):

Άσκηση 10 (Ross, Exer. 6.Theor15):

Πηγή

1. Ross, S. (2002) *A First Course in Probability, 6th Edition.* Prentice-Hall.