Θέμα 1

Θεωρούμε τους πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -9 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

και $B = A^2 - I_3$.

α) Να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να υπολογίσετε τον A^{-1}.

β) Να βρείτε την τάξη του πίνακα B και να εξετάσετε αν αυτός είναι αντιστρέψιμος.

γ) Να βρείτε μία βάση του χώρου των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Θέμα 2

Θεωρούμε τους διανυσματικούς υποχώρους $U, V \subseteq \mathbb{R}^5$, που ορίζονται ως εξής:

$$U = \{(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5 : x+y+z+w=0 \text{ και } x+z=y+w+4t\}$$

$$V = \langle (1,0,1,0,1), (0,1,0,1,0) \rangle$$

α) Να εξετάσετε αν $U+V=\mathbb{R}^5$

β) Να βρείτε μία βάση του διανυσματικού υποχώρου $U \cap V$.

γ) Να βρείτε διανυσματικό υπόχωρο $W \subseteq V$, έτσι ώστε $V = (U\cap V) \oplus W$.

Θέμα 3

Θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\hat{u} = (u_1, u_2, u_3)$ του $\mathbb{R}^3$ με $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,1,0)$ και $u_3 = (0,1,1)$ και την κανονική βάση $\hat{e}=(e_1, e_2)$ του $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε επίσης τη γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $(f: \hat{u}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

α) Να υπολογίσετε το διάνυσμα $f(3,1,0) \in \mathbb{R}^2$

β) Να υπολογίσετε τον πίνακα $(f: \hat{\varepsilon}, \hat{v})$, όπου $\hat{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και $\hat{v}=(v_1, v_2)$ είναι η διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^2$ με $v_1=(2,3)$, $v_2=(1,2)$

γ) Να βρείτε μία βάση του πυρήνα $\ker f$ της f.

δ) Είναι η απεικόνιση f επί; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.