13) Έστω $a, b \in \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι ο b δεν είναι αρνητικός ακέραιος ή το 0. Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)} z^n$$

είναι τουλάχιστον 1. Αποδείξτε ότι σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να ισχύει $R=+\infty$.

[Υπόδ. Έστω c_n ο συντελεστής του z^n. Αν $a \in \mathbb{Z}$ και $a<0$ τότε $c_n = 0$, για κάθε $n \geq -a$ και άρα $R=+\infty$. Αν a δεν είναι αρνητικός ακέραιος τότε $c_n \neq 0$, για $n \geq 1$ και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο του λόγου.]

14) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ δυναμοσειρές με ακτίνες σύγκλισης R_1 και R_2, αντίστοιχα. Τι μπορείτε να πείτε για τις ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών:

(α) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ και (β) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$;

[Υπόδ. (α) $R \geq \min(R_1, R_2)$ (β) και (β) $R \geq R_1 R_2$].

15) Έστω $a, b, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ώστε $|a|<|b|$ και $\lambda \neq 0 \neq \mu$. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a^n - \mu b^n) z^n$$

[Υπόδ. $R = \frac{1}{|b|}$.]

16) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ και αποδείξτε ότι

$$f''(z) = f(z), \text{ για } |z|<R.$$

17) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2}$ και αποδείξτε ότι

$$z^2 f''(z) + z f'(z) = 4z^2 f(z), \text{ για } |z|<R.$$

για